

В. А. Дубко, Е. В. Карачанская

SHCS-РЯДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ, КЛАССИФИКАЦИИ
И МОДЕЛИРОВАНИЯ
СЛУЧАЙНЫХ
ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Хабаровск
2010

Российская академия наук
Дальневосточное отделение
Вычислительный центр

В. А. Дубко, Е. В. Карачанская

**SHCS-РЯДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ, КЛАССИФИКАЦИИ
И МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ
ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Препринт № 154

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2010

УДК 519.21+62-97+330.4+531.19+537.86
ББК В171+384+У.в631+Е071+О53+3817
Д794

Дубко В. А.

Д794 SHCS-ряды и их применение для обобщения, классификации и моделирования случайных гармонических процессов : препринт № 154 / В. А. Дубко, Е. В. Карачанская ; Вычислительный центр ДВО РАН. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2010. – 31 с.

ISBN 978-5-7389-0874-3

В работе вводится определение стохастических иерархически коррелированных серий (SCHS-рядов). Показано, каким образом SCHS-ряды согласуются с известными из литературы моделями, проведены исследования моделей, связанных с SCHS-рядами.

УДК 519.21+62-97+330.4+531.19+537.86
ББК В171+384+У.в631+Е071+О53+3817

Утверждено к печати ученым советом Вычислительного центра ДВО РАН от 25.02.2010
Ответственный редактор канд. физ.-мат. наук В. Д. Власенко

Doobko Valery A.

SHCS-series and their application for generalization, classification and simulation of the random harmonic processes : preprint № 154 / V. A. Doobko, E. V. Karachanskaya ; Computing Center FEB RAS. – Khabarovsk : Publishers PNU, 2010. - 31 p.

The article defines such concept as the Stochastic Hierarchically correlated Series (SCHS). It is shown, how SCHS go with known models. The research of the models connected with SCHS was carried out.

© Дубко В.А., Карачанская Е. В., 2010
© Вычислительный центр ДВО РАН, 2010
ISBN 978-5-7389-0874-3 © Тихоокеанский государственный университет, 2010

Введение

В ряде работ нами предложены и исследованы модели, приводящие к случайным тригонометрическим рядам [6], [7]. Они возникли в связи с изучением вращательной диффузии, динамики полимерной цепи, моделировании иерархически организованных систем [8]. Изучение таких сумм сильно коррелированных случайных величин, связанных тригонометрическими соотношениями, привело к желанию установить связь с ранее известными тригонометрическими случайными рядами. Это и стало целью данной работы.

Появление математической модели в виде функционального ряда того или иного вида связано с удачной аппроксимацией какого-то реального явления. Так, тригонометрические ряды со случайными независимыми амплитудами встречаются в теории стационарных процессов. Ряды с иерархией подходят для задач диффузии с постоянной скоростью, ряды с переменной фазой - для моделирования турбулентной диффузии, модель "флюгера" может быть связана, например, с изучением вращательной диффузии моментов молекул, с вращением вала при наличии неконтролируемых сильных воздействий.

Далее, каждый процесс, описываемый случайным функциональным рядом, исследуется дополнительно по мере нахождения его применения.

1 Примеры математических моделей реальных процессов

Приведем примеры моделей реальных процессов, который строятся на основе гармонических функций.

"Флюгер"

Положение крайней точки флюгера (в \mathbb{R}^2) с учетом случайных пульсаций ветра можно описать с помощью следующего процесса [6]:

$$\begin{aligned} X(t) &= R \cos \left(\varphi_o + \sum_{k=0}^{n(t)} \Delta\varphi_k + \omega t \right), \\ Y(t) &= R \sin \left(\varphi_o + \sum_{k=0}^{n(t)} \Delta\varphi_k + \omega t \right), \end{aligned}$$

где $\Delta\varphi_k$, например, случайные нормально распределенные величины, $\mathbf{M}\Delta\varphi_k = 0$, $\mathbf{M}(\Delta\varphi_k)^2 = \sigma^2$ для всех k , $n(t)$ – число скачков, подчиненных закону Пуассона с параметром βt : $\mathbf{M}[n(t)] = \beta t$, R – радиус окружности, описываемой крайней точкой флюгера.

Фазовая и амплитудная модуляция.

Фрактальные свойства излучения лазеров. Магнитные шумы

Радиолокационные сигналы $s(t)$ обычно представляются уравнениями вида [11, стр. 72-73], [15, стр. 9], :

$$s(t) = g(t) \cos [2\pi f_c \cdot t + \varphi(t)],$$

где $g(t)$ – огибающая сигнала (амплитуда); $\varphi(t)$ – модулирующая фаза; f_c – частота несущей; t – время. Если функция $g(t)$ – неизвестна, то рассматривается модель амплитудной модуляции, если неизвестна фаза $\varphi(t)$, то речь идет о фазовой модуляции [18, стр. 50-55]. Можно рассматривать и амплитудно-фазовую модуляцию. В предположении, что для получателя

сигнал не несет информации или в предположении о случайном возмущении функций $g(t)$ и $\varphi(t)$, сигнал $s(t)$ можно рассматривать как случайный процесс.

Выходной сигнал реального лазера в общем случае, как показано в [13, стр.141], можно описать следующим выражением:

$$U(t) = (U_o + \Delta U(t)) \cdot \sin(2\pi\nu_o t + \phi(t)),$$

где $\Delta U(t)$ – случайные изменения (флуктуации) амплитуды относительно U_o ; $\phi(t)$ – фазовая модуляция, обусловленная случайными флуктуациями.

Модель флуктуирующей гармонике магнитных шумов, например, имеет представление [10, стр.104] ($\psi(t)$ – случайная фаза) ¹:

$$u_{n\omega_o}(t) = a(t) \cos[n\omega_o t - \psi(t)].$$

Модель стохастической динамики цепи

Стохастическую динамику в жидкой среде цепи конечных размеров с ограниченным числом звеньев, каждый элемент которых подвержены случайным воздействиям, можно описать с помощью уравнений [7]:

$$\begin{aligned} X_N(t) &= \sum_{s=1}^N a(l_s) \cdot \Delta \cdot \cos\left(\varphi_o + \sum_{i=1}^s \Delta\varphi_i(t)\right), \\ Y_N(t) &= \sum_{s=1}^N a(l_s) \cdot \Delta \cdot \sin\left(\varphi_o + \sum_{i=1}^s \Delta\varphi_i(t)\right), \end{aligned}$$

где $a(l_s)$, $\Delta\varphi(t)$ – случайные процессы, $a(l) > 0$, $\Delta\varphi_s(t)$ – угол поворота s -го звена относительно предыдущего, $\Delta\varphi_1(t)$ – угол поворота первого звена цепи относительно положительного направления оси Ox , N – общее число звеньев, $\sum_{s=1}^N a(l_s) \cdot \Delta = \mathcal{L}_o$, \mathcal{L}_o – длина всей цепи (см. рис. 1). Отметим, что в нашей модели учитывается взаимозависимость приращений углов $\Delta\varphi(t)$.

¹см. Дополнение на стр. 23

Модель случайной цепи

Классическая случайная цепь (см. рис. 2), приведенная в [22, стр.246], описывается уравнением:

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{j=1}^n \cos \left(\sum_{k=1}^j \varepsilon_k \cdot \alpha \right), \\ Y_n &= \sum_{j=1}^n \sin \left(\sum_{k=1}^j \varepsilon_k \cdot \alpha \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где X_n и Y_n – координаты конечной точки цепи, α – постоянный угол поворота, выбор знака которого с вероятностью $1/2$ осуществляется с помощью ε_k – последовательности Радемахера [9, стр.15]. Процессы (1) представляют собой суммы сильно коррелированных случайных величин.

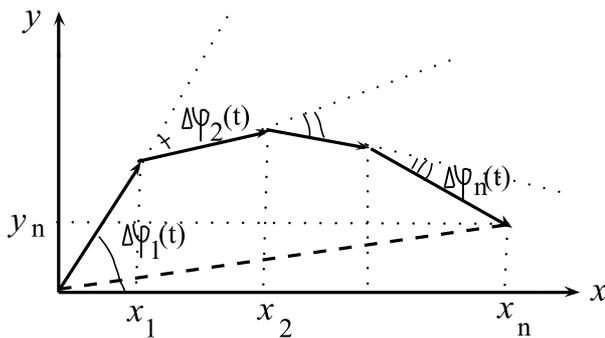


Рис. 1

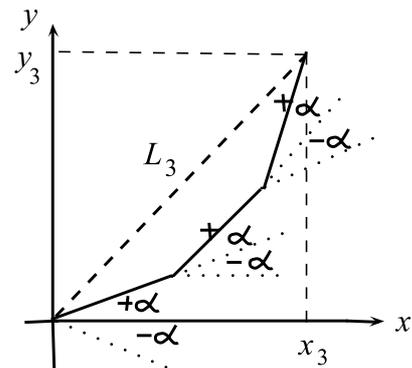


Рис. 2

Стационарные случайные процессы

Каноническое представление стационарной в широком смысле центрированной случайной функции имеет вид [14, стр.330]:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t,$$

где U_k, V_k ($k = 1, 2, \dots$) – центрированные взаимно некоррелированные случайные величины, причем величины U_k и V_k с одинаковыми номерами имеют одну и ту же дисперсию D_k . Если число слагаемых конечно, можно говорить о спектральном разложении стационарной случайной функции с

дискретным спектром. Автокорреляционная функция такого процесса имеет вид:

$$K_X(\tau) = \sum_{k=0}^n D_k \cos \omega_k \tau.$$

Аддитивная смесь узкополосных случайных процессов

В радиосвязи и радионавигации часто используют процессы вида

$$Z(t) = \sum_{j=1}^n A_j(t) \cdot \cos \left(\sum_{k=1}^j \Delta \varphi_k(t) \right),$$

которые можно интерпретировать как аддитивную смесь узкополосных случайных процессов [1].

Перечисленные модели можно представить в общем виде, используя следующее, обобщенное представление:

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} A_j(t) \cdot \cos \left(\varphi_0 + \sum_{k=1}^j \Delta \varphi_k(t) \right), \\ Z_2(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} B_j(t) \cdot \sin \left(\varphi_0 + \sum_{k=1}^j \Delta \varphi_k(t) \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Ряды (2) являются комбинированными стохастическими: и $A_j(t)$, $B_j(t)$, φ_0 и приращения фазы $\Delta \varphi_i(t)$ могут быть случайными и, в общем, взаимно зависимыми. Ряды (2) при указанных свойствах представляют собой сумму сильно зависимых слагаемых. Они отличаются от классических гармонических случайных рядов [9].

Определение 1 *Тригонометрические ряды вида (2) будем называть стохастическими, иерархически-коррелированными сериями (SHCS).*

Введение в название рядов (2) термина "иерархически-коррелированные" обусловлено добавлением для каждого следующего уровня (слагаемого) приращений по фазе.

На примере приведенных выше моделей покажем, каким образом данное представление может быть согласовано с представлением для случайных

гармонических рядов и опишем некоторые свойства этих рядов. Таким образом установим, что модельное представление (2) можно рассматривать как обобщение всех отмеченных случаев.

Отметим, что при определенных условиях эти ряды являются стационарными, стационарными в широком смысле.

2 Сопоставление SCHS-моделей с моделями, построенными на основе гармонических рядов и функций

А. Модель "флюгера". (Обобщение модели "флюгера". R -процессы)

Пусть в (2) амплитуды $A_j(t)$ и $B_j(t)$ определяются условиями

$$\begin{aligned} A_j(t) &= \left(H(n(t) - j) \cdot H(j + 1 - n(t)) \right) \cdot \bar{A}_j(t), \\ B_j(t) &= \left(H(n(t) - j) \cdot H(j + 1 - n(t)) \right) \cdot \bar{B}_j(t), \end{aligned}$$

где $H(x)$ – единичная функция Хевисайда². Тогда процесс

$$Z_x(t) = \bar{A}_{n(t)} \cdot \cos \left(\varphi_o + \sum_{k=1}^{n(t)} \Delta\varphi_k(t) \right), \quad (3a)$$

$$Z_y(t) = \bar{B}_{n(t)} \cdot \sin \left(\varphi_o + \sum_{k=1}^{n(t)} \Delta\varphi_k(t) \right). \quad (3b)$$

можно рассматривать обобщение модели "флюгера". В этом можно убедиться, положив, что

$$\begin{aligned} \bar{A}_{n(t)} &= \bar{B}_{n(t)} \\ \Delta\varphi_k(t) &= (\omega_k - \omega_{k-1})t + \Delta\tilde{\varphi}_k(t). \end{aligned}$$

Тогда уравнения (3) примут вид:

$$\begin{aligned} Z_x(t) &= \bar{A}_{n(t)} \cdot \cos \left(\varphi_o + \omega_{n(t)}t + \sum_{k=1}^{n(t)} \Delta\tilde{\varphi}_k(t) \right), \\ Z_y(t) &= \bar{A}_{n(t)} \cdot \sin \left(\varphi_o + \omega_{n(t)}t + \sum_{k=1}^{n(t)} \Delta\tilde{\varphi}_k(t) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Если положить , что

$$\Delta\tilde{\varphi}_k(t) = \varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t),$$

²Здесь функция Хевисайда используется в интерпретации $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ При этом прямоугольная функция, выделяющая промежуток $[a, b]$, определяется следующим соотношением $\Pi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ или } x > b \\ 1, & a \leq x \leq b. \end{cases} = H(x - a) \cdot H(b - x)$

то приходим к представлению

$$Z_x(t) = \bar{A}_{n(t)} \cdot \cos(\varphi_o + \omega_{n(t)}t + \varphi_{n(t)}(t)), \quad (5a)$$

$$Z_y(t) = \bar{A}_{n(t)} \cdot \sin(\varphi_o + \omega_{n(t)}t + \varphi_{n(t)}(t)). \quad (5b)$$

Модели для случая (5а), когда $\bar{A}_k(t) = \bar{A}_k$, $\varphi_{n(t)}(t) = \varphi_k$, ω_k – независимые между собой и для различных k случайные величины, при условии, что $\varphi_o = 0$ и φ_k – равномерно распределенные на интервале $[0, 2\pi)$ случайные величины, исследовались в [21], [20] и были названы авторами R - гармоническими случайными процессами.

Модель вида (4) для случая $\bar{A}_k(t) = \bar{B}_k(t) = const$, $\omega_k = \omega$ для любого k и независимых, нормально распределенных приращениях $\Delta\tilde{\varphi}_k(t) = \Delta\varphi_k$ исследована в [6] как пример вращательной диффузии в \mathbb{R}^2 . Удобно в этом случае представить проекции вектора направления в виде (см. рис. 3):

$$X(t) = Z_x(t) = |J| \cos(\tilde{\varphi}(t) + \omega t), \quad t_0 = 0,$$

$$Y(t) = Z_y(t) = |J| \sin(\varphi(t) + \omega t),$$

$$|J| = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{Z_x^2(t) + Z_y^2(t)} = const,$$

и где $\tilde{\varphi}(t) = \varphi_o + \sum_{k=0}^{n(t)} \Delta\tilde{\varphi}_k$, ω – неслучайная собственная частота.

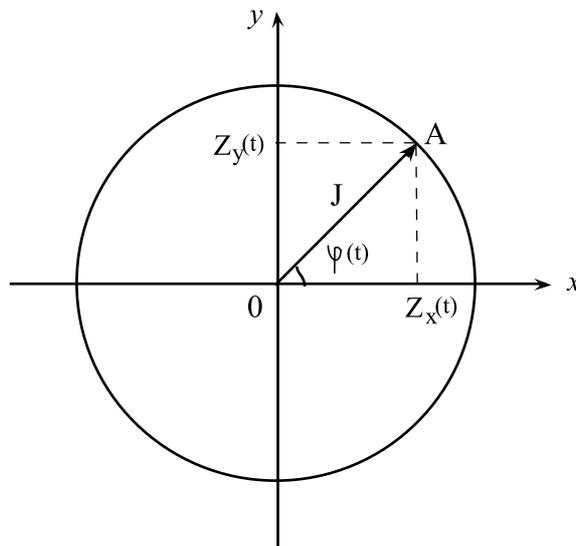


Рис. 3

Сформулируем одну обобщающую теорему по результатам работы [6]:

Теорема 1 Пусть случайный процесс имеет представление

$$v(t) = \cos(\tilde{\varphi}(t) + \omega t), \quad \tilde{\varphi}(t) = \varphi_0 + \sum_{k=0}^{n(t)} \Delta\varphi_k, \quad (6)$$

где $\Delta\varphi_k$ – независимые нормально распределенные случайные величины с $\mathbf{M}\Delta\varphi_k = 0$ и $\mathbf{M}(\Delta\varphi_k)^2 = \sigma^2$; $n(t)$ – число скачков, подчиненных закону Пуассона с параметром βt : $\mathbf{M}[n(t)] = \beta t$; φ_0 не зависит от $\tilde{\varphi}(t)$ и имеет плотность распределения $\rho(\varphi_0)$. Тогда характеристическая функция процесса $\tilde{\varphi}(t)$ имеет вид

$$g_\varphi(\lambda, t | \varphi_0) = \exp \left\{ \left(-\beta - i\lambda\omega + \beta \exp \left\{ -\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} \right\} \right) t \right\} \cdot \exp \{ i\lambda\varphi_0 \},$$

а начальный момент порядка m для случайной величины $v(t)$

$$L_1(m, t) = \mathbf{M} \left[(\cos(\tilde{\varphi}(t) + \omega t))^m \right]$$

представление

$$L_1(m, t) = \frac{1}{2^m} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^m C_n^k \cos[(m - 2k)(\varphi_0 + \omega t)] \times \\ \times \exp \left\{ \left(-\beta + \beta e^{-\frac{(m - 2k)^2 \sigma^2}{2}} \right) t \right\} \rho(\varphi_0) d\varphi_0.$$

Если число скачков неограниченно возрастает, $\Delta\varphi_k(t) \rightarrow 0$, то при выполнении ряда условий воспользуемся диффузионной аппроксимацией (см., например, [17, стр. 167-186]), и, вместо процесса $\tilde{\varphi}(t) = \varphi_0 + \sum_{k=0}^{n(t)} \Delta\varphi_k$ будем использовать следующее представление:

$$\varphi(t) = \int_0^t \sigma(\tau) dw(\tau).$$

В этом случае

$$X(t) = R(t) \cos(\varphi(t)), \\ Y(t) = R(t) \sin(\varphi(t)), \\ d\varphi(t) = \sigma(t) dw(t).$$

Полагая, что $R(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, построим уравнения для проекций $X(t)$ и $Y(t)$:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(\frac{\partial R(t)}{\partial t} \cos(\varphi(t)) - \frac{1}{2} R(t) \sigma^2(t) \cos(\varphi(t)) \right) dt - \\ &\quad - R(t) \sigma(t) \sin(\varphi(t)) dw(t), \\ dY(t) &= \left(\frac{\partial R(t)}{\partial t} \sin(\varphi(t)) - \frac{1}{2} R(t) \sigma^2(t) \sin(\varphi(t)) \right) dt + \\ &\quad + R(t) \sigma(t) \cos(\varphi(t)) dw(t), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(\frac{1}{2R^2(t)} \frac{\partial R^2(t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2(t) \right) X(t) dt - \sigma(t) Y(t) dw(t), \\ dY(t) &= \left(\frac{1}{2R^2(t)} \frac{\partial R^2(t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2(t) \right) Y(t) dt + \sigma(t) X(t) dw(t). \end{aligned}$$

Если изменения $R^2(t)$ выбрать как решения уравнения

$$\frac{1}{2R^2(t)} \frac{\partial R^2(t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2(t) = -a(t) \quad (7)$$

при условиях $\sigma(t) = \frac{\bar{\sigma}(t)}{R(t)}$, $a(t) > 0$ и $\bar{\sigma}(t)$ ограничены для любых t , то приходим к таким уравнениям:

$$\begin{aligned} dX(t) &= -a(t) X(t) dt - \frac{\bar{\sigma}(t)}{R(t)} Y(t) dw(t), \\ dY(t) &= -a(t) Y(t) dt + \frac{\bar{\sigma}(t)}{R(t)} X(t) dw(t). \end{aligned}$$

и представлению для $R^2(t)$:

$$R^2(t) = \int_0^t \exp \left\{ - \int_0^\tau 2a(\tau) d\tau \right\} \bar{\sigma}(\tau) d\tau + \exp \left\{ - \int_0^t 2a(\tau) d\tau \right\} R^2(0).$$

Воспользовавшись уравнениями для $X(t)$ и $Y(t)$, находим:

$$\begin{aligned} dR^2(t) &= d(x^2(t) + y^2(t)) = 2X(t) dX(t) + 2Y(t) dY(t) + \sigma^2(t) dt = \\ &= [\sigma^2(t) - 2a(t)R^2(t)] dt - 2[X(t)Y(t) - X(t)Y(t)] \frac{\sigma(t)}{R(t)} dw(t) = \\ &= [\sigma^2(t) - 2a(t)R^2(t)] dt. \end{aligned}$$

Таким образом, действительно, $R^2(t)$ – решение уравнения (7). Если $a(t) = a$, $\sigma(t) = \sigma$, то

$$R^2(t) = \frac{\sigma^2}{2a} + e^{-at} \left(R^2(0) - \frac{\sigma^2}{2a} \right).$$

Следовательно, круг радиуса

$$R(0) = \frac{\sigma}{\sqrt{2a}}$$

является притягивающим многообразием для моделируемого стохастического процесса. В общем случае, процесс будет осуществляться в некоторой полосе.

Если изменения $R^2(t)$ выбрать как решение уравнения

$$\frac{1}{2R^2(t)} \frac{\partial R^2(t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2(t) = 0,$$

то, следовательно, динамика конечной точки флюгера будет определяться системой стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dX(t) &= -\sigma(t)Y(t) dw(t), \\ dY(t) &= \sigma(t)X(t) dw(t). \end{aligned}$$

Если $\sigma(t)$, например, случайный скачкообразный процесс, то двумерный процесс $\{X(t), Y(t)\}$ будет переходить с одной кривой на другую, сохраняя тенденцию на промежутке между скачками, не стремясь к точке покоя "0".

В. Амплитудная и фазовая модуляция. Магнитные шумы

Возвращаясь к (3а) и полагая

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_k(t) &= 2\pi(f_k - f_{k-1}) \cdot t + \varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t) = 2\pi\Delta f_k \cdot t + \tilde{\Delta}\varphi_k(t), \\ \bar{A}_j(t) &= A(t), \\ f_j &= f, \quad \varphi_j(t) = \varphi(t), \end{aligned}$$

приходим к одной из возможных моделей фазовой модуляции

$$Z_1(t) = A(t) \cdot \cos(2\pi f \cdot t + \varphi(t)). \quad (8)$$

Для магнитных шумов модель \tilde{n} -й гармоники можно представить из уравнения (8), полагая

$$f_n = -\frac{\tilde{n}\omega_o}{2\pi}$$

Таким образом, приходим к модели вида:

$$Z_1(t) = A(t) \cdot \cos(2\pi f_{\tilde{n}} \cdot t + \psi(t)).$$

С. Модель стохастической динамики цепи. Динамическая модель случайных блужданий с постоянной скоростью

Рассмотрим модель (2) при условии

$$\begin{aligned} A_j(t) &= B_j(t) = H(n-j)A_j, \\ \Delta\varphi_k(t) &= \Delta\varphi_k, \quad \varphi_o = 0, \end{aligned}$$

где A_j – неслучайные величины, $\varphi_k(t)$ – независимые случайные величины, то получим представление

$$\begin{aligned} Z_x(t) &= \sum_{j=1}^n A_j \cdot \cos\left(\sum_{k=1}^j \Delta\varphi_k\right), \\ Z_y(t) &= \sum_{j=1}^n A_j \cdot \sin\left(\sum_{k=1}^j \Delta\varphi_k\right) \end{aligned}$$

может служить, например, моделью проекций длины классической цепи (Феллер) или диффузии с постоянной скоростью в \mathbb{R}^2 [12, стр. 355].

Действительно, если в модели (2) положить $A_j(t) = B_j(t) = 1$, $\varphi_o = 0$, $\Delta\varphi_k(t) = \varepsilon_k \cdot \alpha$, где ε_k – независимые величины, принимающие с равной вероятностью значения ± 1 (последовательность Радемахера), $\alpha = const$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то приходим к модели длины цепи L_n (расстояние между концами цепи):

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{j=1}^n \cos\left(\sum_{k=1}^j \varepsilon_k \cdot \alpha\right), \\ Y_n &= \sum_{j=1}^n \sin\left(\sum_{k=1}^j \varepsilon_k \cdot \alpha\right). \\ L_n^2 &= X_n^2 + Y_n^2. \end{aligned}$$

Для этой модели определяли только среднее значение квадрата длины этой цепи $\mathbf{M}[X_n^2 + Y_n^2]$ [22, стр.246]:

$$\mathbf{M}[L_n^2] = \mathbf{M}[X_n^2 + Y_n^2] = n \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - 2 \cos \alpha \frac{1 - \cos^n \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2}.$$

Если в модели (2) выбрать $A_j(t) = B_j(t) = H(n(t) - j) \cdot v \cdot \delta$, где $\delta = \Delta t = const$, $n(t) = \left[\frac{t}{\delta} \right] + 1$ (здесь $[x]$ – целая часть числа x), то получим уравнения случайного блуждания с неслучайной скоростью в \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} Z_x(t) &= v \cdot \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{n(t)} \cos \left(\varphi_o + \sum_{k=1}^j \Delta \varphi_k(t) \right), \\ Z_y(t) &= v \cdot \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{n(t)} \sin \left(\varphi_o + \sum_{k=1}^j \Delta \varphi_k(t) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Замечание 1 В частном случае, модель (9) может описывать движение летающего объекта под действием сильных, например, турбулентных, пульсаций [3, стр. 37].

Если принять, что $(X_1(t), Y_1(t))$ – координаты первого самолета, и соответственно, $(X_2(t), Y_2(t))$ – координаты второго самолета, то можно рассмотреть вероятностную модель достижения ими критической области – области столкновения на основе представления.

$$\begin{aligned} L_{\text{крит}}^2(t) &= \widehat{Z}_1^2 + \widehat{Z}_2^2 \leq const, \\ \widehat{Z}_1(t) &= |X_1(t) - X_2(t)|, \quad \widehat{Z}_2(t) = |Y_1(t) - Y_2(t)|, \end{aligned} \quad (10)$$

где $L_{\text{крит}}(t)$ – расстояние между самолетами.

Подобные модели позволяют исключать "парадокс ненулевой вероятности столкновения" самолетов, для любого исходного расстояния между ними, в любой момент времени $t > 0$. Такой вычислительный парадокс появляется при использовании моделей достижения критической области (КО) процессами диффузионного типа. Он объясняется тем, что, на уровне стохастических уравнений, возмущения входят в форме

производных от винеровского процесса ("белый шум")³. Отметим, что модель вида (10) – пример возможного практического применения суперпозиции независимых SCHS-рядов.

Одно из обобщений модели (2) было исследовано в [7], а именно – динамика изменения длины цепи конечных размеров с бесконечным числом звеньев.

Рассмотрим особенности этой модели и сформулируем основные выводы.

Пусть $l \in [0, L]$ – параметр, l_1, l_2, \dots – значения параметра, $0 = l_1 < l_2 < \dots \leq L$, $\Delta = L/N$, $l_j = j \cdot \Delta$, $\sum_{s=1}^N a(l_s) \cdot \Delta = \mathcal{L}_o = \text{const}$ – длина цепи. Рассмотрим модель динамики цепи, описываемую следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} X_N(t) &= \sum_{s=1}^N a(l_s) \cdot \Delta \cdot \cos \left(\varphi_o + \sum_{k=1}^s \Delta \varphi_k(t) \right), \\ Y_N(t) &= \sum_{s=1}^N a(l_s) \cdot \Delta \cdot \sin \left(\varphi_o + \sum_{k=1}^s \Delta \varphi_k(t) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $a(l_s)$, $\Delta \varphi_s(t)$ – в общем случае случайные процессы, но мы ограничимся случаем, когда $a(l) > 0$ – неслучайная функция. $\Delta \varphi_s(t)$ – угол поворота s -го звена относительно предыдущего, $\Delta \varphi_1(t)$ – угол поворота первого звена цепи относительно положительного направления оси Ox .

Математическую модель, описываемую системой (11), будем называть стохастической динамикой цепи. Для этой модели в [7] построена система стохастических дифференциальных уравнений с начальными данными, решение которой $\{X(l; t); Y(l; t)\}$ определяет координаты конечной точки стохастической цепи как функции от параметра l .

³Примеры построения диффузионных моделей для нахождения КО можно найти в [16]. Там же см., ссылку на стр. 95).

Пусть для модели (11) выполнены следующие модельные предположения:

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &= 0, \\ a(l) &> 0, \quad l \in [0, L], \\ \Delta\varphi_k(t) &= \eta(l_k; t) \cdot \Delta(w(l_k)), \quad t \in [0, T], \\ \eta(l_k; t) &= \int_0^t \sigma(l_k; \tau) dw_k(\tau),\end{aligned}\tag{12}$$

где $\Delta(w(l_k))$, $\Delta(w_k(\tau))$ – независимые между собой и для различных k и τ опережающие приращения соответствующих винеровских процессов, определенных на произведении независимых вероятностных пространств

$$\{\Omega_1, \mathfrak{S}_l, P_1\} \times \{\Omega_2, \mathfrak{S}_t(n), P_2\},$$

где \mathfrak{S}_l и $\mathfrak{S}_t(n)$ – соответствующие потоки σ -алгебр, порождаемых процессами $w(l)$ и $w(t) \in \mathbb{R}^n$; функции $a(l) \in \mathbb{C}_{[0, L]}^1$ и $\sigma(l; t) \in \mathbb{C}_{[0, L] \times [0, T]}^2$ – неслучайные функции от l и t , $\eta(l_s; t)$ – интенсивность поворота.

Теорема 2 [7] *Случайный процесс $\{X(l; t); Y(l; t)\}$, являющийся предельным ($N \rightarrow \infty$) для (11) при модельных предположениях (12), есть решение задачи Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений Ито для любого $t > 0$:*

$$\begin{aligned}d_l p(l; t) &= \left[p(l; t) \frac{\partial}{\partial l} \ln a(l) - \frac{1}{4} p(l; t) \int_0^t \sigma^2(l; \tau) d\tau \right] dl - \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(l; \tau) d\tau \right)^{1/2} q(l; t) dw(l), \\ d_l q(l; t) &= \left[q(l; t) \frac{\partial}{\partial l} \ln a(l) - \frac{1}{4} q(l; t) \int_0^t \sigma^2(l; \tau) d\tau \right] dl + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(l; \tau) d\tau \right)^{1/2} p(l; t) dw(l),\end{aligned}$$

$$d_l X(l; t) = q(l; t) dl, \quad d_l Y(l; t) = p(l; t) dl,$$

удовлетворяющей граничным условиям

$$X(0; t) = 0, \quad Y(0; t) = 0, \quad p(0; t) = a(0), \quad q(0; t) = 0.$$

В качестве примера колеблющейся цепи можно рассмотреть модель колебания корабля относительно положения равновесия (см. рис. 4). В этой модели длины звеньев фиксированы: $l_1 = |AB|$ – расстояние от центра тяжести корабля до палубы, $l_2 = |BC|$ – длина мачты, $l_3 = |CD|$ – длина флагштока. При качке корабля звенья получающейся цепи колеблются. Положим, что $\varphi_1(t)$ – фаза колебания вектора, выходящего из центра тяжести корабля до палубы, $\varphi_2(t)$ – фаза колебания мачты относительно перпендикуляра к палубе корабля, $\varphi_3(t)$ – фаза колебания флагштока относительно мачты. Тогда угол отклонения мачты относительно оси Oy равен $\varphi_1(t) + \varphi_2(t)$, соответствующий угол отклонения флагштока определяется суммой $\varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t)$, и расстояние от центра тяжести до крайней точки флагштока определяется следующим образом:

$$|AD'| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2},$$

$$l_x = l_1 \cos \varphi_1(t) + l_2 \cos(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) + l_3 \cos(\varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t)),$$

$$l_y = l_1 \sin \varphi_1(t) + l_2 \sin(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) + l_3 \sin(\varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t)).$$

Если $|AD'| = |AD|$, то корабль находится в равновесии.

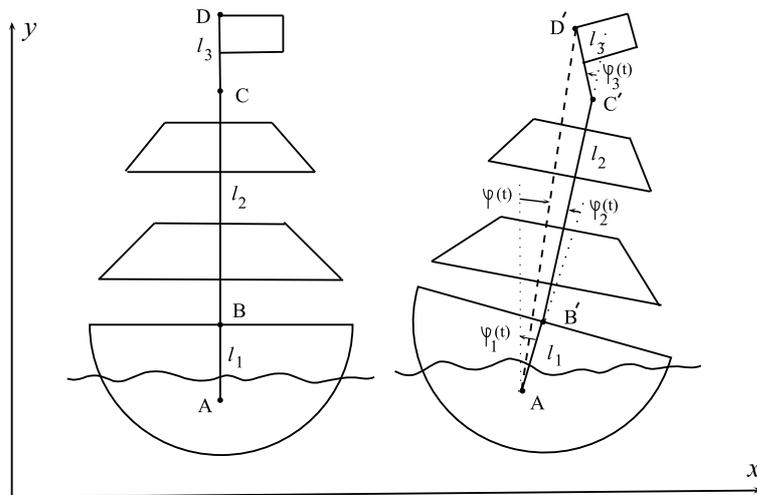


Рис. 4.

D. Стационарные случайные процессы

Пусть приращения приращения случайной фазы определяются следующим образом:

$$\Delta\varphi_s(t) = \psi_s(t) - \psi_{s-1}(t), \quad \psi_s(t) = \omega_s \cdot t + \phi_s.$$

и амплитуды $A_j(t) = A_j$, $B_j(t) = B_j$ не зависят от t , независимы между собой и для несовпадающих j , нецентрированы и одинаково распределены.

В этом случае процесс

$$Z(t) = Z_1(t) + Z_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(\omega_n t + \phi_n) + B_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \right]. \quad (13)$$

при условии, что ϕ_n независимы и равномерно распределены, является стационарным (см, например, [23, стр. 42]).

Частным случаем ряда (13) можно считать действительный гауссовский тригонометрический ряд, полагая, что $A_n(t) = a_n X_n$, $B_n(t) = a_n Y_n$, где $X_0, Y_0, X_1, Y_1, \dots$ – нормальная последовательность, $\omega_n \cdot t + \phi_n = nt$ [9, стр. 223]:

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [X_n \cos nt + Y_n \sin nt].$$

Существует множество распределений случайных фаз, для которых процессы вида (13) являются стационарными в широком смысле.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1 Пусть функция $\rho(\varphi)$ определена условиями:

$$\rho(\varphi) = \sum_{k=1}^n \left[a_k \cdot \frac{1}{\beta_k} \sum_{\beta=1}^{\beta_k} \rho_{\beta}(\varphi; k) \right], \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = 1,$$

где a_k – либо фиксированные, не зависящие от φ числа, либо случайные величины – разбиения отрезка $[0, 1]$ со своим законом распределения, и

$$\rho_\beta(\varphi; k) = \rho_\beta \left(\varphi + \frac{\pi}{2\beta_k}; k \right),$$

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_\beta(\varphi; k) d\varphi = 1.$$

Тогда функция $\rho(\varphi)$ является $\frac{\pi}{2}$ -периодической.

Доказательство. Каждая из функций $\rho_\beta(\varphi; k)$ является $\frac{\pi}{2}$ -периодической:

$$\rho_\beta(\varphi; k) = \rho_\beta \left(\varphi + \frac{\pi}{2\beta_k}; k \right) = \rho_\beta \left(\varphi + \frac{\pi}{2\beta_k} \cdot \beta_k; k \right) = \rho_\beta \left(\varphi + \frac{\pi}{2}; k \right).$$

Следовательно, и функция $\rho(\varphi)$ также имеет период, равный $\frac{\pi}{2}$. \square

Замечание 2 к лемме. Особенность выводов леммы заключается в том, что $\rho(\varphi)$ принадлежит ансамблю случайных функций, связанных с распределением a_k . Более детальное рассмотрение планируется в следующих работах.

Теорема 3 Для того, чтобы случайный процесс (13) был стационарным в широком смысле, достаточно, чтобы плотность распределения фазы $\rho(\varphi)$ была $\frac{\pi}{2}$ -периодической:

$$\rho(\varphi) = \rho \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right),$$

и допускала представление (14).

Доказательство. По определению, случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если выполнены условия:

$$\mathbf{M} \left[Z(t) \right] = const, \quad cov \left[Z(t) \cdot Z(t + \tau) \right] = K(\tau). \quad (15)$$

Проверим выполнение (15), принимая во внимание, что если

$$\rho(\varphi) = \rho \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right),$$

то

$$\rho(\varphi + \pi) = \rho \left(\varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \rho \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = \rho(\varphi).$$

Воспользуемся свойствами синуса и косинуса: $\sin(\phi + \pi) = -\sin \phi$, $\cos(\phi + \pi) = -\cos \phi$, учитывая независимость случайных фаз и случайных амплитуд:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[Z(t)] &= \mathbf{M}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left[\eta_n \cos(\omega_n t + \phi_n) + \nu_n \sin(\omega_n t + \phi_n)\right]\right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\left[\eta_n \cos(\omega_n t + \phi_n)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\left[\nu_n \sin(\omega_n t + \phi_n)\right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}[\eta_n] \mathbf{M}\left[\cos(\omega_n t + \phi_n)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}[\nu_n] \mathbf{M}\left[\sin(\omega_n t + \phi_n)\right]. \end{aligned}$$

Вычислим отдельно $\mathbf{M}\left[\cos(\omega_n t + \phi_n)\right]$ и $\mathbf{M}\left[\sin(\omega_n t + \phi_n)\right]$, используя разложение косинуса суммы и синуса суммы:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left[\cos(\omega_n t + \phi_n)\right] &= \cos \omega_n t \mathbf{M}\left[\cos \phi_n\right] - \sin \omega_n t \mathbf{M}\left[\sin \phi_n\right], \\ \mathbf{M}\left[\sin(\omega_n t + \phi_n)\right] &= \sin \omega_n t \mathbf{M}\left[\cos \phi_n\right] + \cos \omega_n t \mathbf{M}\left[\sin \phi_n\right]. \end{aligned}$$

Поскольку плотность распределения вероятностей случайной фазы есть $\frac{\pi}{2}$ -периодическая функция, то получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left[\cos \phi_n\right] &= \int_0^{2\pi} \cos \phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n = \\ &= \int_0^{\pi} \cos \phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n + \int_{\pi}^{2\pi} \cos \phi \rho(\phi_n) d\phi_n = \\ &= \int_0^{\pi} \cos \phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n + \int_0^{\pi} \cos(\phi + \pi) \rho(\phi_n + \frac{\pi}{2} \cdot 2) d\phi_n = \\ &= \int_0^{\pi} \cos \phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n - \int_0^{\pi} \cos \phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n = 0. \end{aligned}$$

Аналогично получим, что $\mathbf{M}\left[\sin \phi_n\right] = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{M}[Z(t)] = \text{const} = 0. \quad (16)$$

Проверим выполнение второго условия. С учетом (16) и независимости случайных фаз между собой, имеем:

$$\begin{aligned}
\text{cov} \left[Z(t) \cdot Z(t + \tau) \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M} \left[\eta_n^2 \right] \mathbf{M} \left[\cos \left(\phi_n + \omega_n(t + \tau) \right) \cos \left(\phi_n + \omega_n t \right) \right] + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M} \left[\nu_n^2 \right] \mathbf{M} \left[\sin \left(\phi_n + \omega_n(t + \tau) \right) \sin \left(\phi_n + \omega_n t \right) \right].
\end{aligned} \tag{17}$$

Учитывая тригонометрические преобразования, приходим к выражениям:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M} \left[\cos \left(\phi_n + \omega_n(t + \tau) \right) \cos \left(\phi_n + \omega_n t \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left(\cos \omega_n \tau + \cos(2\omega_n t + \omega_n \tau) \mathbf{M} \left[\cos 2\phi_n \right] - \sin(2\omega_n t + \omega_n \tau) \mathbf{M} \left[\sin 2\phi_n \right] \right), \\
&\mathbf{M} \left[\sin \left(\phi_n + \omega_n(t + \tau) \right) \sin \left(\phi_n + \omega_n t \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left(\sin \omega_n \tau + \cos(2\omega_n t + \omega_n \tau) \mathbf{M} \left[\sin 2\phi_n \right] + \sin(2\omega_n t + \omega_n \tau) \mathbf{M} \left[\cos 2\phi_n \right] \right),
\end{aligned} \tag{18}$$

С учетом $\frac{\pi}{2}$ -периодичности функции $\rho(\phi)$, имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \left[\cos 2\phi_n \right] &= \int_0^{2\pi} \cos 2\phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n = \\
&= \int_0^{\pi} \cos 2\phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n + \int_{\pi}^{2\pi} \cos 2\phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n = \\
&= \int_0^{\pi} \cos 2\phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n + \int_0^{\pi} \cos(2(\phi_n + \pi)) \rho(\phi_n + \frac{\pi}{2} \cdot 2) d\phi_n = \\
&= \int_0^{\pi} \cos 2\phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n + \int_0^{\pi} \cos 2\phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n = \\
&= 2 \int_0^{\pi} \cos 2\phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n + \int_0^{\pi} \cos(2(\phi_n + \pi)) \rho(\phi_n + \frac{\pi}{2} \cdot 2) d\phi_n = \\
&= 2 \left[\int_0^{\pi/2} \cos 2\phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos 2\phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n \right] = \\
&= 2 \left[\int_0^{\pi/2} \cos 2\phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n + \int_0^{\pi/2} \cos(2(\phi_n + \frac{\pi}{2})) \rho(\phi_n + \frac{\pi}{2}) d\phi_n \right] = \\
&= 2 \left[\int_0^{\pi/2} \cos 2\phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n + \int_0^{\pi/2} \cos(2\phi_n + \pi) \rho(\phi_n) d\phi_n \right] = \\
&= 2 \left[\int_0^{\pi/2} \cos 2\phi_n \rho(\phi_n) d\phi_n - \int_0^{\pi/2} \cos(2\phi_n + \pi) \rho(\phi_n) d\phi_n \right] = 0.
\end{aligned}$$

В результате аналогичных преобразований $\mathbf{M}[\sin 2\phi_n] = 0$ и, подставляя полученные результаты в (18), а затем в (17), получаем:

$$\text{cov}[Z(t) \cdot Z(t + \tau)] = \frac{\cos \omega_n \tau}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}[\eta_n^2] + \frac{\sin \omega_n \tau}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}[\nu_n^2] = K(\tau).$$

Оба условия выполняются, следовательно, процесс является стационарным в широком смысле. Поскольку $\rho(\phi)$ – плотность распределения фазы является $\frac{\pi}{2}$ -периодической функцией, то, в силу Леммы 1 эту функцию можно выбрать в виде (14). Теорема доказана. \square

Примеры таких плотностей приведены в Приложении.

Вернемся к модели R -гармонического процесса (5а). Эта модель с жестким требованием равномерного распределения случайной фазы. Как указано в исследовании, одним из свойств этого процесса указывается его стационарность только в широком смысле. Как следует из Теоремы 3, требование равномерности распределения фазы является тогда избыточным для стационарности. R -гармонические процессы – очень узкий класс, являющийся частным случаем представляемого класса процессов. По схеме доказательств свойств R -гармонических процессов видно, что выводы в [21] можно полностью переписать для более широкого класса процессов, исключающих требование равномерности распределения случайной фазы. К ним относятся, например, прежде всего выводы, связанные с эргодичностью процесса относительно математического ожидания и предельные теоремы для сумм таких процессов.

Дополнение. [10, стр.104]: "Удобно представить флуктуирующую гармонику как квазимонохроматический случайный процесс

$$u_{n\omega_0}(t) = a(t) \cos [n\omega_0 t - \psi(t)].$$

Из записей видно, что флуктуации "амплитуды" гармоники в течение нескольких минут (см. рис. 5) – того же порядка, что и в течение нескольких часов (см. рис. 6), следовательно, наблюдаемые уходы не являются следствием каких-либо процессов установления, длящихся ограниченное

время. Исследования зависимости фазы $\psi(t)$ остаточной гармоники от времени показало, что фаза хаотически принимает все возможные значения в интервале $(0, 2\pi)$, хотя нельзя с уверенностью сказать, что все эти значения фазы равновероятны." ⁴

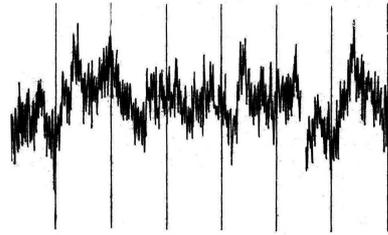


Рис. 5

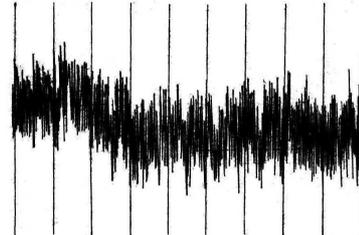


Рис. 6

Выводы

Как видим, ряды SHCS вида (2) являются обобщенным описанием большого множества различных реальных процессов, нуждающихся в моделировании.

Обычно рассматривают суммы счетного или конечного числа случайных слагаемых, опираясь на независимость (некоррелированность) этих слагаемых. Однако очень часто приходится сталкиваться с процессами вида (2), в которых по объективным условиям последовательности случайных величин, образующих данную сумму, являются коррелированными, в том числе и сильно коррелированными. Специфическое представление случайных величин через приращения позволяет исследовать сильно коррелированные суммы, например, модель "флюгера" (6) в [6] и модель динамики стохастической цепи (11) в [7].

Отметим, что рассматриваемый класс (2) можно применять при построении и исследовании моделей эволюции иерархически организованных систем. В рамках представления о "гармонических изменениях когда с индексом под номером "1" отождествляется самый верхний уровень иерар-

⁴В [2] были подвергнуты критике некоторые теоретические аспекты работы [10]. Однако мы используем выводы, полученные на основе экспериментальных данных.

хии, каждому n -му уровню ($n \leq N$) сопоставляется процесс

$$Z_n(t) = \sum_{k=1}^n \left[A_k(t) \cos(\varphi_k(t)) + B_k(t) \sin(\varphi_k(t)) \right],$$

где $\varphi_k(t) = \varphi_o + \sum_{i=1}^k \Delta\varphi_i(t) + \omega_k t$, а приращения $\Delta\varphi_i(t)$ индуцируются более высокими, вплоть до n -го, уровнями [8, стр. 132]. Возможно, это поясняет сложность прогнозирования биржевых показателей, опираясь на классический метод выделения тренда и представления оставшейся части как стационарного случайного процесса.

Авторы выражают благодарность А.В. Карачанскому за помощь в создании иллюстраций.

Список литературы

- [1] Антипенский Р. Разработка моделей случайных сигналов // Компоненты и технологии. 2007. №11. – С. 146–151.
- [2] Бурцев Г.А. Библиография. Магнитные шумы. // Успехи физических наук, 1972. Том 106, Вып. 4. – С. 741–742.
- [3] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 399 с.
- [4] Волькенштейн М.В. Конфигурационная статистика полимерных цепей. – Москва-Ленинград: Изд-во АН СССР, 1959. – 466 с.
- [5] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.
- [6] Дубко В.А., Савенко О.А., Чалых Е.В. Характеристические функции и их применение // Благовещенск: БГПИ. – 1996. 36 с.
- [7] Дубко В.А., Чалых Е.В. Динамика цепи конечных размеров с бесконечным числом звеньев. / Препринт. Владивосток, Хабаровск: Институт прикладной математики ДВО РАН. – 1998. 12 с.
- [8] Дубко В.А., Карачанская (Чалых) Е.В. Моделирование динамики иерархической системы на основе SHCS процессов. // VIII Международная научная конференция "Развитие систем учета, анализа и аудита в Украине: теория, методология, организация 26 марта 2010г. Киев : Изд-во Информационно-аналитическое агенство ДП, 2010. Национальная академия статистики, учета и аудита Госкомстата Украины. – 2010.– 185 с.
- [9] Кахан Ж.-П. Случайные функциональные ряды. – М: Мир, 1973. – 303 с.
- [10] Колачевский Н.Н. Магнитные шумы. – М: Наука, 1971. – 136 с.
- [11] Кук Ч., Бернфельд. Радиолокационные сигналы. Пер. с англ. под ред. В.С.Кельзона. – М: Изд-во "Советское радио 1971. – 568 с.
- [12] Лифшиц И.М., Гросберг А.Ю., Хохлов А.Р. Объемные взаимодействия в статистической физике полимерной макромолекулы. // Успехи физических наук, 1979. Том 127, Вып. 3. – С. 353–389.
- [13] Мачехин Ю.П. Оценка результатов измерений нестабильности частоты лазеров, на основе фрактальных свойств диффузионных процессов. // Системи обробки інформації, 2008. Вып. 4 (71). – С. 139–142.

- [14] Пугачев В.С. Теория случайных функций. – М: Физматгиз., 1960. – 884 с.
- [15] Радиолокационные станции с цифровым синтезированием апертуры антенны / В.Н. Антипов, В.Т. Горяинов, А.Н. Кулин и др.; Под ред. В.Т. Горяинова. – М.: Радио и связь, 1988 – 304 с.: илл.
- [16] Семаков С.Л. Выбросы случайных процессов: приложения в авиации. / С.Л.Семаков. – М.: Наука, 2005. – 200 с.
- [17] Скороход А.В. Стохастические уравнения для сложных систем. М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат. лит., 1983. – 192 с.
- [18] Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации: Учебн.пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1992 – 304 с., ил.
- [19] Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 3-е изд., испр./ А.В.Печинкин, О.И.Тескин, Г.М.Цветкова и др.; под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2004 – 456 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI).
- [20] Труфанов В.А. R-гармонические случайные процессы. Благовещенск: Амурский государственный университет, 2006. – 165 с.
- [21] Турбин А.Ф., Труфанов В.А. Свойства R-гармонических случайных процессов. // Дальневосточный математический сборник, 1997. Вып.4.– С.34–38.
- [22] Феллер В. Теория вероятностей и ее приложения. Т.1 – М.: Мир, 1967. – 498 с.
- [23] Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1981. – 280 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В качестве функции плотности распределения фазы, чтобы случайный процесс (13) был стационарным в широком смысле, можно использовать следующие ($\phi \in [0, 2\pi]$):

Пример 1 . $\rho(\phi) = \frac{|\sin 4\phi|}{4}$ (см. рис. I).

Пример 2 . $\rho(\phi) = \frac{2\phi}{\pi^2} - \frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi k}{2} \leq \phi < \frac{\pi(k+1)}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$
(см. рис. II).

Пример 3 . $\rho(\phi) = \frac{1}{a} \cdot |\sin 4\phi + 0.5 \sin 8\phi|$, где параметр a определяется условием $\int_0^{2\pi} \rho(\phi) d\phi = 1$ (см. рис. III).

Пример 4 . $\rho(\phi) = \frac{1}{a} \cdot |\sin 4\phi + 0.5 \cos 8\phi|$, где параметр a определяется условием $\int_0^{2\pi} \rho(\phi) d\phi = 1$ (см. рис. IV).

Пример 5 . $\rho(\phi) = \frac{1}{a} \cdot |\sin 4\phi + 0.5 \cos(8\phi + 1)|$, где параметр a определяется условием $\int_0^{2\pi} \rho(\phi) d\phi = 1$ (см. рис. V).

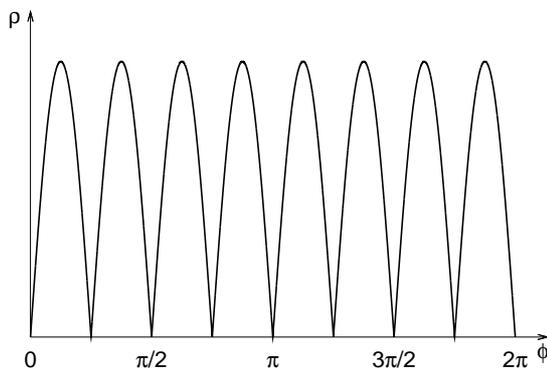


Рис. I

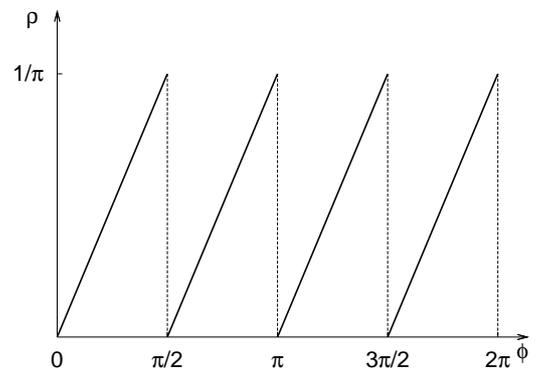


Рис. II

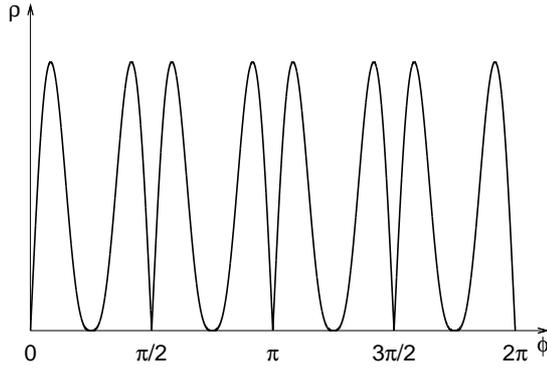


Рис. III

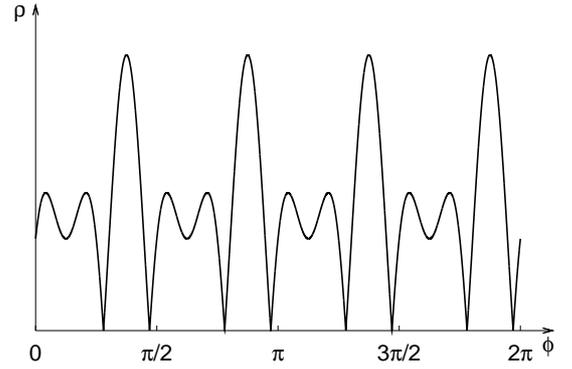


Рис. IV

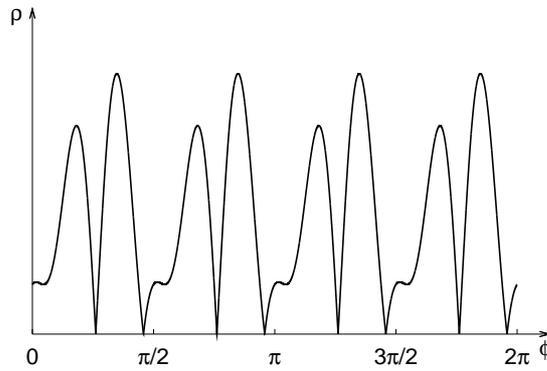


Рис. V

Кроме того, построить класс таких распределений возможно, воспользовавшись следующим утверждением.

Утверждение 1 . Функция $\rho(x) = \sum_{s=1}^k f\left(x + \frac{2\pi}{k} \cdot s\right)$, где

$$f(x) = f(x + 2\pi),$$

является $\frac{2\pi}{k}$ -периодической.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ периода 2π , т. е. $f(x) = f(x + 2\pi)$, – основа для построения периодических функций более мелкого периода. Тогда любую функцию периода $\frac{2\pi}{k}$ можно представить как суперпозицию периодических функций, построенных на основе $f(x)$:

$$\rho\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) = \sum_{s=1}^k f\left(x + \frac{2\pi}{k} \cdot (s + 1)\right) = \sum_{j=2}^{k+1} f\left(x + \frac{2\pi}{k} \cdot j\right) =$$

$$= -f\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) + \sum_{j=1}^k f\left(x + \frac{2\pi}{k} \cdot j\right) + f(x + 2\pi) = \rho(x). \quad \square$$

Пример 6 . Возьмем в качестве основной следующую функцию периода 2π :

$$f(\phi) = \frac{\phi}{4\pi^2}, \quad f(\phi + 2\pi) = f(\phi).$$

Построим функцию $\rho(\phi)$ периода $\frac{\pi}{2}$ следующим образом (т.е. $k = 4$):

$$\rho(\phi) = f\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\phi + \frac{2\pi}{2}\right) + f\left(\phi + \frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\phi + \frac{4\pi}{2}\right).$$

Следовательно, функция $\rho(\phi)$ будет иметь вид (см. рис. VI)

$$\rho(\phi) = \frac{\phi}{2\pi^2} + \frac{3}{8\pi}, \quad \rho\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = \rho(\phi),$$

и действительно может определять плотность распределения, т.к.

$$\int_0^{2\pi} \rho(\phi) d\phi = 1.$$

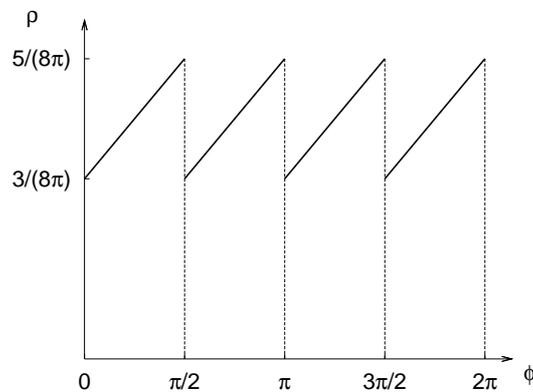


Рис. VI

Оглавление

Введение	3
1 Примеры математических моделей реальных процессов	4
"Флюгер"	4
Фазовая и амплитудная модуляция. Фрактальные свойства излучения лазеров. Магнитные шумы	4
Модель стохастической динамики цепи	5
Модель случайной цепи	6
Стационарные случайные процессы	6
Аддитивная смесь узкополосных случайных процессов	7
2 Сопоставление SHCS-моделей с моделями, построенными на основе гармонических рядов и функций	9
А. Модель "флюгера". (Обобщение модели "флюгера". R -процессы)	9
В. Амплитудная и фазовая модуляция. Магнитные шумы	13
С. Модель стохастической динамики цепи. Динамическая модель случайных блужданий с постоянной скоростью	14
D. Стационарные случайные процессы	19
Выводы	24
Список литературы	26
Приложение	28

Научное издание

**Дубко Валерий Алексеевич
Карачанская Елена Викторовна**

**SHCS-РЯДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ, КЛАССИФИКАЦИИ
И МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ
ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Препринт № 154

Подписано в печать 12.04.10. Формат 60 × 84 ¹/₁₆. Бумага писчая.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 1,86. Тираж 50 экз. Заказ

Отдел оперативной полиграфии издательства
Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.