В. А. Дубко, Е. В. Карачанская

О ДВУХ ПОДХОДАХ К ПОСТРОЕНИЮ ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЫ ИТО-ВЕНТЦЕЛЯ

Хабаровск
2012

Российская академия наук
Дальневосточное отделение
Вычислительный центр

В. А. Дубко, Е. В. Карачанская

О ДВУХ ПОДХОДАХ К ПОСТРОЕНИЮ ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЫ ИТО – ВЕНТЦЕЛЯ

Препринт № 174

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2012

УДК 519.21
ББК В171+В161.6
Д794

Дубко В. А.

Д794 О двух подходах к построению обобщенной формулы Ито-Вентцеля : препринт № 174 / В. А. Дубко, Е. В. Карачанская ; Вычислительный центр ДВО РАН. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2012. – 27 с.

ISBN 978-5-7389-1059-3

Рассмотрено два подхода к построению обобщенной формулы Ито-Вентцеля: первый – при непосредственном привлечении обобщенной формулы Ито, второй – на основе представления о ядрах интегральных инвариантов.

УДК 519.21
ББК В171+В161.6

Утверждено к печати ученым советом Вычислительного центра ДВО РАН от 02.03.2012
Ответственный редактор канд. физ.-мат. наук В. Д. Власенко

ISBN 978-5-7389-1059-3

Оглавление

Предварительные замечания

Пусть $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ решение уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = a(t), \qquad \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0).$$

Пусть функция $F(t;\mathbf{x})$ непрерывна вместе со своими частными производными $F'_t(t;\mathbf{x})$, $F'_{x_i}(t;\mathbf{x})$, $i = \overline{1,n}$. Тогда, опираясь на правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$\frac{dF(t;\mathbf{x}(t))}{dt} = F'_t(t;\mathbf{x}(t)) + a_j(t)F'_{x_j}(t;\mathbf{x}(t)), \qquad F(t;\mathbf{x})|_{t=0} = F(0;\mathbf{x}).$$

Если же $F(t;\mathbf{x})$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial F(t;\mathbf{x})}{\partial t} = g(t;\mathbf{x}), \qquad F(t;\mathbf{x})|_{t=0} = F(0;\mathbf{x}),$$

то переходим к выражению:

$$\frac{dF(t;\mathbf{x}(t))}{dt} = g(t;\mathbf{x}(t)) + a_j(t)F'_{x_j}(t;\mathbf{x}(t)).$$

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{x}(t)$ определяется уравнением

$$d\mathbf{x}(t) = a(t;\mathbf{x})dt + B_k(t;\mathbf{x})dw_k(t), \tag{1}$$

а $F(t;\mathbf{x})$ подчинено уравнению:

$$dF(t;\mathbf{x}) = Q(t;\mathbf{x})dt + D_k(t;\mathbf{x})dw_k(t), \tag{2}$$

где $\mathbf{w}(t)$ – тот же m-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами, как и в уравнении (1).

Относительно случайных функций $a(t;\mathbf{x})$, $B_k(t;\mathbf{x})$, $Q(t;\mathbf{x})$ и $D_k(t;\mathbf{x})$ предполагаем, что они непрерывны и ограниченные вместе со своими первыми и вторыми частными производными по компонентам $\mathbf{x}$, неупреждающие по t относительно приращений винеровского векторного процесса $\mathbf{w}(t)$ и согласованные с потоком σ-алгебр, индуцированным $\mathbf{w}(t)$ на всем интервале $[0,T]$. Этих ограничений достаточно для построения дифференциала от процесса $F(t;\mathbf{x}(t))$ (см. теорему 1):

$$\begin{gathered} d_t F(t;\mathbf{x}(t)) = Q(t;\mathbf{x}(t))dt + D_k(t;\mathbf{x}(t))d\mathrm{w}(t) + \\ + b_{i,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}D_k(t;\mathbf{x}(t))\,dt + \\ + \left(a_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}b_{i,k}\,(t)\,b_{j,k}(t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right)F(t;\mathbf{x}(t))dt + \\ + b_{i,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}F(t;\mathbf{x}(t))dw_k(t), \\ F(t;\mathbf{x}(t))\,|_{t=0} = F(0;y), \quad F(0;y) \in C_0^2. \end{gathered} \tag{3}$$

Соотношение (3) носит название *формулы Ито-Вентцеля* [9].

Замечание 1. *В дальнейшем, как частный случай, формула* (3) *будет получена, когда присутствуют кроме винеровских и пуассоновские возмущения, с использованием обобщенной формулы Ито, а также на основе уравнений для ядер интегральных инвариантов.*

Цель данной работы в построении подобной формулы для случая, когда случайный процесс $\mathbf{x}(t)$ является решением уравнения

$$d\mathbf{x}(t) = a(t)dt + B(t)d\mathbf{w}(t) + \int\limits_{\mathbb{R}(\gamma)} g(t;\gamma)\,\nu(dt;d\gamma),$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{w}(t)$ – m-мерный винеровский процесс; $\nu(dt;d\gamma)$ – нецентрированная мера Пуассона, и, соответственно,

$$dF(t;\mathbf{x}) = Q(t;\mathbf{x})dt + D_k(t;\mathbf{x})dw_k(t) + \int\limits_{\mathbb{R}(\gamma)} G(t;x;\gamma)\nu(dt;d\gamma).$$

Следуя традиции, полученную в дальнейшем формулу, будем называть *обобщенной формулой Ито-Вентцеля.*

Эту формулу получим как «прямым» методом – на основе классической теории стохастических дифференциальных уравнений, так и опираясь на свойства ядер интегральных инвариантов.

Первоначально эта формула была получена именно на основе уравнений для ядер интегральных инвариантов, в связи с поиском сохраняющихся функционалов для открытых систем [3, 8]. В дальнейшем попытки получить эту формулу «прямым» методом предпринимались другими авторами, хотя и для частного случая, но, по нашему мнению, наиболее удачно в работе [11]. Именно последняя работа и стимулировала рассмотрение общего случая получения этой формулы.

Отметим, что в отличии от известных работ других авторов, мы с самого начала будем работать с обобщенными уравнениями для нецентрированных мер. Это потребует несколько более жестких ограничений на класс весовых функций при пуассоновских возмущениях, но делает доказательство более компактным и прозрачным.

Для построения интегралов по центрированной пуассоновской мере достаточно, чтобы с вероятностью единица выполнялось условие [4, с. 254]:

$$\int\limits_{\mathbb{R}(\gamma)} |f(\gamma)|^2 \Pi(d\gamma) < \infty.$$

При работе с нецентрированными мерами добавляется еще условие [4, с. 255]:

$$\int\limits_{\mathbb{R}(\gamma)} |f(\gamma)| \Pi(d\gamma) < \infty$$

Замечание 2. *В дальнейшем, с целью компактности записи, вместо* $\int\limits_{\mathbb{R}(\gamma)}$ *будем пользоваться обозначением* $\int$.

1. Прямой метод получения обобщенной формулы Ито-Вентцеля

Используются следующие обозначения ([4]).

H_n – означает пространство случайных векторов (отображений) $\mathfrak{F}_t$-измеримых при произвольном $t \in [0, T]$ и с вероятностью 1 и таких, что ([4, с. 255]):

$$\int_0^T |\alpha(t)|^n dt < \infty.$$

Если функция $\varphi(t; y) = \varphi(t; y; \omega)$, при произвольных $t \in [0, T]$ и $y \in \mathbb{R}(y)$, измеримая как функция трех аргументов $t; y; \omega$, и

$$\int_0^T \int |\varphi(t; y)|^2 \Pi(dy) dt < \infty$$

то используется обозначение: $\varphi(t; y) \in H_2(\Pi)$ [4, с. 257].

Обобщенным дифференциалом Ито (обобщенным уравнением Ито) называют такое равенство ([4, §6, с. 256]):

$$d\mathbf{x}(t) = a(t)dt + B(t)d\mathbf{w}(t) + \int g(t; \gamma)\nu(dt; d\gamma), \tag{4}$$

где $\mathbf{x}(t)$, $a(t) = \{a_1(t), ..., a_n(t)\}$, $g(t; \gamma) = \{g_1(t; \gamma), ..., g_n(t; \gamma)\} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w}(t)$ – m-мерный винеровский процесс;

$$\begin{gathered} |g(t; \gamma)| \in H_{1,2}(\Pi), \qquad \sqrt{|a_j(t)|},\, |b_{j,k}(t)| \in H_2, \\ B(t) = \{\, b_{j,k}(t); \quad j = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, m}, \} \end{gathered} \tag{5}$$

$\nu(\Delta t; \Delta\gamma)$ - стандартная пуассоновская мера на $\mathbb{R}^{n'} \times [0, T]$, моделирующая независимые случайные величины на интервалах и множествах, которые не пересекаются в пространстве $\gamma \in \mathbb{R}(\gamma) = \mathbb{R}^{n'}$.

Теорема 1. *Пусть $F(t; \mathbf{x})$, $(t; \mathbf{x}) \in [0; T] \times \mathbb{R}^n$ – скалярная функция, дифференциал которой имеет вид:*

$$\partial_t F(t; \mathbf{x}) = Q(t; \mathbf{x})dt + D_k(t; \mathbf{x})dw_k(t) + \int G(t; \mathbf{x}; \gamma)\nu(dt; d\gamma) \tag{6}$$

и для коэффициентов (6) *выполнены условия:* $\mathcal{L}.a$)*:* $Q(t;\mathbf{x})$,$D_k(t;\mathbf{x})$, $G(t;\mathbf{x};\gamma) \in \mathbb{R}$ *в общем случайные функции измеримые относительно того же потока σ-алгебр* $\Big\{\mathcal{F}\Big\}_0^T$, $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$, $t_1 < t_2$,*, что и процессы* $w(t)$, $\nu(t;\mathcal{A})$ *для любого множества* $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}$ *из фиксированной борелевской σ-алгебры* ([4, с. 266])*; и* $\mathcal{L}.b$)*: с вероятностью единица функции* $Q(t;\mathbf{x}), D_k(t;\mathbf{x}), G(t;\mathbf{x};u)$ *непрерывны и ограничены по совокупности переменных вместе со своими вторыми частными производными по компонентам вектора* $\mathbf{x}$*. Тогда, если случайный процесс* $\mathbf{x}(t)$ *подчинен системе* (4) *и выполняются ограничения* (5)*, то существует стохастический дифференциал:*

$$\begin{gathered}
d_tF(t;\mathbf{x}(t)) = Q(t;\mathbf{x}(t))dt + D_k(t;\mathbf{x}(t))dw_k+\\
+b_{i,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}F(t;\mathbf{x}(t))dw_k+\\
+\Big[a_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}F(t;\mathbf{x}(t)) + \frac{1}{2}b_{i,k}(t)b_{j,k}(t)\frac{\partial^2 F(t;\mathbf{x}(t))}{\partial x_i \partial x_j}+\\
+b_{i,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}D_k(t;\mathbf{x}(t))\Big]dt+\\
+\int\Big[(F(t;\mathbf{x}(t)+g(t;\gamma)) - F(t;\mathbf{x}(t))\Big]\nu(dt;d\gamma)+\\
+\int G(t;\mathbf{x}(t)+g(t;\gamma)\nu(dt;d\gamma).
\end{gathered} \tag{7}$$

Выражение (7) – *обобщеннная формулы Ито-Вентцеля* на случай присутствия как винеровских, так и пуассоновских возмущений (для обобщенного СДУ Ито).

Доказательство. Доказательство базируется на определении δ- функции как границы некоторой специальной функции. Пример использования дельта функции для построения интегральных инвариантов был дан в работе [1].

Определяют δ-функцию через асимптотические свойства по разному. Для наших целей достаточно ограничиться рассмотрением случаем такого асимптотического представления [5, с. 48-49]:

$$f(t;x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t;y)\delta(y-x)dy= \\ =\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t;y)\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}\right\}dy. \tag{8}$$

Положим, что для функции $f(t;x)$ выполняется условие Липшица:

$$|f(t;y_1)-f(t;y_2)|\leq L(t)|y_1-y_2|^{\varsigma}, 0<\varsigma\leq 1$$

Поскольку t в доказательствах рассматривается как фиксированное, то для упрощения в записи формул, параметр t будем опускать. Т.е., вместо $f(t;x)$ будем использовать $f(x)$, а вместо $L(t)$ – обозначение L.

Выполним замену переменных

$$(y-x)\varepsilon^{-1}=z,\quad y=\varepsilon z+x.$$

Находим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon z+x)\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz=f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f(\varepsilon z+x)-f(x))\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz$$

Оценим последний интеграл:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f(\varepsilon z+x)-f(x))\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz\right|\leq$$

$$\leq\frac{L}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|(\varepsilon z+x)-x|^{\varsigma}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz\leq$$

$$\leq\varepsilon L\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\int\limits_{0}^{1} z^{\varsigma}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz-\int\limits_{1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}d\left(-\frac{z^2}{2}\right)\right]\leq$$

$$\leq\varepsilon L\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[z^{\varsigma}|_{z=1}+1\right]\leq\varepsilon L\frac{4}{\sqrt{2\pi}}.$$

Так что при $\varepsilon \to 0$, для произвольных функций $f(t;x)$, которые для любых $t \in [0,T]$ ограничены с вероятностью 1 и удовлетворяют условию Липшица по компоненте x, справедливо равенство (8).

При доказательстве теоремы в выражениях под знаками интегралов будут присутствовать производные от δ-функции. Покажем, что и в этом случае справедливы оценки, подобные выполненным выше, на основе соответствующих предельных представлений. Продифференцируем (8), применим интегрирование по частям:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\partial}{\partial x}\delta(y-x)dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\partial}{\partial x}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}\right\}dy =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\partial}{\partial y}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}\right\}dy =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\downarrow 0} f(y)\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}\right\}\Big|_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$+\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}\right\}\frac{\partial}{\partial y}f(y)dy, \quad \varepsilon > 0.$$

При условии, что производная $f'_y(y)$ удовлетворяет условию Липшица, для асимптотического представления производной от $\delta(x)$ доказательство совпадает с предшествующим. Аналогично устанавливается справедливость соотношений, где присутствуют вторые производные $\delta(x)$, и выполнено условие Липшица для второй производной $f''_y(y)$. Обобщая использовавшиеся ограничения видим, что в дальнейшем необходимо потребовать существование и непрерывность $f'_y(y)$ и липшицевость для вторых производных.

Перейдем к доказательству соотношения (7) теоремы, воспользовавшись установленным выше свойствами $\delta(x)$ на классе всех непрерывных и ограниченных с вероятностью единица функций:

$$F(t, \mathbf{x}(t)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} \delta(y_i - x_i(t)) F(t, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}), \tag{9}$$

где $d\Gamma(\mathbf{y})$ – элемент фазового объема [2, 3].

Условия на коэффициенты оказываются достаточными для существования границы сумм, которые аппроксимируют в среднеквадратичном соответствующие интегралы вида (9) при допредельном представлении δ-функций.

Пусть дифференциал для $F(t, \mathbf{y})$ определяется (6), а для $\mathbf{x}(t)$ – уравнением (4). Формально применим обобщенную формулу Ито к подынтегральному выражению (9):

$$\begin{aligned} dF(t, \mathbf{y}) \prod_{i=1}^{n} \delta(y_i - x_i(t)) = F(t, \mathbf{y}) \Bigg[a_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \prod_{i=1}^{n} \delta\left(y_i - x_i(t)\right) + \\ + \frac{1}{2} b_{i,k}(t) b_{j,k}(t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \prod_{i=1}^{n} \delta(y_i - x_i(t)) \Bigg] dt + \\ + b_{i,k}(t) D_k(t; \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \prod_{i=1}^{n} \delta(y_i - x_i(t)) dt + \\ + F(t, y) b_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_i} \prod_{i=1}^{n} \delta(y_i - x_i(t)) dw_k(t) + \\ + \prod_{i=1}^{n} \delta(y_i - x_i(t)) \Big[Q(t; \mathbf{x}) dt + D_k(t; \mathbf{x}) dw_k(t) \Big] + \\ + \int \Big[\prod_{i=1}^{n} \delta(y_i - x_i(t) - g_i(t, \gamma)) (F(t; \mathbf{x}) + G(t; \gamma)) - \\ - \prod_{i=1}^{n} \delta(y_i - x_i(t)) F(t; \mathbf{x}) \Big] \nu(dt, d\gamma). \end{aligned}$$

Перейдем в правой части равенства от частных производных по компонентам вектора $\mathbf{x}$ к частным производных по компонентам вектора $\mathbf{y}$.

Тогда приходим к такому представлению выражения выше:

$$dF(t,\mathbf{y})\prod_{i=1}^{n}\delta(y_i-x_i(t))=F(t,\mathbf{y})\Big[-a_i(t)\frac{\partial}{\partial y_i}\prod_{i=1}^{n}\delta(y_i-x_i(t))+$$

$$+\frac{1}{2}b_{i,k}(t)b_{j,k}(t)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\prod_{i=1}^{n}\delta(y_i-x_i(t))\Big]dt-$$

$$-b_{i,k}(t)D_k(t,\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial y_i}\prod_{i=1}^{n}\delta(y_i-x_i(t))dt-F(t;\mathbf{y})b_{i,k}\frac{\partial}{\partial y_i}\prod_{i=1}^{n}\delta(y_i-x_i(t))dw_k(t)+$$

$$+\prod_{i=1}^{n}\delta(y_i-x_i(t))D_k(t,y)dw_k(t)+\prod_{i=1}^{n}\delta(y_i-x_i(t))Q(t,\mathbf{y})dt+$$

$$+\int\Big[\prod_{i=1}^{n}\delta(y_i-x_i(t)-g(t,\gamma))(F(t,\mathbf{y})+G(t;\gamma))-$$

$$-\prod_{i=1}^{n}\delta(y_i-x_i(t))F(t,\mathbf{y})\Big]\nu(dt,d\gamma).$$

Возвратимся к интегрированию по пространству $\mathbb{R}^n(\mathbf{y})$, с учетом равенства (9). Воспользовавшись операцией интегрирования по частям, с учетом допредельных свойств δ-функций, находим:

$$d_tF(t,\mathbf{x}(t))=\int\limits_{\mathbb{R}(y)}\Big\{\prod_{i=1}^{n}\delta(y_i-x_i(t))\Big[a(t)+b_{i,k}(t)D_k(t,\mathbf{y})F(t,\mathbf{y})+$$

$$+\frac{1}{2}b_{i,k}(t)b_{j,k}(t)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}F(t,y)\Big]dt+b_{i,k}(t)\frac{\partial}{\partial y_i}F(t,\mathbf{y})dw_k(t)+$$

$$+Q(t,\mathbf{y})dt+D_k(t,y)dw_k(t)+$$

$$+\int\Big[\prod_{i=1}^{n}\delta(y_i-x_i(t)-g_i(t,\gamma))(F(t,\mathbf{y})+G(t;\gamma))-$$

$$-\prod_{i=1}^{n}\delta(y_i-x_i(t))F(t,y)\Big]\nu(dt,d\gamma)\Big\}d\Gamma(\mathbf{y})$$

Учитывая правило интегрирования при наличии δ-функций, приходим к равенству (7).

2. Метод получения обобщенной формулы Ито-Вентцеля на основе представления об интегральных инвариантах

Перейдем теперь к получению соотношения (7) на основе представления об интегральных инвариантах и уравнений для них.

Пусть $\mathbf{x}(t)$ – динамический процесс, определенный на $\mathbb{R}^n$, являющийся решением системы стохастических дифференциальных уравнений

$$dx_i(t) = a_i\Big(t;\mathbf{x}(t)\Big)\,dt + \sum_{k=1}^{m} b_{i,k}\Big(t;\mathbf{x}(t)\Big)\,dw_k(t) + \int g_i\Big(t;\mathbf{x}(t);\gamma\Big)\nu(dt;d\gamma),$$
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}\Big(t;\mathbf{x}(0)\Big)\Big|_{t=0} = \mathbf{x}(0), \qquad i=\overline{1,n}, \qquad t\geq 0, \tag{10}$$

где $\mathbf{w}(t)$ – m-мерный винеровский процесс, $\nu(t;\Delta\gamma)$ – однородная по t нецентрированная мера Пуассона.

Относительно коэффициентов $a(t;\mathbf{x})$, $b(t;\mathbf{x})$ и $g(t;\mathbf{x};\gamma)$ будем предполагать, что они ограничены и непрерывны вместе со своими производными $\dfrac{\partial a_i(t;\mathbf{x})}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial b_{i,k}(t;\mathbf{x})}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 b_{i,k}(t;\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_l}$, $\dfrac{\partial g_i(t;\mathbf{x};\gamma)}{\partial x_j}$, $i,j,l=\overline{1,n}$ по совокупности переменных $(t;\mathbf{x};\gamma)$ – ограничения $\mathfrak{L}$).

2.1. Стохастическое ядро стохастического интегрального инварианта

Рассмотрим систему обобщенных стохастических дифференциальных уравнений Ито вида (10). Пусть $\rho(t;\mathbf{x};\omega)$ – случайная функция, измеримая относительно потока σ-алгебр $\Big\{\mathcal{F}\Big\}_0^T$, $\mathcal{F}_{t_1}\subset\mathcal{F}_{t_2}$, $t_1<t_2$, согласованного с процессами $\mathbf{w}(t)$ и $\nu(t;\Delta\gamma)$ (далее параметр ω будем опускать) и относительно любой функции $f(t;\mathbf{x})$ из класса локально ограниченных функций, имеющей ограниченные вторые производные по $\mathbf{x}$ для нее выполнены соотношения:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(t;\mathbf{x})f(t;\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(0;\mathbf{y})f(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))d\Gamma(\mathbf{y}) \tag{11}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(0;\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 1, \tag{12}$$

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \rho(0;\mathbf{x}) = 0, \quad d\Gamma(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} dx_i, \tag{13}$$

где $\mathbf{x}(t;\mathbf{y})$ – решение уравнения (10).

Если $f(t;\mathbf{x}) = 1$, то из условия (11) и (12) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(t;\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(0;\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) = 1, \tag{14}$$

т. е. для случайной функции $\rho(t;\mathbf{x}) = \rho(t;\mathbf{x};\omega)$ существует случайный функционал, сохраняющий постоянное значение:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(t;\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 1, \tag{15}$$

который можно рассматривать как стохастический объем.

Тогда (11) с условиями (12) и (13) можно рассматривать как стохастический интегральный инвариант.

Определение 1. *Неотрицательную функцию $\rho(t;\mathbf{x})$ будем называть стохастическим ядром или стохастической плотностью стохастического интегрального инварианта, если выполняются равенства* (11), (12) *и* (13).

Замечание 3. *Понятие интегрального инварианта для системы обыкновенных дифференциальных уравнений было известно ранее, например, оно рассматривалось В. И. Зубовым в* [6, §8]. *Однако существенное отличие, позволившее в* [2, 3] *рассматривать инвариантность случайного объема на основе ядра интегрального инварианта, состоит в том, что в* (11) *присутствует функциональный множитель. Таким образом, понятие ядра интегрального инварианта для системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно рассматривать как частный случай введенного в* [2, 3], *если взять $f(t;\mathbf{x}) = 1$ и, исключив случайность, заданную винеровскими и пуассоновскими процессами, рассматривать интегрирование по детерминированному объему.*

Определим соотношения, при которых функция $\rho(t;\mathbf{x})$ для произвольной дважды дифференцируемой функции $f(t;\mathbf{x})$ будет ядром интегрального инварианта.

Для случайной функции $f(t;\mathbf{x}(t))$, где $\mathbf{x}(t)$ – решение уравнения (10), запишем обобщенную формулу Ито [4, с. 271-272]:

$$\begin{gathered} d_t f(t;\mathbf{x}(t)) = \Big[\frac{\partial f(t;\mathbf{x}(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t;\mathbf{x}(t))\frac{\partial f(t;\mathbf{x}(t))}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{i\,k}(t;\mathbf{x}(t))b_{j\,k}(t;\mathbf{x}(t))\frac{\partial^2 f(t;\mathbf{x}(t))}{\partial x_i x_j}\Big]dt + \\ + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{i\,k}(t;\mathbf{x}(t))\frac{\partial f(t;\mathbf{x}(t))}{\partial x_i}dw_k(t) + \\ + \int\Big[f\left(t;\mathbf{x}(t)+g(t;\mathbf{x}(t);\gamma)\right) - f(t;\mathbf{x}(t))\Big]\nu(dt;d\gamma). \end{gathered} \tag{16}$$

Замечание 4. *В дальнейшем, на протяжении главы, для упрощения записей, будем иметь в виду, что по индексам, встречающимся дважды, проводится суммирование (без использования знака суммы).*

Продифференцируем по t обе части равенства (11), учитывая, что в левой части $f(t;\mathbf{x})$ – детерминированная функция, а в правой $f(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))$ – случайный процесс. Имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(f(t;\mathbf{x})d_t\rho(t;\mathbf{x}) + \rho(t;\mathbf{x})\frac{\partial f(t;\mathbf{x})}{\partial t}dt\Big)d\Gamma(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(0;\mathbf{y})d_t f(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))d\Gamma(\mathbf{y}).$$

Тогда, в силу (11) и (16), получаем:

$$\begin{gathered} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(f(t;\mathbf{x})d_t\rho(t;\mathbf{x}) + \rho(t;\mathbf{x})\frac{\partial f(t;\mathbf{x})}{\partial t}dt\Big)d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(0;\mathbf{y})d_t f(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))d\Gamma(\mathbf{y}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(t;\mathbf{x})d_t f(t;\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x})\rho(t;\mathbf{x})\cdot\Big[\Big[\frac{\partial f(t;\mathbf{x}(t))}{\partial t} + a_i(t;\mathbf{x})\frac{\partial f(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2}b_{i\,k}(t;\mathbf{x})b_{j\,k}(t;\mathbf{x})\frac{\partial^2 f(t;\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_j}\Big]dt + b_{i\,k}(t;\mathbf{x})\frac{\partial f(t;\mathbf{x})}{\partial x_i}dw_k(t) + \\ + \int\Big[f\left(t;\mathbf{x}+g(t;\mathbf{x};\gamma)\right) - f(t;\mathbf{x})\Big]\nu(dt;d\gamma)\Big]. \end{gathered} \tag{17}$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x})\rho(t;\mathbf{x}) f\left(t;\mathbf{x}+g(t;\mathbf{x};\gamma)\right). \tag{18}$$

Сделаем замену переменных:

$$\mathbf{x}+g(t;\mathbf{x};\gamma)=\mathbf{y}. \tag{19}$$

Замечание 5. *Область интегрирования в* (18) *разбиваем на подобласти, которые не пересекаются, и на которых реализуется однозначное соответствие в* (18) *между* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$. *В дальнейшем используем единое обозначение решения* $\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{y};\gamma)$ *равенства* (19), *относительно* $\mathbf{x}$ *для этих подмножеств.*

Тогда, учитывая переход от $\mathbf{x}$ к $\mathbf{y}$, получаем: $\mathbf{x} = \mathbf{y} - g(t;\mathbf{x};\gamma) = \mathbf{y} - g(t;\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{y};\gamma);\gamma)$. Следовательно, интеграл I примет вид:

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{y})\rho\left(t;\mathbf{y}-g(t;\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{y};\gamma);\gamma)\right)\cdot f(t;\mathbf{y})\cdot D\left(\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{y};\gamma)\right), \tag{20}$$

где $D\left(\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{y};\gamma)\right)$ – якобиан перехода от $\mathbf{x}$ к $\mathbf{y}$.

С учетом (20) и интегрирования по всему пространству $\mathbb{R}^n$, что дает возможность формальной замены обозначения переменной интегрирования, получаем:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x})\rho(t;\mathbf{x})\int\Big[f\left(t;\mathbf{x}+g(t;\mathbf{x};\gamma)\right)-f(t;\mathbf{x})\Big]\nu(dt;d\gamma)= \\ =\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x})\rho(t;\mathbf{x})\int f\left(t;\mathbf{x}+g(t;\mathbf{x};\gamma)\right)\nu(dt;d\gamma)- \\ -\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x})\rho(t;\mathbf{x})\int f(t;\mathbf{x})\nu(dt;d\gamma)=\end{gathered} \tag{21}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \int \Big(\rho \left(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma) \right) \cdot f(t; \mathbf{x}) \cdot$$

$$\cdot D \left(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma) \right) \Big) \nu(dt; d\gamma) -$$

$$- \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) \int f(t; \mathbf{x}) \nu(dt; d\gamma) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) f(t; \mathbf{x}) \int \Big[\rho \left(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma) \right) \cdot$$

$$\cdot D \left(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma) \right) - \rho(t; \mathbf{x}) \Big] \nu(dt; d\gamma)$$

Учитывая (12), вычислим следующие интегралы, используя интегрирование по частям:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i}, \tag{22}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) b_{i\,k}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i}, \tag{23}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) b_{i\,k}(t; \mathbf{x}) b_{j\,k}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial^2 f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{24}$$

Для (22) имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} dx_j \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n-1} dx_j \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i.$$

С учетом (13) вычислим внутренний интеграл с помощью интегрирования по частям:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i =$$

$$= \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) f(t; \mathbf{x}) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t; \mathbf{x}) \frac{\partial \left(\rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \right)}{\partial x_i} dx_i =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t;\mathbf{x}) \frac{\partial\left(\rho(t;\mathbf{x}) a_i(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i} dx_i.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t;\mathbf{x}) a_i(t;\mathbf{x}) \frac{\partial f(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} dx_j \rho(t;\mathbf{x}) a_i(t;\mathbf{x}) \frac{\partial f(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} = \\
= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n-1} dx_j \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(t;\mathbf{x}) a_i(t;\mathbf{x}) \frac{\partial f(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i = \\
= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} dx_j \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t;\mathbf{x}) \frac{\partial\left(\rho(t;\mathbf{x}) a_i(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i} dx_i = \\
= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) f(t;\mathbf{x}) \frac{\partial\left(\rho(t;\mathbf{x}) a_i(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i}.
\end{gathered} \tag{25}$$

Аналогичным образом вычислим второй интеграл (23) и, применяя дважды интегрирование по частям, вычислим третий интеграл (24):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t;\mathbf{x}) b_{i\,k}(t;\mathbf{x}) \frac{\partial f(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) f(t;\mathbf{x}) \frac{\partial \rho(t;\mathbf{x}) b_{i\,k}(t;\mathbf{x})}{\partial x_i}, \tag{26}$$

$$\begin{gathered}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t;\mathbf{x}) b_{i\,k}(t;\mathbf{x}) b_{j\,k}(t;\mathbf{x}) \frac{\partial^2 f(t;\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \\
= \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) f(t;\mathbf{x}) \frac{\partial^2\left(\rho(t;\mathbf{x}) b_{i\,k}(t;\mathbf{x}) b_{j\,k}(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i \partial x_j}.
\end{gathered} \tag{27}$$

В (17) перенесем все в правую часть и с учетом (21), (25), (26) и (27) получим:

$$\begin{gathered}
0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) f(t;\mathbf{x}) \cdot \Bigg[-d_t\left(\rho(t;\mathbf{x})\right) - \frac{\partial f(t;\mathbf{x}(t))}{\partial t} + \\
+ \frac{\partial f(t;\mathbf{x}(t))}{\partial t} - \frac{\partial \rho(t;\mathbf{x}) b_{i\,k}(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} dw_k(t) +
\end{gathered} \tag{28}$$

$$+\Big(-\frac{\partial\left(\rho(t;\mathbf{x})a_i(t;\mathbf{x}(t))\right)}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})b_{j\,k}(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i\partial x_j}\Big)dt+$$

$$+\int\Big[\rho\left(t;\mathbf{x}-g(t;\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma);\gamma)\right)\cdot D\left(\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma)\right)-\rho(t;\mathbf{x})\Big]\nu(dt;d\gamma)\Big].$$

Чтобы равенство (28) имело место для любой локально ограниченной функции $f(t;\mathbf{x})$, имеющей ограниченные производные второго порядка, интегральный инвариант $\rho(t;\mathbf{x})$ должен являться решением стохастического уравнения

$$d_t\rho(t;\mathbf{x})=-\frac{\partial\rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})}{\partial x_i}dw_k(t)+\Big(-\frac{\partial\left(\rho(t;\mathbf{x})a_i(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i}+ \tag{29}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})b_{j\,k}(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i\partial x_j}\Big)dt+$$

$$+\int\Big[\rho\left(t;\mathbf{x}-g(t;\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma);\gamma)\right)\cdot D\left(\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma)\right)-\rho(t;\mathbf{x})\Big]\nu(dt;d\gamma).$$

При этом должны выполняться условия

$$\begin{gathered}\rho(t;\mathbf{x})\Big|_{t=0}=\rho(0;\mathbf{x})\in C_0^2,\\ \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty}\rho(0;\mathbf{x})=0,\qquad \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty}\frac{\partial\rho(0;\mathbf{x})}{\partial x_i}=0.\end{gathered} \tag{30}$$

Таким образом, получены условия инвариантности стохастического объема и доказана следующая

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, *решение системы обобщенных стохастических дифференциальных уравнений Ито*

$$\begin{gathered}dx_i(t)=a_i\Big(t;\mathbf{x}(t)\Big)\,dt+\sum_{k=1}^{m}b_{i,k}\Big(t;\mathbf{x}(t)\Big)\,dw_k(t)+\\ +\int g_i\Big(t;\mathbf{x}(t);\gamma\Big)\nu(dt;d\gamma),\\ \mathbf{x}(t)=\mathbf{x}\Big(t;\mathbf{x}(0)\Big)\Big|_{t=0}=\mathbf{x}(0),\qquad i=\overline{1,n},\qquad t\geq 0,\end{gathered}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию $\mathfrak{L}$); $\mathbf{w}(t)$ – m*-мерный винеровский процесс,* $\nu(t;\Delta\gamma)$ – *однородная по* t *нецентрированная мера Пуассона и* $\rho(t;\mathbf{x})$ – *случайная функция, измеримая относительно* *потока σ-алгебр* $\left\{\mathcal{F}\right\}_0^T$, $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$, $t_1 < t_2$, *согласованного с процессами* $\mathbf{w}(t)$ *и* $\nu(t;\Delta\gamma)$ *и относительно любой функции* $f(t;\mathbf{x})$ *из класса* $\mathfrak{S}$ *локально ограниченных функций, имеющих ограниченные вторые производные по* $\mathbf{x}$. *Функция* $\rho(t;\mathbf{x})$ *является стохастическом ядром стохастического интегрального инварианта* (11) *для произвольной локально ограниченной функции* $f(t;\mathbf{x}) \in \mathfrak{S}$, *если она является решением системы* (29) *обобщенных СДУ Ито, удовлетворяющим начальным условиям* (30).

2.2. Обобщенная формула Ито-Вентцеля

Равенство (11) с условиями (12), (13) и уравнение (29) для ядра интегрального инварианта соответствовали случаю детерминированной функции $f(t;\mathbf{x})$. Положим выполнение аналогичного равенства для случайной функции $F(t;\mathbf{x})$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(t;\mathbf{x})F(t;\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(0;\mathbf{y})F(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))d\Gamma(\mathbf{y}), \tag{31}$$

где $\mathbf{x}(t;\mathbf{y})$ – решение системы СДУ (10).

Рассмотрим сложный случайный процесс $F\left(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})\right) \in \mathbb{R}^{n_o}$, где $\mathbf{x}(t;\mathbf{y})$ – решение системы СДУ (10), а процесс $F(t;\mathbf{x})$ – решение системы обобщенных СДУ Ито:

$$d_tF(t;\mathbf{x}) = Q(t;\mathbf{x})dt + D_k(t;\mathbf{x})dw_k(t) + \int \nu(dt;d\gamma)G(t;\mathbf{x};\gamma). \tag{32}$$

Относительно случайных функций $Q(t;\mathbf{x})$, $D_k(t;\mathbf{x})$, $G(t;\mathbf{x};\gamma)$, определенных на пространстве $\mathbb{R}^{n_o}$, предполагаем, что они непрерывны и ограничены вместе со своими производными по всем переменным, измеримые относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, согласованного с процессами $\mathbf{w}(t)$ и $\nu(t;\Delta\gamma)$ из (10).

Опираясь на уравнение для стохастического интегрального инварианта, построим правило дифференцирования для сложного случайного процесса $F\left(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})\right)$ [8].

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(t;\mathbf{x})F(t;\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x})$. Поскольку интегрирование проводится по пространству $\mathbb{R}^n$, на котором задан процесс $\mathbf{x}(t)$, используем равенство (31), записав его в виде (поменяв части равенства местами):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(0;\mathbf{y})F(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))d\Gamma(\mathbf{y}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(t;\mathbf{x})F(t;\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}). \tag{33}$$

Продифференцируем обе части (33) по t:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(0;\mathbf{y})d_tF(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))d\Gamma(\mathbf{y}) =$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\rho(t;\mathbf{x})d_tF(t;\mathbf{x}) + F(t;\mathbf{x})d_t\rho(t;\mathbf{x}) - D_k(t;\mathbf{x})\frac{\partial \rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})}{\partial x_i}dt\Big)d\Gamma(\mathbf{x}), \tag{34}$$

Учитывая, что интегрирование идет по пространству $\mathbb{R}^n$ после введения замены переменной, то при интегрировании по кривой $\mathbb{R}(\gamma)$ в этом пространстве нужно учитывать произведенную замену (19).

Поскольку функция $\rho(t;\mathbf{x})$ – ядро интегрального инварианта (31), применим теорему 2. Подставим (29) и (32) в правую часть (34):

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\rho(t;\mathbf{x})d_tF(t;\mathbf{x}) + F(t;\mathbf{x})d_t\rho(t;\mathbf{x}) - D_k(t;\mathbf{x})\frac{\partial \rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})}{\partial x_i}dt\Big)d\Gamma(\mathbf{x}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x})\Big\{\rho(t;\mathbf{x})\Big[Q(t;\mathbf{x})dt + D_k(t;\mathbf{x})dw_k(t) +$$
$$+ \int G(t;\mathbf{x}+g(t;\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma);\gamma)\nu(dt;d\gamma)\Big] +$$
$$+F(t;\mathbf{x})\Big[-\frac{\partial \rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})}{\partial x_i}dw_k(t) +$$
$$+\Big(-\frac{\partial\left(\rho(t;\mathbf{x})a_i(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})b_{j\,k}(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i \partial x_j}\Big)dt +$$
$$+\int\Big[\rho\left(t;\mathbf{x}-g(t;\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma);\gamma)\right)\cdot D\left(\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma)\right) - \rho(t;\mathbf{x})\Big]\nu(dt;d\gamma)\Big] -$$

$$-D_k(t;\mathbf{x})\frac{\partial\rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})}{\partial x_i}dt\Bigg\}.$$

Приведем подобные:

$$I_1=\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(\mathbf{x})\Bigg(\rho(t;\mathbf{x})Q(t;\mathbf{x})-F(t;\mathbf{x})\frac{\partial\left(\rho(t;\mathbf{x})a_i(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i}+$$
$$-D_k(t;\mathbf{x})\frac{\partial\rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})}{\partial x_i}+\frac{1}{2}F(t;\mathbf{x})\frac{\partial^2\left(\rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})b_{j\,k}(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i\partial x_j}\Bigg)dt+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(\mathbf{x})\Bigg(\rho(t;\mathbf{x})D_k(t;\mathbf{x})-F(t;\mathbf{x})\frac{\partial\left(\rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i}\Bigg)dw_k(t)+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(\mathbf{x})\Bigg[\rho(t;\mathbf{x})\cdot\int G(t;\mathbf{x}+g(t;\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma);\gamma))\nu(dt;d\gamma)+$$
$$+F(t;\mathbf{x})\int\Big[\rho\left(t;\mathbf{x}-g(t;\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma);\gamma)\right)\cdot D\left(\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma)\right)-\rho(t;\mathbf{x})\Big]\nu(dt;d\gamma)\Bigg]. \tag{35}$$

В силу (25), (26), (27) имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(\mathbf{x})F(t;\mathbf{x})\frac{\partial\left(\rho(t;\mathbf{x})a_i(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i}=-\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(\mathbf{x})\rho(t;\mathbf{x})a_i(t;\mathbf{x})\frac{\partial F(t;\mathbf{x})}{\partial x_i},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(\mathbf{x})D_k(t;\mathbf{x})\frac{\partial\left(\rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i}=-\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(\mathbf{x})\rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})\frac{\partial D_k(t;\mathbf{x})}{\partial x_i},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(\mathbf{x})F(t;\mathbf{x})\frac{\partial^2\left(\rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})b_{j\,k}(t;\mathbf{x})\right)}{\partial x_i\partial x_j}=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(\mathbf{x})\rho(t;\mathbf{x})b_{i\,k}(t;\mathbf{x})b_{j\,k}(t;\mathbf{x})\frac{\partial^2F(t;\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Вычислим последний интеграл в сумме (35):

$$I_2=\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(\mathbf{x})F(t;\mathbf{x})\cdot\rho\Big(t;\mathbf{x}-g(t;\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma);\gamma)\Big)D(\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma)). \tag{36}$$

Введем замену переменных:

$$\mathbf{x}-g(t;\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma);\gamma)=\mathbf{y},$$
$$\mathbf{x}=\mathbf{y}+g(t;\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma);\gamma)=\mathbf{y}+g(t;\mathbf{y};\gamma).$$

Обозначим якобиан перехода от вектора $\mathbf{x}$ к вектору $\mathbf{y}$ через $D_o(\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{y};\gamma))$. Тогда, в силу (18) и дальнейшей формальной замены обозначения переменной интегрирования, получаем:

$$\begin{aligned} I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{y}) F\Big(t; \mathbf{y} + g(t;\mathbf{y};\gamma)\Big) \cdot \rho(t;\mathbf{y}) D_o(\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{y};\gamma)) D(\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma)) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{y}) F\Big(t; \mathbf{y} + g(t;\mathbf{y};\gamma)\Big)\rho(t;\mathbf{y}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) F\Big(t; \mathbf{x} + g(t;\mathbf{x};\gamma)\Big)\rho(t;\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{37}$$

В результате, правая часть (34) примет вид:

$$\begin{aligned} I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x})\rho(t;\mathbf{x}) \Bigg\{ \Big(D_k(t;\mathbf{x}) + b_{i\,k}(t;\mathbf{x}) \frac{\partial F(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big) dw_k(t) + \\ + \Big(Q(t;\mathbf{x}) + a_i(t;\mathbf{x}) \frac{\partial F(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} + b_{i\,k}(t;\mathbf{x}) \frac{\partial D_k(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2} b_{i\,k}(t;\mathbf{x}) b_{j\,k}(t;\mathbf{x}) \frac{\partial^2 F(t;\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \Big) dt + \\ + \int G(t; \mathbf{x} + g(t;\mathbf{x}^{-1}(t;\mathbf{x};\gamma);\gamma)\nu(dt;d\gamma) + \\ + \int \Big[F\Big(t; \mathbf{x} + g(t;\mathbf{x};\gamma)\Big) - F(t;\mathbf{x}) \Big] \nu(dt;d\gamma) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{38}$$

В (34) перенесем все в правую часть и с учетом (11) получаем:

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{y})\rho(0;\mathbf{y}) \Bigg\{ -d_t F(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) + \\ + \Big(D_k(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) + b_{i\,k}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) \frac{\partial F(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big) dw_k(t) + \\ + \Big(Q(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) + a_i(t;\mathbf{x}) \frac{\partial F(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} + b_{i\,k}(t;\mathbf{x}) \frac{\partial D_k(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2} b_{i\,k}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) b_{j\,k}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) \frac{\partial^2 F(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))}{\partial x_i \partial x_j} \Big) dt + \\ + \int G(t; \mathbf{x}(t;\mathbf{y}) + g(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y});\gamma)\nu(dt;d\gamma) + \\ + \int \Big[F\Big(t; \mathbf{x}(t;\mathbf{y}) + g(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y});\gamma)\Big) - F(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) \Big] \nu(dt;d\gamma) \Bigg\}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем обобщенную формулу Ито-Вентцеля – формулу (7) для нецентрированной пуассоновской меры:

$$
\begin{aligned}
d_tF(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) = \Big(D_k(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) + b_{i\,k}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))\frac{\partial F(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))}{\partial x_i}\Big)dw_k(t)+ \\
+\Big(Q(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) + a_i(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))\frac{\partial F(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))}{\partial x_i}+ \\
+b_{i\,k}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))\frac{\partial D_k(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))}{\partial x_i}+ \\
+\frac{1}{2}b_{i\,k}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))b_{j\,k}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))\frac{\partial^2 F(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))}{\partial x_i \partial x_j}\Big)dt+ \\
+\int G(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}) + g(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y});\gamma)\nu(dt;d\gamma)+ \\
+\int\Big[F\Big(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}) + g(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y});\gamma)\Big) - F(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))\Big]\nu(dt;d\gamma).
\end{aligned}
$$

Представленное B. Oksendal и T. Zhang в [11] (2007) обобщения формулы Ито-Вентцеля произведено для уравнения, содержащего только пуасссоновскую составляющую (без винеровской) и только для скалярного случайного процесса, поэтому его можно рассматривать как частный случай полученной формулы (7).

Замечание 6. *В* [3, с. 24] *было введено понятие стохастического первого интеграла для центрированной пуассоновской меры и полученные условия для его существования учитывают необходимость задания плотности интенсивности пуассоновского распределения в отличие от предложенного в данной работе. Таким образом, безразлично, каков вероятностный закон имеют интенсивности пуассоновских скачков. Это обстоятельство является очень важным для дальнейших применений, в частности, для построения программных управлений* [7].

Предложенное обобщение формулы Ито-Вентцеля и понятия стохастического первого интеграла [3] позволяет, как отмечено в [10], строить программные управления стохастических динамических систем, подверженных случайным возмущениям, вызванным винеровскими возмущениями и пуассоновскими скачками [7].

Библиографический список

1. Дубко В. А. Интегральные инварианты для одного класса систем стохастических дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР, Сер. А, №1, 1984. – С. 18–21.

2. Дубко В. А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. – Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1989. — 185 с.

3. Дубко В. А. Открытые эволюционирующие системы.// «Відкриті еволюціонуючі системи», міжнар. наук.-практ. конф. (2002, Київ) Перша міжнародна науково-практична конференція «Відкриті еволюціонуючі системи», (26-27 квіт. 2002 р.) (Додаток). К., ВНЗ ВМУРоЛ, 2002. — С. 14-31.

4. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М. : Наука, 1965. – 654 с.

5. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. - М.: Добросвет, 2000. - 412 с.

6. Зубов В. И. Динамика управляемых систем: Учебное пособие для вузов. М. : Высшая школа, 1982. – 285 с.

7. Карачанская Е. В. Построение программных управлений с вероятностью 1 для динамической системы с пуассоновскими возмущениями. // Вестник Тихоокеанского госуниверситета, No 2 (21) 2011. – С. 51–60.

8. Карачанская Е.В. Об одном обобщении формулы Ито-Вентцеля. // Обозрение прикладной и промышленной математики, т.18, вып. 2, 2011. – С. 494–496

9. Розовский Б.Л. О формуле Ито-Вентцеля. // Вестник МГУ. Сер. матем. механ. – 1973. – № 1. – С. 26–32.

10. Чалых Е.В. Программное управление с вероятностью 1 для открытых систем. // Обозрение прикладной и промышленной математики, т.14, вып. 2, 2007. – С. 253-254.

11. Oksendal, B. and Zhang, T. The Ito-Ventcel formula and forward stochastic differential equation driven by Poisson random measures. // Osaka J. Math. 44 (2007), pp. 207–230.

Научное издание

Дубко Валерий Алексеевич

Карачанская Елена Викторовна

О ДВУХ ПОДХОДАХ К ПОСТРОЕНИЮ ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЫ ИТО – ВЕНТЦЕЛЯ

Препринт № 174

Подписано в печать 12.04.12. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Бумага писчая.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 1,62. Тираж 50 экз. Заказ 91.

Отдел оперативной полиграфии издательства
Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.