Е. В. Карачанская, В. А. Дубко

ПРИМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Хабаровск 2010

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тихоокеанский государственный университет»

Е. В. Карачанская, В. А. Дубко

ПРИМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Утверждено издательско-библиотечным советом университета
в качестве учебного пособия

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2010

УДК 519.21
ББК В171.5
К126

Рецензенты: кафедра «Высшая математика» (Дальневосточный государственный университет путей сообщения); доктор физико-математических наук Е. Н. Ломакина (Хабаровская государственная академия экономики и права)

Карачанская Е. В.
К126 Применение характеристических функций в теории вероятностей и теории случайных процессов : учеб. пособие / Е. В. Карачанская, В. А. Дубко. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2010. – 67 с.

ISBN 978-5-7389-0932-0

В пособии изложены свойства характеристических функций. Приведены примеры применения характеристических функций для доказательства предельных теорем в теории вероятностей, получения числовых характеристик и исследования свойств случайных величин и их сумм. В теории случайных процессов применение метода характеристических функций привело к решению задачи вращательной диффузии на сфере с пуассоновскими скачками, обосновало существование притягивающих многообразий (аттракторов). Изложены необходимые теоретические сведения о случайных величинах с наиболее распространенными законами распределения и о винеровских и пуассоновских случайных процессах.

Для студентов физико-математических специальностей при изучении курса «Открытые динамические системы», аспирантов и исследователей, применяющих теорию случайных процессов для построения математических моделей.

УДК 519.21
ББК В171.5

ISBN 978-5-7389-0932-0

Введение

Аппарат, по существу равнозначный методу характеристической функции, был использован П. Лапласом (1812 г.), но вся сила метода характеристических функций была раскрыта А. М. Ляпуновым (1901 г.). Обобщая исследования П. Л. Чебышева и А. А. Маркова, Ляпунов доказал теорему, называемую теперь центральной предельной теоремой, опираясь на метод характеристических функций

Мы продемонстрируем удобство и эффективность применения математического аппарата характеристических функций как к известным, так и новым задачам теории случайных процессов. В первой части работы поданы основные теоретические сведения из теории вероятностей и теории случайных процессов, необходимых в дальнейшем. Во второй части рассмотрены различные задачи, для решения которых применяется метод характеристических функций.

Использование результатов новых научных исследований при обучении позволяет увидеть перспективы развития теории и ее применения. В рамках этого взгляда на процесс обучения, во второй части изложен материал, ранее не использовавшийся в учебном процессе, связанный с авторскими исследованиями. К таким результатам относятся диффузия на сфере, вращательная диффузия; специальные суммы сильно коррелированных случайных величин; случайные суммы случайного числа слагаемых. Дополнительное применение специальных функций и формулы Ито позволяет рассмотреть одно из актуальных направлений теории стохастических систем – теорию инвариантов. Кроме того, вторая часть демонстрирует прикладное значение метода характеристических функций Он включает авторские исследования и разработки. Рассматриваются задачи моделирования диффузии на сфере, вращательной диффузии; изучение процессов, являющихся решением стохастических дифференциальных уравнений; описания специальных сумм сильно коррелированных случайных величин; случайные суммы случайного числа слагаемых. Отметим, что привлечение уравнений Ито позволяет ознакомиться и с одним из актуальных направлений теории стохастических систем – теорией инвариантов.

В приложениях приведены в компактной форме сведения, напрямую не связанные с методом характеристических функций, но используемые по тексту, особенно во второй части. Это позволяет на первом этапе изучения материала не обращаться к специальным учебникам и литературе.

Текст сопровождается задачами для самостоятельной работы, относящимися к исследовательским. Их включение должно позволить глубже осмыслить материал, стимулировать самостоятельность по применению метода характеристических функций, поиску и постановке новых задач.

Нумерация различных математических утверждений, примеров, формул и задач – сквозная по всему тексту.

1. Характеристические функции. Основные определения и свойства

Моделирование реальных процессов опирается на случайные величины и случайные функции. Поскольку природа или явление не могут сказать, какой вероятностный закон нужен для его моделирования, приходится опираться на какие-либо известные характеристики этого процесса.

Чтобы закон, примененный для моделирования, был наиболее адекватен реальному, необходимо как можно более точно сопоставить характеристики модельного и моделируемого процессов.

1.1. Случайные величины

Случайной величиной (СВ) называется любая количественная характеристика, получаемая в стохастическом эксперименте.

Приведем математическое определение случайной величины. Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ – произвольное вероятностное пространство, где Ω – пространство элементарных событий; $\mathcal{B}$ – σ - алгебра событий; P – вероятность.

Определение 1. *Случайной величиной X назовем действительную функцию, определенную на пространстве элементарных исходов случайного эксперимента*

$$X = X(\omega) \quad \omega \in \Omega, \qquad X(\omega) \in \mathcal{B}.$$

Определение 2. *Случайная величина X, множество значений которой конечно или счетно, называется дискретной; если X может при-*

нимать любое значение из некоторого промежутка с конечным числом «выколотых» точек, то она называется непрерывной.

О п р е д е л е н и е 3. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, принимающей значения из множества $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{+\infty}$ называется число, обозначаемое $\mathbf{M}[X]$ и определяемое по формуле*

$$\mathbf{M}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X = x_k).$$

Для непрерывной случайной величины X (абсолютно непрерывной) [13, с. 20], *имеющей плотность распределения $f(x)$ $\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1\Big)$, математическое ожидание определяется по формуле*

$$\mathbf{M}[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

В частном случае, если непрерывная СВ X принимает значения из промежутка (a, b), то $\Big(\int\limits_a^b f(x)dx = 1\Big)$ и $\mathbf{M}[X] = \int\limits_a^b xf(x)dx.$

Математическое ожидание случайной величины X характеризует ее среднее значение: для непрерывной равно среднему значению, для дискретной – равно среднему арифметическому ее значений.

Наряду с вещественными случайными величинами X можно рассматривать и комплекснозначные случайные величины, понимая под этим функцию вида $X_1 + iX_2$, (X_1, X_2) – случайный вектор, $i^2 = -1$.

Для математического ожидания от комплекснозначной (в общем случае) величины легко проверяются следующие свойства:

1) если C – постоянная, то $\mathbf{M}[C] = C$;

2) если C – постоянная, то $\mathbf{M}[CX] = C\mathbf{M}[X]$;

3) для любых величин $\Big|\mathbf{M}[X]\Big| \le \mathbf{M}\Big[|X|\Big]$;

4) если для случайных величин X_1 и X_2 существуют математических ожидания, то существует и математическое ожидание суммы:

$$\mathbf{M}\,[X_1 + iX_2] = \mathbf{M}[X_1] + i\mathbf{M}[X_2].$$

В случае, когда случайная величина X дискретна, т. е. принимает счетное число значений, плотность вероятности можно представить в виде обобщенной плотности

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = x_k)\delta(x - x_k), \tag{1}$$

где $\Big\{x_k\Big\}_{k=0}^{\infty}$ – множество значений, принимаемых случайной величиной, а $P(x_i)$ – соответствующие вероятности: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(x_k) = 1$, $\delta(x)$ – дельта–функция (δ–функция) (прил. 1). Тогда математическое ожидание дискретной СВ X можно представить в виде

$$\mathbf{M}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\widetilde{f}(x)dx\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k)\delta(x - x_k)dx. \tag{2}$$

Для более полной характеристики СВ X рассматривается еще одна ее числовая характеристика – дисперсия.

Определение 4. *Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от его среднего значения:*

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{M}\Big[(X - \mathbf{M}[X])^2\Big] = \mathbf{M}[X^2] - \Big(\mathbf{M}[X]\Big)^2.$$

Дисперсия характеризует средний квадрат разброса значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Дисперсия СВ является числом неотрицательным: $\mathbf{D}[X] \geq 0$. Более подробно со свойствами дисперсии можно познакомиться, например, в [5, гл. 5].

Кроме этих числовых характеристик для случайной величины рассматривают начальные $\alpha_s[X]$, центральные $\mu_s[X]$ и абсолютные $\beta_s\Big[|X|\Big]$, $\nu_s\Big[|X|\Big]$ моменты s-го порядка $(s \geq 0)$ [5, гл. 5]:

$$\alpha_s[X] = \mathbf{M}[X^s]$$
$$\mu_s[X] = \mathbf{M}\Big[(X - \mathbf{M}[X])^s\Big]$$
$$\beta_s\Big[|X|\Big] = \mathbf{M}\Big[|X|^s\Big]$$
$$\nu_s\Big[|X|\Big] = \mathbf{M}\Big[\Big|X - \mathbf{M}[X]\Big|^s\Big].$$

Следовательно, математическое ожидание и дисперсия случайной величины являются моментными характеристиками случайной величины:

$$\mathbf{M}[X] = \alpha_1[X], \qquad \mathbf{D}[X] = \alpha_2[X] - (\alpha_1[X])^2.$$

Чем больше моментов различного порядка известны для случайной величины, тем точнее мы можем смоделировать эту случайную величину, определить ее закон распределения.

1.2. Определение характеристической функции

Определение 5. *Под характеристической функцией (х. ф.) скалярной случайной величины X ($X \in \mathbb{R}^1$) будем понимать функцию*

$$g_X(\lambda) = \mathbf{M}\Big[\exp\{i\lambda X\}\Big], \tag{3}$$

где $i = \sqrt{-1}$, λ – параметр, $-\infty < \lambda < +\infty$.

Если случайная величина X непрерывна и обладает плотностью распределения $f(x)$, то соотношение (3), в силу определения математического ожидания, допускает представление

$$g_X(\lambda) = \mathbf{M}\Big[\exp\{i\lambda X\}\Big] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i\lambda x\} f(x) dx.$$

Таким образом, характеристическая функция $g_X(\lambda)$ – есть преобразование Фурье функции $f(x)$ (прил. 2). Обратное преобразование Фурье позволяет определить плотность распределения $f(x)$ случайной величины по известной характеристической функции $g_X(\lambda)$ ([12, с. 40] или [9, с. 81–82]):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-i\lambda x\} g_X(\lambda) d\lambda. \tag{4}$$

Если случайная величина дискретна, то с учетом (1), (2) и свойств интеграла, можем представить характеристическую функцию $g_X(\lambda)$ в виде

$$g_X(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P(X = x_k)\delta(x - x_k) \exp\{i\lambda x\} dx = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = x_k) \exp\{i\lambda x\}.$$

Следовательно, характеристическая функция случайной величины является ее полной вероятностной характеристикой. Зная характеристическую функцию случайной величины, можно найти ее плотность вероятности, а следовательно, и функцию распределения.

***Пример* 1.** *Определить характеристическую функцию для случайной величины, равномерно распределенной на промежутке* $[-a; a]$.

Решение. Для данной случайной величины функция плотности распределения имеет вид: $f(x) = \dfrac{1}{2a}$ при $|x| \le a$, $f(x) = 0$ при $|x| > a$. Характеристическая функция будет определяться следующим образом:

$$\begin{gathered} g_X(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx = \frac{1}{2a} \int\limits_{-a}^{a} e^{i\lambda x} dx = \\ = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{i\lambda} \left(\exp\{i\lambda a\} - \exp\{-i\lambda a\}\right) = \\ = \frac{1}{\lambda a} \cdot \frac{\exp\{i\lambda a\} - \exp\{-i\lambda a\}}{2i} = \frac{\sin \lambda a}{\lambda a} \end{gathered} \tag{5}$$

Определение 6. *Характеристической функцией случайного вектора* $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $X_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{1, n})$ *называется математическое* *ожидание от случайной величины* $Z = \exp\left\{i\left(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n\right)\right\}$, *т. е.*

$$g_{\overrightarrow{X}}\left(\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n\right) = \mathbf{M}\left[\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_k\right\}\right].$$

Пользуясь определением математического ожидания, получим следующее выражение для характеристической функции n-мерного случайного вектора $\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_n)$:

$$g_{\overrightarrow{X}}\left(\lambda_1; \ldots; \lambda_n\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right\} f(x_1; \ldots; x_n) dx_1 \ldots dx_n. \qquad (6)$$

Если известна характеристическая функция $g_{\overrightarrow{X}}\left(\lambda_1; \ldots; \lambda_n\right)$ случайного вектора $\overrightarrow{X}$, то плотность распределения вероятностей этого вектора будет определяться следующим образом [11, с. 131]:

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-i\sum_{s=1}^{n}\lambda_s x_s\right\} g_{\overrightarrow{X}}\left(\lambda_1; \ldots; \lambda_n\right) d\lambda_1 \cdots d\lambda_n.$$

Пример 2. [11, с. 133] *Найти закон распределения суммы двух независимых равномерно распределенных случайных величин, имеющих равные нулю математические ожидания.*

Решение. В данном случае имеем одну скалярную случайную величину Y, представляющую собой сумму составляющих двумерного случайного вектора X: $Y = X_1 + X_2$. Плотности вероятности случайных величин X_1 и X_2 определяются соответственно формулами

$$h_1(x_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & |x_1| \leq a, \\ 0, & |x_1| > a, \end{cases}, \quad h_2(x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2b}, & |x_2| \leq b, \\ 0, & |x_2| > b. \end{cases}$$

В силу независимости плотность совместного распределения вероятностей случайных величин X_1 и X_2 равна произведению их плотностей распределения. Пользуясь формулой (6) и результатом примера 1, находим характеристическую функцию случайной величины Y:

$$g_Y(\lambda) = \frac{1}{4ab}\int\limits_{-a}^{a} dx_1 \int\limits_{-b}^{b} e^{i\lambda(x_1+x_2)}dx_2 =$$

$$= \frac{1}{4ab}\int\limits_{-a}^{a} e^{i\lambda x_1}dx_1 \int\limits_{-b}^{b} e^{i\lambda x_2}dx_2 = \frac{\sin\lambda a\cdot\sin\lambda b}{ab\lambda^2}$$

После этого находим по формуле (4) плотность вероятности случайной величины Y, используя формулу Эйлера:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda y}g_Y(\lambda)d\lambda = \frac{1}{4\pi ab}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda y}\frac{\sin\lambda a\cdot\sin\lambda b}{\lambda^2}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi ab}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\lambda y\cdot\sin\lambda a\cdot\sin\lambda b}{\lambda^2}d\lambda - \frac{i}{4\pi ab}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda y\cdot\sin\lambda a\cdot\sin\lambda b}{\lambda^2}d\lambda.$$

Но последний интеграл равен нулю как интеграл в симметричных пределах от нечетной функции. Первый же интеграл как интеграл в симметричных пределах от четной функции равен удвоенному интегралу в пределах от 0 до ∞. Следовательно,

$$f(y) = \frac{1}{\pi ab}\int\limits_{o}^{\infty}\frac{\cos\lambda y\cdot\sin\lambda a\cdot\sin\lambda b}{\lambda^2}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi ab}\int\limits_{o}^{\infty}\Big[\cos(a-b+y)\lambda +$$

$$+\cos(a-b-y)\lambda - \cos(a+b+y)\lambda - \cos(a+b-y)\lambda\Big]\frac{d\lambda}{\lambda^2} \quad .$$

Отсюда, пользуясь формулой $\displaystyle\int\limits_{o}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha\lambda}{\lambda^2}d\lambda = \frac{\pi}{2}|\alpha|$, находим

$$f(y) = \frac{1}{8ab}\Big(|a+b+y| + |a+b-y| - |a-b+y| - |a-b-y|\Big).$$

1.3. Свойства характеристической функции

***Свойство* 1.** Функция $g_X(\lambda)$ определена при любом $\lambda \in (-\infty, +\infty)$.

***Свойство* 2.** Для характеристической функции справедливо

$$g_X(0) = 1, \quad \Big|g_X(\lambda)\Big| \le 1.$$

Доказательство. Учитывая тригонометрическое представление выражения $e^{i\,\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$, при любых вещественных λ и x выполняется условие $\Big|e^{i\,\lambda x}\Big| = 1$. Тогда с учетом свойства 3 математического ожидания имеем

$$\Big|g_X(\lambda)\Big| = \Big|\mathbf{M}\left[e^{i\,\lambda X}\right]\Big| \le \mathbf{M}\Big|e^{i\,\lambda X}\Big| \le 1.$$

***Свойство* 3.** (равномерная непрерывность) Характеристическая функция $g_X(\lambda)$ равномерно непрерывна, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при выполнении условия $|\lambda_2 - \lambda_1| < \delta$ следует выполнение неравенства $|g_X(\lambda_2) - g_X(\lambda_1)| < \varepsilon$ для любых $\lambda_1, \ \ \lambda_2$ из множества определения функции.

Доказательство. Рассмотрим выражение $|g_X(\lambda_2) - g_X(\lambda_1)|$, когда $\lambda_1 < \lambda_2$. Обозначим $(\lambda_1 - \lambda_2) = h$, $|h| < \delta$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 + h$. Воспользовавшись определением характеристической функции и равенством $\Big|e^{i\,\lambda x}\Big| = 1$, получаем

$$\begin{gathered}\Big|g_X(\lambda_2) - g_X(\lambda_1 + h)\Big| = \Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda_2 x} - e^{i(\lambda_2+h)x}) f(x)dx\Big| = \\ = \Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_2 x}(1 - e^{i\,hx}) f(x)dx\Big| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big|e^{i\lambda_2 x}\Big|\Big|1 - e^{i\,hx}\Big| f(x)dx = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big|1 - e^{i\,hx}\Big| f(x)dx.\end{gathered} \tag{7}$$

В свою очередь, поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ и $f(x) > 0$, можем выбрать для любого $\varepsilon > 0$ такое число A, чтобы $\left|1 - e^{i\,hx}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда соотношение (7) примет следующий вид:

$$\left|g_X(\lambda_2+h)-g_X(\lambda_1)\right| \le \int\limits_{-A}^{A}\left|1-e^{i\,h\lambda_2}\right|f(x)dx+\int\limits_{|x|>A}\left|1-e^{i\,h\lambda_2}\right|f(x)dx \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

***Свойство* 4.** Если $Y = aX + b$, то справедливо соотношение

$$g_Y(\lambda) = e^{i\lambda b} g_X(a\lambda).$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся свойством 2 математического ожидания:

$$g_Y(\lambda) = \mathbf{M}\Big[\exp\left\{i\,\lambda\,(aX+b)\right\}\Big] = \mathbf{M}\Big[\exp\left\{i\,\lambda\,b\right\}\exp\left\{i\,\lambda\,aX\right\}\Big] =$$
$$= e^{i\lambda b}\mathbf{M}\Big[\exp\left\{i\,\lambda\,aX\right\}\Big] = e^{i\lambda b} g_X(a\lambda).$$

***Свойство* 5.** Если случайная величина X имеет абсолютный момент n-го порядка, то характеристическая функция величины X дифференцируема n раз по λ и при $k \le n$ выполняется

$$g^{(k)}(0) = i^k \mathbf{M}\Big[X^k\Big],$$

где $g^{(k)}(\lambda)$ – k-я производная по λ характеристической функции $g_X(\lambda)$.

Доказательство. Продифференцируем выражение (3) по λ, получим:

$$
\begin{gathered}
g^{'}(\lambda) = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{i\lambda x} f(x) dx \\
g^{''}(\lambda) = i^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{i\lambda x} f(x) dx \\
\cdots\cdots\cdots \\
g^{(k)}(\lambda) = i^k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{i\lambda x} f(x) dx \\
\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
\tag{8}
$$

При $\lambda = 0$ интегралы в правых частях полученных формул представляют собой моменты случайной величины X. Поэтому, полагая в (4) $\lambda = 0$, получим

$$
g^{(k)}(0) = i^k \mathbf{M}\Big[X^k\Big], \qquad k = \overline{1, n}.
$$

Следствие 1. *Если $g_X(\lambda)$ – характеристическая функция СВ X, имеющая производные до n-го порядка включительно, то моменты k-го порядка ($k \le n$) определяются по формуле:*

$$
\mathbf{M}\Big[X^k\Big] = (-i)^k g^{(k)}(0).
$$

Замечание 1. Если х. ф. случайного вектора $\overrightarrow{X} = (X_1, \dots, X_n)$ имеет смешанные производные различных порядков, то для этого вектора можно определить его моменты. Дифференцируя х. ф. (6) вектора $\overrightarrow{X}$ k_1 раз по λ_1, k_2 раз по λ_2, $\cdots$, k_n раз по λ_n, получим

$$
\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial\lambda_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial\lambda_n^{k_n}} g(\lambda_1; \ldots; \lambda_n) =
$$

$$
= i^{k_1+\ldots+k_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} x_s^{k_s} \exp\left\{ i \sum_{s=1}^{n} \lambda_s x_s \right\} f(x_1; \ldots; x_n) dx_1 \ldots dx_n.
$$

Полагая $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, получим все моменты:

$$
\alpha_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{1}{i^{k_1+\ldots+k_n}} \left[\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial\lambda_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial\lambda_n^{k_n}} g(\lambda_1; \ldots; \lambda_n) \right]\Bigg|_{\lambda=0}, \quad k_1, \ldots, k_n = 1, 2, \ldots
$$

Замечание 2. Если рассматривать просто центральные моменты (не абсолютные), то необходимо требование существования всех производных характеристической функции до порядка n. Такая ситуация рассматривается, напр., в [12, с. 287].

***Свойство* 6.** *Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - независимые случайные величины и $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, то*

$$g_Y(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(\lambda).$$

Доказательство.

$$\mathbf{M}\left[\exp\{i\lambda Y\}\right] = \mathbf{M}\left[\exp\{i\lambda(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\}\right] =$$
$$= \mathbf{M}\left[\exp\{i\lambda X_1\} \cdot \exp\{i\lambda X_2\} \ldots \cdot \exp\{i\lambda X_n\}\right] =$$
$$= \mathbf{M}\left[\exp\{i\lambda X_1\}\right] \cdot \ldots \cdot \mathbf{M}\left[\exp\{i\lambda X_n\}\right] = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(\lambda).$$

***Свойство* 7.** *Если случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей, то $\lim\limits_{\lambda\to 0} g_X(\lambda) = 1$.*

Для нас наибольший интерес будут представлять случайные величины, имеющие равномерное непрерывное, нормальное и пуассоновское распределения.

1.4. Равномерное непрерывное распределение

Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на промежутке $[a, b]$ (обозначается $X \sim \mathcal{R}\Big([a, b]\Big)$), если ее функция плотности распределения вероятностей определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & x < a \ \text{ или } \ x > b. \end{cases}$$

Т. е. все значения, которые может принять случайная величина X, равновозможны.

Пусть $c = (b-a)/2$. Случайная величина Y, имеющая функцию плотности распределения

$$\widetilde{f}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2c}, & -c \le y \le c, \\ 0, & x < -c \ \text{ или } \ x > c, \end{cases}$$

имеет характеристическую функцию, вид которой определен в примере 1: $g_Y(\lambda) = \dfrac{\sin \lambda c}{\lambda c}$. При этом случайные величины X и Y связаны соотношением: $X = Y + 2c = Y + (b-a)$. Тогда х. ф. для СВ X можно определить с помощью свойства 4 х. ф.:

$$g_X(\lambda) = e^{i\lambda(b-a)} g_Y(\lambda) = \frac{2\sin(\lambda(b-a)/2)}{\lambda(b-a)}\, e^{i\lambda(b-a)}. \tag{9}$$

Для получения числовых характеристик СВ X составим характеристическую функцию согласно определению и представим результат в виде ряда Тейлора по степеням λ:

$$g_X(\lambda) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \exp\{i\lambda x\}dx = \frac{1}{i\lambda(b-a)}\left(\exp\{i\lambda b\} - \exp\{i\lambda a\}\right)$$

$$= \frac{1}{b-a}\frac{\exp\{i\lambda b\} - \exp\{i\lambda a\}}{i\lambda} = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{k-1}}{k!}\left(b^k - a^k\right).$$

Продифференцируем дважды полученную функцию по λ и представим в виде суммы двух слагаемых:

$$g'(\lambda) = \frac{i}{b-a}\left[\frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{k-2}}{k(k-2)!}\left(b^k - a^k\right)\right]$$

$$g''(\lambda) = \frac{i^2}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right) + \sum_{k=4}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{k-3}}{k(k-3)!}\left(b^k - a^k\right)\right].$$

Положим $\lambda = 0$, и подставив полученные выражения в (8), получим моменты первого и второго порядка и соответственно математическое ожидание и дисперсию:

$$\mathbf{M}[X] = \frac{1}{2}(a+b),$$

$$\mathbf{M}\left[X^2\right] = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2),$$

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{M}\left[X^2\right] - \mathbf{M}[X]^2 = \frac{1}{12}b^2 - \frac{1}{6}ab + \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{12}(a-b)^2$$

1.5. Нормальный закон распределения

Рассмотрим нормальный закон распределения скалярной случайной величины, широко распространенной в практических задачах. Остановимся детально на его свойствах. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ^2 (обозначается $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$), если ее плотность распределения вероятностей определяется формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

***Пример* 3.** *Определить характеристическую функцию нормального закона распределения случайной величины с параметрами a и σ^2.*

Решение. Воспользуемся уже известным значением интеграла Пуассона [11, с. 360]:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t - h^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{4h^2}\right\}. \tag{10}$$

Тогда получаем:

$$g_X(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\lambda x\} f(x) dx = \left\{ f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\lambda x - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx =$$

$$= \frac{\exp\{i\lambda a\}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\lambda x(x-a) - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} d(x-a) =$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{i\lambda a - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\} = \exp\left\{i\lambda a - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}.$$

Следовательно, х. ф. нормально распределенной СВ с параметрами a и σ^2 имеет вид:

$$g_X(\lambda) = \exp\left\{i\lambda a - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}. \tag{11}$$

В частном случае, для центрированной СВ (т. е. $a = 0$), х. ф. будет следующей:

$$g_X(\lambda) = \exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}.$$

Нормальная случайная величина, у которой $a = 0$, $\sigma^2 = 1$, называется стандартной, а ее функция плотности распределения – функцией Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}.$$

Используя свойства характеристической функции, определим связь между $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ и $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$g_X(\lambda) = \exp\left\{i\lambda a - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\} = \exp\{i\lambda a\} \cdot \exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\} =$$
$$= \exp\{i\lambda a\} \cdot g_Z(\sigma\lambda) = g_{\sigma Z + a}(\lambda).$$

Утверждение 1. *Если $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ и $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то*

$$X = \sigma Z + a.$$

Определим математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Для этого продифференцируем ее х. ф. и воспользуемся следствием свойства 5 х. ф.:

$$\left.\frac{dg_X(\lambda)}{\lambda}\right|_{\lambda=0} = \exp\left\{i\lambda a - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\} \cdot (ia - \sigma\lambda)\Big|_{\lambda=0} = ia.$$

Следовательно, $\mathbf{M}[X] = a$. Продифференцировав х. ф. дважды, получим, что $\mathbf{D}[X] = \sigma^2$.

Утверждение 2. *Если $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, то $\mathbf{M}[X] = a$ и $\mathbf{D}[X] = \sigma^2$.*

Пусть теперь $\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_r)$ – случайный вектор, каждая компонента которого – нормальная случайная величина с математическим ожиданием $\mathbf{M}[X_k] = a_k$, $k = \overline{1, r}$.

Невырожденное r-мерное нормальное распределение случайного вектора $\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_r)$ является абсолютно непрерывным [13, с. 20], и его плотность распределения имеет вид

$$f_X(x_1, ..., x_r) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}\sqrt{|B|}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}Q(\mathbf{x} - \mathbf{a})\right\},$$

где B – невырожденная $(r \times r)$ матрица (ковариационная матрица):

$$B = \|b_{kl}\|, \quad b_{kl} = cov(X_k, X_l),$$

$$cov(X_k, X_l) = \mathbf{M}\Big[(X_k - \mathbf{M}[X_k]) \cdot (X_l - \mathbf{M}[X_l])\Big],$$

$\mathbf{a} = (a_1, ..., a_r)$ – числовой вектор, $Q(x) = \sum\limits_{k=1}^{r}\sum\limits_{l=1}^{r} b_{k\,l} x_k x_l$ – квадратичная форма, коэффициенты которой образуют матрицу, обратную к матрице B [11, § 3.11].[1]

Нормальный закон распределения очень широко распространен в задачах практики в силу следующих обстоятельств. Если случайная величина может рассматриваться как сумма большого числа независимых малых слагаемых, то при достаточно широких условиях закон распределения этой случайной величины близок к нормальному, независимо от того, каковы законы распределения отдельных слагаемых. Так как практически наблюдаемые случайные величины во многих случаях являются результатом проявления действия большого числа различных независимых причин, то нормальный закон оказывается весьма распространенным законом распределения. Кроме того, если для случайного признака характерен некоторый «стандарт», а отклонения от него в обе стороны небольшие и имеют примерно одинаковую вероятность, то можно предположить, что дан-

[1] Для случайного вектора, все компоненты которого независимы и имеют нормальное распределение, вид характеристической функции определим далее на стр. 32.

ный признак имеет нормальный закон распределения, для которого «стандарт» определяет параметр a.

1.6. Закон распределения Пуассона

Пусть случайная величина X принимает может принимать значения $k = 0, 1, 2, \ldots$. Вероятность того, что она примет значение k, определяется по формуле

$$P(X = k) = \frac{\beta^k}{k!}\,\exp\Big\{-\beta\Big\}.$$

Тогда говорят, что случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром β $(\beta > 0)$. Это обозначается следующим образом: $X \sim \mathcal{P}(\beta)$. Определим х. ф. случайной величины $X \sim \mathcal{P}(\beta)$:

$$g_X(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{i\lambda k} \cdot \frac{(\beta)^k}{k!} e^{-\beta} = e^{-\beta} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{i\lambda} \cdot \beta\right)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\beta} \cdot \exp\left\{\beta e^{i\lambda}\right\} = \exp\left\{-\beta(1 - e^{i\lambda})\right\}.$$

Следовательно, для $X \sim \mathcal{P}(\beta)$ х. ф. имеет вид

$$g_X(\lambda) = \exp\left\{-\beta(1 - e^{i\lambda})\right\}. \tag{12}$$

Продифференцируем дважды х. ф. (12) и, с учетом следствия для свойства 4 х. ф., получим следующий результат.

Утверждение 3. *Случайная величина X, распределенная по закону Пуассона с параметром β, имеет следующие числовые характеристики: $\mathbf{M}[X] = \mathbf{D}[X] = \beta$.*

Замечание 3. Данное свойство, будучи простым по виду, является очень важным при доказательстве теорем теории стохастических дифференциальных уравнений а именно, для обобщенного уравнения Ито [3, гл. 2].

1.7. Случайный процесс. Характеристическая функция случайного процесса

Случайные величины представляют для нас интерес не только сами по себе, но и как своеобразные характеристики описания изменяющейся, динамической системы. Такие системы описываются с помощью случайных процессов.

О п р е д е л е н и е 7. *Случайной функцией называется функция неслучайного аргумента t, вид которой определяется исходом случайного эксперимента.*

О п р е д е л е н и е 8. *Случайным процессом называется случайная функция $X(t;\omega), \quad t \in T = [0, +\infty), \quad \omega \in \Omega$, аргумент t которой трактуется как время.*

Таким образом, случайный процесс $X(t;\omega)$ является функцией двух аргументов. В дальнейшем, как принято, индекс ω опускается: $X(t) = X(t;\omega)$.

О п р е д е л е н и е 9. *Реализацией (или траекторией) случайного процесса $X(t) = X(t;\omega)$ называется неслучайная функция $x(t) = X(t;\omega_o)$, которая получается для фиксированного события $\omega = \omega_o$.*

О п р е д е л е н и е 10. *Сечением случайного процесса $X(t) = X(t;\omega)$ называется случайная величина $X = X(t_o;\omega)$, соответствующая фиксированному значению времени t.*

Следовательно, случайный процесс мы можем рассматривать как совокупность всех возможных реализаций:

$$X(t) = \Big\{ x(t) \Big| x(t) = X(t;\omega_o) \quad \forall \omega_o \in \Omega \Big\}$$

или как совокупность всех его возможных сечений:

$$X(t) = \Big\{ X \Big| X = X(t_o;\omega) \quad \forall t_o \in T \Big\}.$$

Определение 11. Математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$ называется детерминированная функция переменной t, определяющая для каждого t математическое ожидание соответствующих сечений этого процесса

$$m_X(t) = \mathbf{M}[X(t)].$$

Определение 12. Характеристической функцией одномерного случайного процесса будем называть (аналогично (3)) *функцию*

$$g_X(\lambda, t) = \mathbf{M}\Big[\exp\{i\lambda X(t)\}\Big],$$

где $i = \sqrt{-1}$; λ – параметр; $-\infty < \lambda < +\infty$; $t \in T = [0, +\infty)$.

Определение 13. Конечномерной плотностью распределения СП $X(t)$ называется плотность совместного распределения сечений этого процесса:

$$f_X\left(x_1, \cdots, x_k \Big| t_1, \cdots, t_k\right) = f\Big(X(t_1) = x_1, \cdots, X(t_k) = x_k\Big)$$

1.7.1. Винеровский процесс

Определение 14. Винеровским случайным процессом называется процесс $W(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяющий условиям:

- $W(0) = 0$;
- $\mathbf{M}[W(t)] = 0$;
- *приращения винеровского процесса $W(\tau) - W(s)$ – независимые для всех непересекающихся интервалов $[\tau, s]$ нормально распределенные случайные величины:*

$$W(\tau) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, |\tau - s|).$$

Другое название винеровского процесса – процесс броуновского движения, его обычно используют физики.

Траектории винеровского процесса – непрерывные нигде недифференцируемые функции. Несмотря на это, в дальнейшем будем использовать $dW(t)$, подразумевая под этим обозначением приращение винеровского процесса [11, с. 442].

Утверждение 4. *Любой винеровский процесс представляет собой нормально распределенный процесс* [11, с. 439].

Следовательно, х. ф. одномерного винеровского процесса имеет вид:

$$g_X(\lambda, t) = \exp\left\{-\frac{\lambda^2 t}{2}\right\}.$$

1.7.2. Пуассоновский процесс

Предположим, что некоторые события происходят в случайные моменты времени, непрерывно распределенные по числовой оси. Такие события образуют последовательность событий – поток событий. Среднее число событий в единицу времени называется интенсивностью или плотностью потока событий.

Во многих задачах практики можно считать, что поток событий удовлетворяет следующим условиям:

- если (t_1, t_2) и (t_3, t_4) - любые непересекающиеся интервалы времени, то вероятность появления любого числа событий в течение одного из них не зависит от того, сколько событий появляется в течение другого – отсутствие последействия;

- вероятность появления одного события в течение интервала времени $(t, t + \triangle t)$ пропорциональна длине этого интервала $\triangle t$;

- вероятность появления больше одного события в течение интервала времени $(t, t + \triangle t)$ пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления на этом интервале одного события – ординарность;

- среднее число событий, произошедших в течение интервала времени длиной $\triangle t$ не зависит от того, как расположен этот интервал на временной оси – стационарность.

Этим условиям удовлетворяет последовательность случайных величин, распределенных по закону Пуассона. Число событий, появляющихся в течение любого интервала времени $(0, t)$ представляет собой дискретную случайную величину, возможными значениями которой являются все целые неотрицательные числа 0,1,2,... . Обозначим эту случайную величину (сечение случайного процесса) $X(t)$. Тогда вероятность того, что она примет значение k, имеет вид:

$$\forall t > 0 \quad P_k = P\Big(X(t) = k\Big) = \frac{(\beta t)^k}{k!} \exp\Big\{ -\beta t\Big\},$$

где $\beta > 0$ – постоянная, определяющая интенсивность потока событий, βt – среднее число событий на интервале $(0, t)$. Случайный процесс, имеющий такого типа сечения, называется пуассоновским. Реализации процесса представляют собой неубывающие ступенчатые функции, имеющие в случайные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ единичные скачки.

Утверждение 5. *Характеристическая функция пуассоновского процесса имеет вид*

$$g_X(\lambda, t) = \exp\left\{-\beta t \cdot (1 - e^{i\lambda})\right\}.$$

Утверждение 6. *Для пуассоновского случайного процесса, определяемого пуассоновским потоком событий с интенсивностью β математическое ожидание и дисперсия имеют вид:*

$$\mathbf{M}\Big[X(t)\Big] = \mathbf{D}\Big[X(t)\Big] = \beta t.$$

Законы распределения вероятностей дают наиболее полную характеристику случайных процессов. Однако зачастую многие свойства случайных процессов можно определить с помощью моментных характеристик (метод характеристических функций).

Например, именно с привлечением этого метода появилась возможность определить динамику цепи конечных размеров с бесконечным числом звеньев в $\mathbb{R}^2$, изломы которой случайны и постоянно изменяются [7].

Отметим, что дальше мы будем работать с условными математическими ожиданиями, распределениями и характеристическими функциями для них. На эти математические структуры, в общем, перенося указанные свойства и соотношения, приведенные выше.

Пусть X и Y – случайные величины, принимающие свои значения на множествах $\left\{x\right\}$ и $\left\{y\right\}$ соответственно и (X, Y) – двумерная случайная величина, имеющая плотность распределения $f(x, y)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dxdy = 1.$$

Для СВ (X, Y) можно определить условные математические ожидания.

Определение 15. *Условным математическим ожиданием называется математическое ожидание одной случайной величины при фиксированном значении другой:* $\mathbf{M}\left[X\middle|Y = y\right]$.

Замечание 4. Поскольку условное математическое ожидание одной СВ будет определяться значением другой СВ, то условное математическое ожидание – это функция:

$$q(y) = \mathbf{M}\left[X\middle|Y = y\right],$$

которую называют функцией регрессии X по Y.

Определение 16. *Условной плотностью распределения называется распределение одной случайной величины при фиксированном значении другой:* $f\left(x|y\right) = f\left(x|Y = y\right)$.

Если $f_X\left(x\right)$ и $f_Y\left(y\right)$ – плотности распределения СВ X и СВ Y соответственно, то

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x|y\right) dy, \qquad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(y|x\right) dx.$$

Замечание 5. Если случайные величины X и Y независимы, то имеют место следующие утверждения:

$$\mathbf{M}\left[X\middle|Y = y\right] = \mathbf{M}\left[X\right],$$

$$f\left(x|y\right) = f_X\left(x\right),$$

$$f(x, y) = f_X\left(x\right) \cdot f_Y\left(y\right).$$

В данном разделе рассмотрен теоретический материал в объеме, необходимом для дальнейшего применения. Более подробное изложение свойств характеристических функций можно найти, напр., в [5, гл. 7]. Для более глубокого изучения теории случайных процессов можно обратиться, напр., к [4, 10, 12].

2. Применение метода характеристических функций

Характеристические функции являются очень удобным аппаратом, а иногда и единственным (на данном этапе) для решения достаточно большого круга задач. Использование метода х. ф. открывает новые возможности для доказательств классических результатов и получения новых.

2.1. Доказательство центральной предельной теоремы

В теории вероятностей существует группа теорем, касающихся предельных законов распределения суммы случайных величин. Общее название этой группы теорем — центральная предельная теорема (ЦПТ). Различными ее формы различаются условиями, накладываемыми на сумму составляющих случайных величин.

Имеется несколько доказательств ЦПТ, использующие различные подходы. Мы рассмотрим доказательство ЦПТ с помощью характеристической функции.

Теорема 1 (ЦПТ)**.** *Пусть имеется последовательность непрерывных случайных величин* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *с одним и тем же законом распределения, с равными математическими ожиданиями* $\mathbf{M}[X_i] = 0$ *и дисперсиями* $\mathbf{D}[X_i] = \sigma^2$*. Случайные величины* X_i *независимы. Тогда закон распределения случайной величины*

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}$$

приближается к стандартному нормальному закону при $n \to \infty$*, т. е.* $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$*.*

Доказательство. В силу непрерывности экспоненты, характеристическая функция случайной величины $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ равна (свойство 6 х. ф.)

$$g_{Y_n}(\lambda) = [g_X(\lambda)]^n \,. \tag{13}$$

Разложим х. ф. $g_X(\lambda)$ в ряд Тейлора по степеням λ (т. е. при $\lambda = 0$), ограничиваясь членами второго порядка:

$$g_X(\lambda) = g_X(0) + \frac{1}{1!}g'(0)\lambda + \frac{1}{2!}g''(0)\lambda^2 + \alpha(\lambda)\lambda^2. \tag{14}$$

где $\alpha(\lambda)$ – остаточный член разложения [12, гл. 11, § 7]. В окрестности нуля $\alpha(\lambda) = O(\lambda^s)$, $(s > 0)$, в силу разложения функции в точке $\lambda = 0$.

Вернемся к разложению (14) и определим коффициенты в нем. По определению характеристической функции и в силу свойства 5 х. ф.:

$$g_X(0) = 1,$$

$$g'_X(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ixe^{i\lambda x} f(x)dx\Big|_{\lambda=0} = 0 = i\mathbf{M}\left[X\right],$$

$$g''_X(0) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{i\lambda x} f(x)dx\Big|_{\lambda=0} = -\sigma^2 = i^2\mathbf{M}\left[X^2\right] = -\mathbf{D}\left[X\right].$$

Окончательно получаем

$$g_X(\lambda) = 1 - \left(\frac{\sigma^2}{2} - \alpha(\lambda)\right)\lambda^2 \tag{15}$$

Следовательно, с учетом (15) и представлением (13) х. ф. для Z_n принимает вид

$$g_{Y_n}(\lambda) = \left[1 - \left(\frac{\sigma^2}{2} - \alpha(\lambda)\right)\lambda^2\right]^n.$$

От случайной величины Y_n перейдем к случайной величине $Z_n = \dfrac{Y_n}{\sigma\sqrt{n}}$.

Для этой величины: $\mathbf{M}[Z_n] = 0$, $\mathbf{D}[Z_n] = \dfrac{1}{(\sigma\sqrt{n})^2}\mathbf{D}[Y_n] = \dfrac{n\sigma^2}{n\sigma^2} = 1$.

То есть случайная величина Z_n – центрированная нормированная величина.

Вычислим характеристическую функцию случайной величины Z_n:

$$g_{Z_n}(\lambda) = g_{Y_n}\left(\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left\{1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha\left(\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\frac{\lambda^2}{\sigma^2 n}\right\}^n.$$

Обозначим
$$\chi = \left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha\left(\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\frac{\lambda^2}{\sigma^2 n}.$$
Прологарифмируем $g_{Z_n}(\lambda)$, получим:
$$\ln\{g_{Z_n}(\lambda)\} = n\ln(1-\chi)$$

Разложим в ряд Тейлора последнее выражение и ограничимся линейными членами. Ряд Тейлора функции $\ln(1-\chi)$ имеет вид:
$$\ln(1-\chi) = -\chi + \frac{\chi^2}{2} - O(\chi^{2+s}), \quad s > 0.$$
Поэтому, если χ достаточно мало, то
$$\ln g_X(\lambda) = -n\cdot\chi + \frac{n\chi^2}{2} - O(\chi^{2+s})n.$$
Но $\chi = O\left(n^{-1}\right)$, тогда при достаточно больших n
$$\ln g_X(\lambda) = -n\chi + O\cdot(\chi^2 n),$$
$$\lim_{n\to\infty}\ln g_{Z_n}(\lambda) = -\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\frac{\lambda^2}{\sigma^2 n} = -\frac{\lambda^2}{2}.$$
То есть $\lim\limits_{n\to\infty}\ln g_{Z_n}(\lambda) = \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\right\}$, а это есть характеристическая функция нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $\mathbf{M}[Z_n] = 0$ и дисперсией $\mathbf{D}[Z_n] = \sigma^2 = 1$. Что и требовалось доказать.

Следует отметить, что центральная предельная теорема справедлива не только для непрерывных, но и для дискретных случайных величин. Практическое значение ЦПТ огромно. Опыт показывает, что закон распределения суммы независимых случайных величин, сравнимых по своему рассеиванию, достаточно быстро приближается к нормальному. Уже при числе слагаемых порядка десяти закон распределения суммы можно заменить на нормальный.

2.2. Распределение суммы одинаково распределенных СВ

Часто приходится иметь дело с суммой случайных величин, имеющих одинаковый закон распределения. Однако не всегда сумма, являющаяся случайной величиной, будет иметь тот же закон распределения. Традиционно для определения суммы случайных величин используется свертка функций и возникающая зависимость случайных величин. Применение характеристических функций намного упрощает этот процесс.

Пусть X_k для любых k – независимые одинаково распределенные случайные величины с характеристическими функциями $g_{X_k}(\lambda) = \mathbf{M}\left[\exp\{i\lambda\, X_k\}\right]$. Рассмотрим СВ $Y = \sum\limits_{j=1}^{n} X_k$. По определению х. ф. СВ получаем

$$g_Y(\lambda) = \mathbf{M}\left[\exp\left\{i\lambda\sum_{k=1}^{n} X_k\right\}\right]. \tag{16}$$

Опираясь на результаты параграфа 1, определим, будут ли суммы независимых СВ с равномерным, пуассоновским и нормальным законами распределения иметь те же законы распределения.

2.2.1. Сумма равномерных СВ

Пусть X_k, $k = \overline{1, n}$ – независимые равномерно распределенные на отрезке $[-a, a]$ случайные величины. С учетом (9), (5) и замечания 5, имеем

$$\begin{gathered} g_Y(\lambda) = \mathbf{M}\left[\exp\left\{i\lambda\sum_{k=1}^{n} X_k\right\}\right] = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\sum\limits_{j=1}^{n} x_k} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1\ldots dx_n = \\ = \prod_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{-a}^{a} e^{i\lambda x_k} f_X(x_k)dx_k\right) = \\ = \frac{1}{(2a)^n}\cdot\left[\frac{1}{i\lambda}\left(\exp\{i\lambda a\} - \exp\{-i\lambda a\}\right)\right]^n = \frac{\sin^n \lambda a}{(2\lambda a)^n}. \end{gathered} \tag{17}$$

Поскольку формулы (5) и (17) не имеют подобный вид, то это означает, что сумма равномерно распределенных величин не является равномерно распределенной СВ.

2.2.2. Сумма пуассоновских СВ

Пусть X_k, $k = \overline{1, n}$ – независимые случайные величины, имеющие распределение Пуассона с параметром β. С учетом свойства 6 х. ф., одинакового распределения и (12), имеем

$$\begin{gathered} g_Y(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} g_{X_k}(\lambda) = \\ = \Big(g_{X_k}(\lambda)\Big)^n = \Big(\exp\left\{-\beta(1 - e^{i\lambda})\right\}\Big)^n = \\ = \exp\left\{-\beta n(1 - e^{i\lambda})\right\}. \end{gathered} \tag{18}$$

Вид полученной х. ф. утверждает, что она соответствует случайной величине, имеющей распределение Пуассона с параметром βn. Без ограничения общности, можно сформулировать следующий результат:

Лемма 1. *Сумма пуассоновских случайных величин всегда есть пуассоновская СВ, т. е. если* $X_k \sim \mathcal{P}(\beta_k)$, $k = \overline{1, n}$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{P}(\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k)$.

2.2.3. Сумма нормальных СВ

Найдем х. ф. для суммы нормально распределенных случайных величин $X_k \sim \mathcal{N}(a_k, \sigma_k^2)$, $k = \overline{1, n}$, опираясь на свойства 6 х. ф. и (11)

$$\begin{gathered} g_Y(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} g_{X_k}(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} \left(\exp\left\{i\lambda a_k - \frac{\lambda^2 \sigma_k^2}{2}\right\}\right) = \\ = \exp\left\{i\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{\lambda^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2}{2}\right\}. \end{gathered} \tag{19}$$

Полученный результат означает, что сумма нормально распределенных случайных величин также является нормальной СВ.

Лемма 2. *Сумма случайных величин* $X_k \sim \mathcal{N}(a_k, \sigma_k^2), \ \ k = \overline{1,n}$ *имеет нормальное распределение вида*

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right).$$

Теперь можно получить вид х. ф. для нормального случайного вектора с независимыми компонентами.

Утверждение 7. *Х. ф. нормального случайного вектора*

$$\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_r),$$

все компоненты которого независимые попарно и в совокупности СВ $X_k \sim \mathcal{N}(a_k, \sigma_k^2), \ \ k = \overline{1,r}$*, имеет вид:*

$$g_{\overrightarrow{X}}\left(\lambda_1, \cdots, \lambda_r\right) = \exp\left\{i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \sigma_k^2\right\}. \tag{20}$$

2.3. Сумма случайного числа слагаемых-СВ

2.3.1. Характеристическая функция для специальных сумм независимых одинаково распределенных СВ

Пусть $\triangle\varphi_j$ для любых j - независимые одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией

$$h_{\triangle\varphi}(\lambda) = \mathbf{M}\left[\exp\{i\lambda \triangle\varphi\}\right].$$

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t) = \sum\limits_{j=1}^{n(t)} \triangle\varphi_j$, где $n(t)$ – число скачков пуассоновского процесса за время t, и найдем характеристическую функцию $g_\eta(\lambda; t)$. Построим эту функцию по определению, положив $n(t) = n$:

$$g_\eta(\lambda; t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(t; n) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i\lambda\eta\} f(\eta) d\eta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta t)^n}{n!} e^{-\beta t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i\lambda \sum_{j=1}^{n(t)} \triangle\varphi_j\} \prod_{j=1}^{n} f_1(\triangle\varphi_j) \prod_{j=1}^{n} d(\triangle\varphi_j) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta t)^n}{n!} \exp\{-\beta t\} \Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i\lambda \triangle\varphi_j\} f_1(\triangle\varphi_j) d(\triangle\varphi_j) \Big]^n =$$

$$= \exp\{-\beta t\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Big(\beta t\, h_{\triangle\varphi}(\lambda)\Big)^n}{n!} = \exp\Big\{-\beta t \Big(1 - h_{\triangle\varphi}(\lambda)\Big)\Big\},$$

поскольку последняя сумма – это ряд Тейлора для экспоненты.

Лемма 3. *Характеристическая функция процесса* $\eta(t) = \sum\limits_{j=1}^{n(t)} \triangle\varphi_j$*, где* $n(t)$ *– число скачков пуассоновского процесса за время* t*,* $\triangle\varphi_j$ *для любых* j *– независимые одинаково распределенные случайные величины с х. ф.* $h_{\triangle\varphi}(\lambda) = \mathbf{M}\,[\exp\{i\lambda\,\triangle\varphi\}]$ *имеет вид:*

$$g_\eta(\lambda; t) = \exp\Big\{-\beta t \Big(1 - h_{\triangle\varphi}(\lambda)\Big)\Big\}. \tag{21}$$

Для показательно распределенных случайных величин $\triangle\varphi_j$ с параметром γ получаем результат

$$g_\eta(\lambda; t) = \exp\Big\{-\beta t \Big(1 - \frac{\gamma}{\gamma - i\,\lambda}\Big)\Big\}.$$

Для равномерно распределенных на промежутке $[-\pi;\, \pi]$ случайных величин $\triangle\varphi_j$ результат следующий

$$g_\eta(\lambda; t) = \exp\Big\{-\beta t \Big(1 - \frac{\sin(\pi\,\lambda)}{\pi\,\lambda}\Big)\Big\}.$$

Для нормально распределенных слагаемых имеем со средним a и дисперсией σ^2 имеем:

$$g_\eta(\lambda; t) = \exp\Big\{-\beta t \Big(1 - \exp\Big(i\,a\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\Big)\Big)\Big\}.$$

Если $\eta = \eta_n(t) = \sum\limits_{j=1}^{n(t)} \triangle\varphi_j = \triangle\varphi_1 + \ldots + \triangle\varphi_n$, где $n = n(t)$ – число скачков за время $[0,\, t]$, то для $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_J$ имеет место равенство

$$\eta = \eta_n(t_j) = \sum_{k=1}^{n(t_1)} \triangle\varphi_k + \sum_{k=n(t_1)+1}^{n(t_2)} \triangle\varphi_k + \ldots + \sum_{k=n(t_{j-1})+1}^{n(t_j)} \triangle\varphi_k = \sum_{k=1}^{n(t_j)} \triangle\varphi_k,$$

и соответствующая х. ф. имеет вид, аналогичный (21).

2.3.2. Характеристическая функция для специальных сумм коррелированных одинаково распределенных СВ

Пусть последовательность случайных величин $\triangle\varphi_k$ – марковская , т. е. условная плотность распределения удовлетворяет условию (см. прил. 3)

$$f(\triangle\varphi_k\,|\triangle\varphi_{k-1},\triangle\varphi_{k-2},\ldots,\triangle\varphi_1)=f(\triangle\varphi_k\,|\triangle\varphi_{k-1}).$$

Пусть при этом $f(\triangle\varphi_k\,|\triangle\varphi_{k-1})=f(\triangle\varphi_k-\triangle\varphi_{k-1})$. Тогда для суммы

$$\eta=\sum_{j=1}^{n(t)}\triangle\varphi_j=\triangle\varphi_1+\ldots+\triangle\varphi_n$$

функция плотности совместного распределения имеет вид:

$$f(\triangle\varphi_1,\triangle\varphi_2,\ldots,\triangle\varphi_{k-1},\triangle\varphi_k)=\left(\prod_{j=2}^{k}f(\triangle\varphi_j\,|\triangle\varphi_{j-1})\right)\cdot f(\triangle\varphi_1).$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}
g_\eta(\lambda;t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\,\lambda\sum_{k=1}^{n}\triangle\varphi_k}f(\triangle\varphi_1,\ldots,\triangle\varphi_n)\prod_{k=1}^{n}d(\triangle\varphi_k)=\\
=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\,\lambda\sum_{k=1}^{n}\triangle\varphi_k}\left(\prod_{j=2}^{k}f(\triangle\varphi_j\,|\triangle\varphi_{j-1})\right)\cdot f(\triangle\varphi_1)\prod_{k=1}^{n}d(\triangle\varphi_k)=\\
=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\,\lambda\sum_{k=1}^{n}\triangle\varphi_k}\left(\prod_{j=2}^{k}f(\triangle\varphi_j-\triangle\varphi_{j-1})\right)\cdot f(\triangle\varphi_1)\prod_{k=1}^{n}d(\triangle\varphi_k)=\\
=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\cdots\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\,\lambda\triangle\varphi_n}f(\triangle\varphi_n-\triangle\varphi_{n-1})d(\triangle\varphi_n)\right)\cdots\right)e^{i\,\lambda\triangle\varphi_1}f(\triangle\varphi_1)d(\triangle\varphi_1)
\end{gathered}\tag{22}$$

Вычислим внутренний интеграл, сделав замену $\triangle\varphi_n-\triangle\varphi_{n-1}=z$, $\triangle\varphi_n=z+\triangle\varphi_{n-1}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\triangle\varphi_n - \triangle\varphi_{n-1}) e^{i\,\lambda\triangle\varphi_n} d(\triangle\varphi_n) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{i\,\lambda(z+\triangle\varphi_{n-1})} dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{i\,\lambda z} e^{i\,\lambda\triangle\varphi_{n-1}} dz =$$

$$= e^{i\,\lambda\triangle\varphi_{n-1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{i\,\lambda z} dz = e^{i\,\lambda\triangle\varphi_{n-1}} h_{\triangle\varphi}(\lambda).$$

Далее, используя аналогичную замену в следующем интеграле, получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\triangle\varphi_{n-1} - \triangle\varphi_{n-2}) e^{i\,\lambda\triangle\varphi_{n-1}} e^{i\,\lambda\triangle\varphi_{n-1}} d(\triangle\varphi_{n-1}) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{2i\,\lambda(z+\triangle\varphi_{n-2})} dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{i\,\cdot 2\lambda z} e^{i\,\cdot 2\lambda\triangle\varphi_{n-2}} dz =$$

$$= e^{2i\,\lambda\triangle\varphi_{n-2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{i\,\cdot 2\lambda z} dz = e^{2i\,\lambda\triangle\varphi_{n-2}} h_{\triangle\varphi}(2\lambda).$$

Продолжая по индукции, имеем:

$$g_\eta(\lambda; t) = h_{\triangle\varphi}(\lambda) h_{\triangle\varphi}(2\lambda) \cdots h_{\triangle\varphi}(n\lambda), \tag{23}$$

где $n = n(t)$. Исходя из свойств характеристической функции можно преобразовать (23):

$$g_\eta(\lambda; t) = h_{\triangle\varphi}(\lambda) h_{2\triangle\varphi}(\lambda) \cdots h_{n\triangle\varphi}(\lambda).$$

Эта характеристическая функция соответствует характеристической функции суммы – процесса $Y = Y_n(t):$

$$Y = \triangle\varphi + 2\triangle\varphi + \cdots + n\triangle\varphi = \frac{n(n-1)}{2}\triangle\varphi. \tag{24}$$

Таким образом, процесс (24) с течением времени становится все более зависимым не только от накопления $\triangle\varphi_k$, но и от накопления числа скачков пуассоновского процесса; случайными являются не только $\triangle\varphi_k$, но и коэффициенты при этих слагаемых.

Лемма 4. *Пусть последовательность зависимых случайных величин $\triangle\varphi_k$, имеющих одинаковое распределение, является марковской, с условной плотностью, удовлетворяющей условию*

$$f(\triangle\varphi_k\,|\triangle\varphi_{k-1}) = f(\triangle\varphi_k - \triangle\varphi_{k-1}).$$

Переход от $\triangle\varphi_{k-1}$ к $\triangle\varphi_k$ происходит в случайные моменты времени под действием пуассоновского процесса, $n = n(t)$ – число скачков пуассоновского процесса на время t. Тогда х. ф. суммы $\eta = \sum\limits_{j=1}^{n(t)} \triangle\varphi_j = \triangle\varphi_1 + \ldots + \triangle\varphi_n$ совпадает с х. ф. случайной величины $Y = \dfrac{n(n-1}{2} \cdot \triangle\varphi$:

$$g_\eta(\lambda) = h_{\triangle\varphi}\left(\frac{n(n-1)}{2} \cdot \lambda\right). \tag{25}$$

Следует отметить, что случайная величина $Y = \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot \triangle\varphi$ является «дважды случайной», поскольку и $\triangle\varphi$ и $n = n(t)$ – случайные величины со своими законами.

2.3.3. Характеристическая функция для «α–усредненной» суммы коррелированных одинаково распределенных СВ

Пусть $X_1, \cdots, X_n$ – последовательность случайных величин.

Определение 17. *Случайную величину $X_{\{n,\alpha\}} = \dfrac{1}{n^\alpha}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ будем называть «α–усредненной» суммой.*

Введем новый случайный процесс

$$Z_{\{n,\alpha\}}(t) = \frac{1}{[n(t)]^\alpha}\sum_{j=1}^{n(t)} \triangle\varphi_j, \qquad \alpha > 0, \tag{26}$$

где $n(t)$ – число скачков пуассоновского процесса за время t; $\triangle\varphi_j$ – одинаково распределенные для всех j случайные величины, изменяющие свои значения под действием скачков пуассоновского процесса. «α–усредненные» суммы $Z_{\{n,\alpha\}}$ (при фиксированном t) – сечения этого процесса.

Если выполнены условия леммы 4, то х. ф. для «α–усредненной» суммы по аналогии с (23) имеет вид

$$g_{Z_{\{n,\,\alpha\}}}(\lambda) = h_{\triangle\varphi}\left(\frac{\lambda}{n^{\alpha}}\right) h_{\triangle\varphi}\left(\frac{2\lambda}{n^{\alpha}}\right) \cdots h_{\triangle\varphi}\left(\frac{n\lambda}{n^{\alpha}}\right), \tag{27}$$

или эта характеристическая функция соответствует характеристической функции СВ $\theta_n(\alpha) = \dfrac{n(n-1)}{2n^{\alpha}}\triangle\varphi$:

$$g_{Z_{\{n,\,\alpha\}}}(\lambda) = h_{\triangle\varphi}\left(\frac{n(n-1)}{2n^{\alpha}} \cdot \lambda\right). \tag{28}$$

Здесь α выступает в роли параметра.

Зная вид х. ф. для «α–усредненной» суммы, можно определить моментные характеристики этой случайной величины.

2.3.4. Задачи для самостоятельного исследования

Задача 1. *Определить вид характеристической функции* (25) *в случае, когда* $\triangle\varphi$ *– случайная величина, имеющая:*

- *нормальное распределение;*
- *равномерное непрерывное распределение;*
- *пуассоновское распределение.*

Задача 2. *Для случайной величины* $\eta = \sum\limits_{j=1}^{n(t)} \triangle\varphi_j$*, определенной условиями леммы 4, определить математическое ожидание и дисперсию, если* $\triangle\varphi_j$ *– одинаково распределенные для всех* j *случайные величины, имеющие:*

- *нормальное распределение;*
- *равномерное непрерывное распределение;*
- *пуассоновское распределение.*

Задача 3. *Определить вид характеристической функции* (28) *для «α–усредненной» суммы в случае, когда* $\triangle\varphi$ *– случайная величина, имеющая:*

- *нормальное распределение;*
- *равномерное непрерывное распределение;*

- *пуассоновское распределение.*

Задача 4. *Для «α–усредненных» сумм, х. ф. которых построены в предыдущей задаче, определить значение параметра α, при котором каждая из сумм имеет математическое ожидание и дисперсию.*

2.4. Диффузия на сфере (непрерывный случай)

Замечание 6. *В данном параграфе мы будем использовать для случайного процесса следующие обозначения: $x(t)$ и x_t.*

Рассмотрим применение метода характеристических функций к решению проблем диффузии на круге, сфере, диске для основной модели, изложенной в [6].

2.4.1. Поверхности устойчивости. Притягивающие многообразия, аттрактор

Пусть $x(t)$, $x \in \mathbb{R}^3$ – решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$dx(t) = -a\Big(t;|x(t)|\Big)x(t)dt + b\Big(t;|x(t)|\Big)\Big[x(t) \times dw(t)\Big]. \qquad (29)$$

где $a\Big(t;|x(t)|\Big)$, $b\Big(t;|x(t)|\Big)$ – скалярные функции, $a\Big(t;|x(t)|\Big) > 0$. Эти функции выбраны таким образом, чтобы условия теоремы существования и единственности решения уравнения (29) были выполнены [13, с. 483]. Для начала распишем векторное произведение $\Big[x(t) \times dw(t)\Big]$:

$$\Big[x(t) \times dw(t)\Big] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ dw_1(t) & dw_2(t) & dw_3(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(x_2(t)dw_3(t) - x_3(t)dw_2(t)) - \vec{j}(x_1(t)dw_3(t) - x_3(t)dw_1)(t) +$$
$$+\vec{k}(x_1dw_2 - x_2dw_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} x_2(t)dw_3(t) - x_3(t)dw_2(t) \\ x_3(t)dw_1(t) - x_1(t)dw_3(t) \\ x_1(t)dw_2(t) - x_2(t)dw_1(t) \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{этот вектор можно} \\ \text{представить в виде} \end{array} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -x_3(t) & x_2(t) \\ x_3(t) & 0 & -x_1(t) \\ -x_2(t) & x_1(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dw_1(t) \\ dw_2(t) \\ dw_3(t) \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение (29) можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} dx_1(t) \\ dx_2(t) \\ dx_3(t) \end{pmatrix} = -a(\cdot) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} dt + b(\cdot) \begin{pmatrix} x_2(t)dw_3(t) - x_3(t)dw_2(t) \\ x_3(t)dw_1(t) - x_1(t)dw_3(t) \\ x_1(t)dw_2(t) - x_2dw_1(t) \end{pmatrix} \quad (30)$$

С учетом того, что

$$x^2(t) = |x(t)|^2 = \Big(x(t)\Big)^2 = \Big(x(t), x(t)\Big) = x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_1^3(t) \quad (31)$$

и

$$dx^2(t) = dx_1^2(t) + dx_2^2(t) + dx_3^2(t), \quad (32)$$

продифференцируем по Ито случайный процесс $x^2(t)$ (прил. 4).

Для удобства применения формулы Ито уравнение (30) перепишем в виде:

$$\begin{cases} dx_1(t) = -a(\cdot)x_1(t)dt + b(\cdot)(x_2(t)dw_3(t) - x_3(t)dw_2(t)) \\ dx_2(t) = -a(\cdot)x_2(t)dt + b(\cdot)(x_3(t)dw_1(t) - x_1(t)dw_3(t)) \\ dx_3(t) = -a(\cdot)x_3(t)dt + b(\cdot)(x_1(t)dw_2(t) - x_2(t)dw_1(t)) \end{cases}$$

и продифференцируем каждое уравнение этой системы.

$$dx_1^2(t) = 0 \cdot dt + 2x_1(t)dx_1(t) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (dx_1(t))^2 =$$
$$= 2x_1(t)\Big(-a(\cdot)x_1(t)dt + b(\cdot)(x_2(t)dw_3(t) - x_3(t)dw_2(t))\Big) +$$
$$+\Big(-a(\cdot)x_1dt + b(\cdot)(x_2(t)dw_3(t) - x_3(t)dw_2(t))\Big)^2 =$$
$$= 2x_1(t)\Big(-a(\cdot)x_1dt + b(\cdot)(x_2(t)dw_3(t) - x_3(t)dw_2(t))\Big) +$$
$$+a^2(\cdot)x_1(t)^2(dt)^2 -$$
$$-2a(\cdot)x_1(t)dt \cdot b(\cdot)(x_2(t)dw_3(t) - x_3(t)dw_2(t)) +$$

$$+b^2(\cdot)\Big[x_2^2(t)(dw_3(t))^2 - 2x_2(t)x_3(t)dw_3(t)dw_2(t) + x_3^2(t)(dw_2(t))^2\Big] =$$
$$= -2a(\cdot)x_1^2(t)\ dt + 2b(\cdot)(x_1(t)x_2(t)dw_3(t) - x_1(t)x_3(t)dw_2(t)) +$$
$$+b^2(\cdot)(x_2^2(t) + x_3^2(t))dt =$$
$$= -2a(\cdot)x_1^2(t)\ dt + 2b(\cdot)(x_1(t)x_2(t)dw_3(t) - x_1(t)x_3(t)dw_2(t)) +$$
$$+b^2(\cdot)(|x(t)|^2 - x_1^2(t))dt.$$

Последнее равенство в цепочке рассуждений основано на (31). Следовательно,

$$dx_1^2 = -2a(t;|x(t)|)x_1^2(t)\ dt +$$
$$+2b(t;|x(t)|)\cdot(x_1(t)x_2(t)dw_3(t) - x_1(t)x_3(t)dw_2(t)) +$$
$$+b^2(t;|x(t)|)\cdot(|x(t)|^2(t) - x_1^2(t))dt.$$

Аналогично вычислим $dx_2^2(t)$ и $dx_3^2(t)$:

$$dx_2^2(t) = -2a(t;|x(t)|)x_2^2(t)\ dt +$$
$$+2b(t;|x(t)|)\cdot(x_2(t)x_2(t)dw_1(t) - x_2(t)x_1(t)dw_3(t)) +$$
$$+b^2(t;|x(t)|)\cdot(|x(t)|^2 - x_2^2(t))dt,$$

$$dx_3^2(t) = -2a(t;|x(t)|)x_3^2(t)\ dt +$$
$$+2b(t;|x(t)|)\cdot(x_3(t)x_1(t)dw_2(t) - x_3(t)x_2(t)dw_1(t)) +$$
$$+b^2(t;|x(t)|)\cdot(|x(t)|^2 - x_3^2(t))dt.$$

С учетом полученных выражений и (32), получим

$$dx^2(t) = \Big(-2a(t;|x(t)|)\cdot|x(t)|^2 + 2b^2(t;|x(t)|)\cdot|x(t)|^2\Big)\ dt$$

или

$$dx^2(t) = x(t)^2\Big(-2a(t;|x(t)|) + 2b^2(t;|x(t)|)\Big)\ dt. \tag{33}$$

Таким образом, уравнение (33) – обыкновенное дифференциальное уравнение.

Если положим

$$\begin{gathered} a = a(t;|x(t)|)\cdot|x(t)| = \widetilde{a}(t;|x(t)|) = const, \\ b = b(t;|x(t)|)\cdot|x(t)| = const, \end{gathered} \tag{34}$$

то уравнение (29) приведем к виду

$$dx(t) = -ax(t)dt + \frac{b}{|x(t)|}[x(t) \times dw(t)]. \tag{35}$$

где $w(t)$ – винеровский 3-хмерный процесс; $[\times]$ – векторное произведение; a и b – скалярные параметры. Уравнение (33) при начальном условии $x(t)\Big|_{t=0} = x(0)$ в этом случае имеет решение:

$$|x(t)|^2 = \exp\{-2at\}\left(|x(0)|^2 - \frac{b^2}{a}\right) + \frac{b^2}{a}. \tag{36}$$

Следовательно, $|x|^2 = b^2/a$ – притягивающее многообразие (в современной терминологии – аттрактор), т. е., если $x(t)$ – решение (35), то

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} |x(t)|^2 = b^2/a, \\ \forall\ x(t)\Big|_{t=0} = x(0). \end{cases} \tag{37}$$

На рис. 1 представлено схематически данное многообразие и траектории процесса $x(t)$: пространственное представление (a) и проекция на фазовое пространство (b).

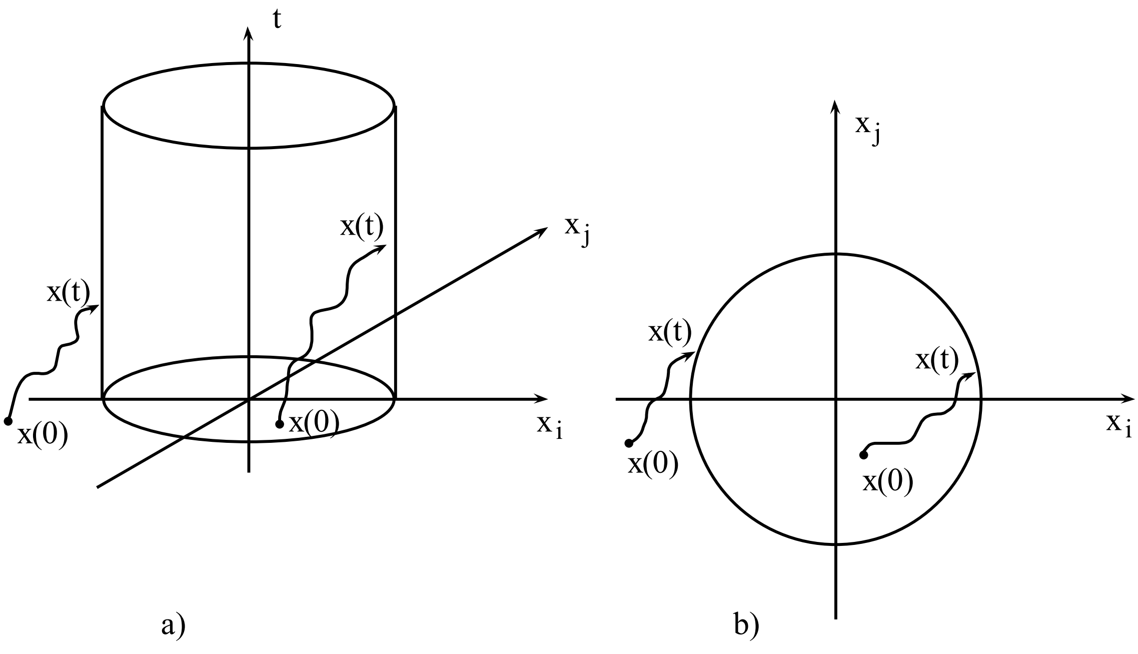

Рис. 1. Представление траекторий процесса и притягивающего многообразия

Используя (36), можем найти и первый интеграл уравнения (35) [7], т. е. такую функцию $u(t; x)$, для которой при подстановке в нее решения исходного уравнения выполнено соотношение: $u(t;x(t,x(0))) = u(0;x(0))$. В данном случае она имеет следующий вид:

$$u(t;x) = \exp\{-2at\}\left(|x(0)|^2 - \frac{b^2}{a}\right).$$

2.4.2. Нахождение характеристической функции для процесса $x(t)$ и некоторых функционалов от него

Для нахождения характеристических функционалов переходных вероятностей процессов $x(t)$, $y(t) = \int\limits_o^t x(\tau)d\tau + y(0)$ и составного процесса {x(t);y(t)} рассмотрим вспомогательный функционал

$$\psi_t = \mathbf{M}\Big[\exp\left\{i\left(\lambda, y_t\right) + i\eta\left(\lambda, x_t\right) + i\beta\left(\gamma, x_t\right)\right\}\Big|x(0), y(0)\Big], \qquad (38)$$

где $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}^3$; $\eta, \beta \in \mathbb{R}$; $x_t = x(t;x(0)$; $y_t = y(t;y(0)$; $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение.

Сразу отметим, что из определения $\psi_t = \psi(t;\beta;\eta;\lambda;\gamma)$ и (38) следует, что $\psi_t(1;0;\gamma;0)$ – характеристическая функция переходной вероятности процесса $x(t)$, $\psi_t(0;0;0;\lambda)$ – процесса $y(t)$ и $\psi_t(1;0;\gamma;\lambda)$ – процесса $\{x(t);y(t)\}$.

Воспользовавшись (35) и формулой Ито (см. прил. 4), находим

$$\frac{\partial\psi_t}{\partial t} = \mathbf{M}\Bigg[\Bigg\{i(\lambda,x_t) - ia(\lambda,x_t)\eta - ia(\gamma,x_t)\beta + \frac{b^2}{2}\cdot|(\lambda,x_t)\eta + (\gamma,x_t)\beta|^2 -$$
$$-|\lambda\eta + \gamma\beta|^2\frac{|x_t|^2b^2}{2}\Bigg\}\exp\{i(\lambda,y_t) + i(\lambda,x_t) + i\beta(\gamma,x_t)\}\mid y(0);x(0)\Bigg].$$

Вводя дифференцирование по параметрам η и β и учитывая, что согласно (36), (34) компоненты $|x(t)|^2$, b^2, a – неслучайные функции и величины, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial\psi_t}{\partial t} = [1-\eta a]\frac{\partial\psi_t}{\partial\eta} - \beta a\frac{\partial\psi_t}{\partial\beta} - \frac{b^2}{2}\left[\eta^2\frac{\partial^2\psi_t}{\partial\eta^2} + 2\eta\beta\frac{\partial^2\psi_t}{\partial\eta\partial\beta} + \beta^2\frac{\partial^2\psi_t}{\partial\beta^2}\right] -$$
$$-|\lambda\eta+\gamma\beta|^2\frac{b^2}{2}\psi_t. \qquad (39)$$

Решение этого уравнения будем определять в силу (38) при начальном условии

$$\psi = \exp\{i(\lambda, y(0)) + i\eta(\lambda, x(0)) + i\beta(\gamma, x(0))\}. \qquad (40)$$

2.4.3. Характеристическая функция для процесса на поверхности устойчивости

Предположим, что процесс $x(t)$, определяемый (35), в момент $t = 0$ сосредоточен на поверхности устойчивости, то есть $|x(0)|^2 = \frac{b^2}{a}$. Из уравнения (36), (37) следует, что для любых $t > 0$ $|x(0)|^2 = |x(t)|^2$. В этом случае для характеристической функции $\psi_t = \psi(\beta; 0; \gamma; 0)$ уравнение (39) заменяется следующим:

$$-\frac{2}{a}\frac{\partial \psi_t}{\partial t} = \beta^2 \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial \beta^2} + 2\beta \frac{\partial \psi_t}{\partial \beta} + |\gamma|^2 \beta^2 |x(0)|^2 \psi_t, \qquad (41)$$

а начальное условие (40) принимает вид

$$\psi_o = \exp\{i\beta(\gamma, x(0))\}. \qquad (42)$$

После замены $\psi_t = \overline{\psi_t}\hat{\beta^{1/2}}$ уравнение (41) переходит в такое $\left(\hat{\beta} = \beta|\gamma||x(0)|\right)$:

$$-\frac{2}{a}\frac{\partial \overline{\psi_t}}{\partial t} = \hat{\beta}^2 \frac{\partial^2 \overline{\psi_t}}{\partial \hat{\beta}^2} + \hat{\beta} \frac{\partial \overline{\psi_t}}{\partial \hat{\beta}} + \left[\hat{\beta} - \frac{1}{4}\right]\psi_t. \qquad (43)$$

Частное решение уравнения (43) ищем методом разделения переменных

$$\overline{\psi_t} = \varphi(t)\hat{\varphi}(\hat{\beta}). \qquad (44)$$

После подстановки (44) в (43) получим уравнение для $\hat{\varphi}(\beta)$:

$$\hat{\beta}^2 \frac{\partial^2 \hat{\varphi}(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}^2} + \hat{\beta} \frac{\partial \hat{\varphi}(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} + \left[\hat{\beta}^2 - \left(\frac{1}{4} + \gamma\right)\right]\hat{\varphi}(\hat{\beta}) = 0.$$

Это уравнение Бесселя со спектром собственных функций Бесселя (прил. 5): $F_{n+1/2}(\hat{\beta})$, $n = \overline{1, \infty}$. Решение (43) будем искать в виде $\left(k = \frac{(\gamma, x(0))}{|\gamma||x(0)|}\right)$

$$\overline{\psi_t} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) F_{n+1/2}(\hat{\beta}), \qquad (45)$$

т. к. начальное условие (42) допускает представление

$$\psi_o = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\ F_{n+1/2}(\hat{\beta})\ P_n(k) = \exp\left\{-i\hat{\beta}k\right\}, \qquad (46)$$

где $P_n(k)$ – полиномы Лежандра (прил. 6). Подставляя (45) в (44) с учетом представления (46), находим, что

$$2a^{-1}d\varphi_n(t) = -\gamma_n\varphi_n(t)dt;$$

$$\gamma_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4};$$

$$\varphi_n(0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} (2n+1)\cdot i^n \cdot P_n(k).$$

Следовательно,

$$\varphi_n(t) = \exp\left\{-\frac{at}{2}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]\right\}\cdot\varphi_n(0).$$

Подставив $\varphi_n(t)$ в (45) и возвращаясь к исходному представлению для $\psi_t = \beta^{-1/2}\overline{\psi}(t)$, окончательно получаем решение

$$\psi_t(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{at}{2}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]\right\}\varphi_n(0)\ F_{n+1/2}(\hat{\beta})\ \Big(|\gamma|\ |x(0)|\Big)^{-1/2}.$$

Нас интересует характеристическая функция процесса $x(t)$. Это соответствует случаю $\beta = 1$, т. е.

$$\psi_t(1;0;\gamma;0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\cdot i^n P_n\left(\frac{(\gamma;x(0))}{|\gamma|\ |x(0)|}\right) \times$$

$$\times \frac{F_{n+1/2}\Big(|\gamma|\ |x(0)|\Big)}{\Big(|\gamma|\ |x(0)|\Big)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{at}{2}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]\right\}.$$

При $t\to\infty$ выражение для $\varphi(1;0;\gamma;0)$ заменится следующим:

$$\varphi_\infty(1;0;\gamma;0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{F_{1/2}\Big(|\gamma|\ |x(0)|\Big)}{\Big(|\gamma|\ |x(0)|\Big)^{1/2}} = \frac{\sin\Big(|\gamma|\ |x(0)|\Big)}{|\gamma|\ |x(0)|},$$

что соответствует равномерному распределению на сфере (см. пример 1).

2.5. Применение метода характеристических функций к решению задачи о вращательной диффузии

2.5.1. Постановка задачи

Явление вращательной диффузии хорошо известно. Примером могут служить поворот флюгера под действием турбулентных пульсаций, поворот диполя в среде под действием случайных ударов молекул (напр., [1]).

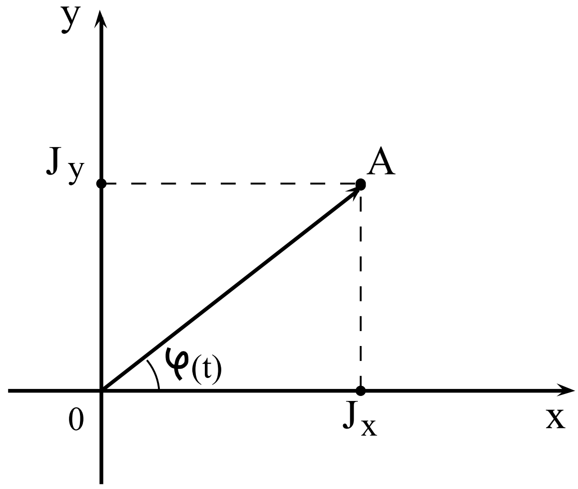

Рис. 2. Положение «флюгера» в декартовой системе координат.

Мы ограничимся изучением свойств вращательной диффузии в $\mathbb{R}^2$ [8]. Удобно в этом случае представить проекции вектора направления в виде (рис. 2):

$$J_x = |J|\ \cos(\widetilde{\varphi}(t) + \omega t),\ t_o = 0,$$

$$J_y = |J|\ \sin(\widetilde{\varphi}(t) + \omega t),$$

$$|J| = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{|J_x|^2 + |J_y|^2} = const,$$

где $\widetilde{\varphi}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n(t)} \triangle\varphi_k + \varphi_o$; $\triangle\varphi_k$ – скачкообразное изменение угла; φ_0 – начальный угол; ω – неслучайная собственная частота; $n(t)$ – число скачков до момента t.

Предположим, что:

1. $n(t)$ – число скачков за промежуток времени $[0; t]$ подчинено закону Пуассона;

2. $\triangle\varphi_k$ – нормально распределенные независимые случайные величины для всех $k = \overline{0, n}$. Такие предположения при удачном выборе временного интервала между изменениями $\widetilde{\varphi}(t)$ могут быть использованы при анализе многих явлений поворотной диффузии.

2.5.2. Решение задачи

Основные характеристики, которые наблюдаются в эксперименте, – это моменты от случайной величины в следующие моменты (условные и безусловные) проекций J_x и J_y вектора $\overrightarrow{OA}$. Так как $|J| = const$, то, не ограничивая общность получаемых результатов, далее можем положить $|J| = 1$:

$$L_1(m, t|\varphi_0) = \mathbf{M}\Big[(\cos(\widetilde{\varphi}(t) + \omega t))^m \mid \varphi_0\Big],$$

$$L_2(m, t|\varphi_0) = \mathbf{M}\Big[(\sin(\widetilde{\varphi}(t) + \omega t))^m \mid \varphi_0\Big],$$

$$L_1(m, t) = \mathbf{M}\Big[(\cos(\widetilde{\varphi}(t) + \omega t))^m\Big],$$

$$L_2(m, t) = \mathbf{M}\Big[(\sin(\widetilde{\varphi}(t) + \omega t))^m\Big] \text{ и т.д.}$$

Теорема 2. *Пусть $v(t) = cos(\varphi(t))$, где*

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n(t)} \triangle\varphi_k + \varphi_0 + \omega t \ ,$$

$\triangle\varphi_k$ – случайные нормально распределенные величины; $\mathbf{M}[\triangle\varphi_k] = 0$; $\mathbf{M}[(\triangle\varphi_k)^2] = \sigma^2$ для всех k; $n(t)$ – число скачков, подчиненных закону Пуассона с параметром βt: $\mathbf{M}\,[n(t)] = \beta t$. Тогда момент $L_1(m, t)$ для случайной величины $v(t)$ имеет вид

$$L_1(m, t) = \frac{1}{2^m} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cos[(m - 2k)(\varphi_0 + \omega t)]\times$$
$$\times \exp\left\{ \left(-\beta + \beta e^{-\dfrac{(m-2k)^2\sigma^2}{2}} \right) t \right\} \rho(\varphi_0) d\varphi_0.$$

Прежде чем перейти к доказательству данной теоремы, установим некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 5. *Пусть* $\triangle\varphi_k$ *– независимые, нормально распределенные случайные величины с* $\mathbf{M}[\triangle\varphi_k] = 0$, $\mathbf{M}[(\triangle\varphi_k)^2] = \sigma^2$, $n(t)$ *– независимая от* $\triangle\varphi_k$ *случайная величина, подчиненная закону Пуассона с параметром* βt. *Тогда плотность переходной вероятности* $P(t,\varphi|\varphi_0)$ *и характеристическая функция для случайной величины* $\varphi(t) = \sum\limits_{k=1}^{n(t)} \triangle\varphi_k + \varphi_0 + \omega t$ *определяются соответствующими выражениями:*

$$P(t;\varphi|\varphi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta t}\ \frac{(\beta t)^m}{n!} \exp\Big\{-\frac{\varphi-\varphi_o-\omega t}{2\sigma^2 n}\Big\} + \delta(\varphi-\varphi_o-\omega t)e^{-\beta t}, \tag{47}$$

$$g_\varphi(\lambda;t|\varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta t}}{n!}(\beta t)^n \cdot \exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2 n}{2}\right\} \cdot \exp\left\{i\lambda(\varphi_0+\omega t)\right\}, \tag{48}$$

где $\delta(x)$ *– дельта-функция (прил. 1).*

Доказательство. 1. Сначала построим характеристическую функцию $h(\lambda;t)$ для случайного процесса $\widehat{\varphi}(t) = \varphi(t) - \varphi_0 - \omega t = \sum\limits_{k=1}^{n(t)} \triangle\varphi_k$. Следовательно, $\varphi(t) = \widehat{\varphi}(t) + \varphi_0 + \omega t$. По свойствам характеристической функции

$$g_\varphi(\lambda;t|\varphi_0) = e^{i\lambda(\varphi_0+\omega t)} \cdot h(\lambda;t).$$

Обозначим через $P(n,t)$ вероятность того, что за время t произойдет n скачков. Тогда для процесса $\widehat{\varphi}(t)$ имеем

$$h(\lambda;t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n,t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\widehat{\varphi}(t)} \cdot \frac{\exp\left\{-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(\triangle\varphi_k)^2}{2\sigma^2}\right\}}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \prod_{k=1}^{n} d(\triangle\varphi_k), \tag{49}$$

где $\dfrac{\exp\left\{-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(\triangle\varphi_k)^2}{2\sigma^2}\right\}}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n}$ – вероятность того, что за время t произойдет изменение угла поворота на $\widehat{\varphi}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n(t)} \triangle\varphi_k$. Преобразуем многократный интеграл в (49), используя независимость $\triangle\varphi_k$ для всех k и свойства кратного интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\widehat{\varphi}(t)} \cdot \frac{\exp\left\{-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(\triangle\varphi_k)^2}{2\sigma^2}\right\}}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \cdot \prod_{k=1}^{n} d(\triangle\varphi_k) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{(\triangle\varphi_1)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot d(\triangle\varphi_1) \cdot \ldots \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{(\triangle\varphi_n)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot d(\triangle\varphi_n).$$

Следовательно, для нахождения характеристической функции необходимо найти интеграл вида

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\triangle\varphi} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(\triangle\varphi)^2}{2\sigma^2}\right\} d(\triangle\varphi).$$

Воспользуемся уже известным значением интеграла Пуассона (10). Для данного случая $\eta = -i\lambda,\ h^2 = \dfrac{1}{2\sigma^2}$. Таким образом,

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi}\sigma \cdot \exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}.$$

Следовательно, $h(\lambda, t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(n,t) \exp\left\{-\dfrac{\lambda^2\sigma^2}{2} \cdot n\right\}$. Число скачков $n(t)$ является случайной величиной, подчиненной закону Пуассона с параметром βt. Поэтому $P(n,t) = \dfrac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n$. С учетом этого характеристическая функция процесса $\varphi(t)$ принимает вид (48):

$$g_{\varphi}(\lambda; t|\varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta t}}{n!}(\beta t)^n \cdot \exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2 n}{2}\right\} \cdot \exp\left\{i\lambda(\varphi_0 + \omega t)\right\}.$$

2. Найдем плотность переходной вероятности для случайной величины $\varphi(t)$. Подвергнем для этого обратному преобразованию Фурье выражение (48):

$$P(t; \varphi|\,\varphi_o) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n \times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2 n}{2}\right\}\cdot\exp\{i\lambda(\varphi_o+\omega t)\}\cdot\exp\{-i\lambda\varphi\}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2 n}{2}\right\}\cdot\exp\{i\lambda(\varphi_o+\omega t-\varphi)\}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n\cdot\exp\left\{-i\lambda(\varphi-\varphi_o-\omega t)-\frac{\lambda^2\sigma^2 n}{2}\right\}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n\cdot\exp\left\{-i\lambda(\varphi-\varphi_o-\omega t)-\frac{\lambda^2\sigma^2 n}{2}\right\}d\lambda+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{0!}(\beta t)^0\cdot\exp\{-i\lambda(\varphi-\varphi_o-\omega t)\}d\lambda\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-i\lambda(\varphi-\varphi_o-\omega t)-\frac{\lambda^2\sigma^2 n}{2}\right\}d\lambda+$$

$$+\exp\{-\beta t\}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-i\lambda(\varphi-\varphi_o-\omega t)\Big\}d\lambda.$$

Интеграл в последнем выражении определяет значение δ-функции в точке $\varphi-\varphi_o-\omega t$. Следовательно,

$$P(t;\varphi|\,\varphi_o)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n\cdot$$
$$\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{i\lambda(\varphi-\varphi_o-\omega t)-\frac{\lambda^2\sigma^2 n}{2}\right\}d\lambda+ \tag{50}$$
$$+\delta(\varphi-\varphi_o-\omega t)\cdot\exp\{-\beta t\}.$$

Для вычислением интеграла в (50) также воспользуемся значением интеграла Пуассона (10). Считая $\eta=i(\varphi-\varphi_o-\omega t),\ h^2=\dfrac{\sigma^2 n}{2}$, находим значение переходной вероятности

$$P(t;\varphi|\,\varphi_o)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma\sqrt{n}}\exp\left\{-\frac{(\varphi-\varphi_o-\omega t)^2}{2\sigma^2 n}\right\}+$$

$$+\delta(\varphi-\varphi_o-\omega t)\cdot\exp\{-\beta t\} =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\cdot\exp\left\{-\frac{(\varphi-\varphi_o-\omega t)^2}{2\sigma^2 n}\right\}\cdot\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n+$$

$$+\delta(\varphi-\varphi_o-\omega t)\cdot\exp\{-\beta t\},$$

что и соответствует (47). Лемма доказана.

Лемма 6. *Характеристическая функция, определенная соотношением* (48), *может быть представлена в виде*

$$g_{\varphi}(\lambda,t|\,\varphi_o)=\exp\left\{\left(-\beta-i\lambda\omega+\beta\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}\right)t\right\}\cdot\exp\{i\lambda\varphi_o\}. \quad (51)$$

Доказательство. Для доказательства будем использовать дифференцирование по параметру [15, с. 661–669]. Продифференцируем выражение (48) по параметру t:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2 n}{2}\right\}\cdot\exp\{i\lambda(\varphi_o+\omega t)\}\right]=$$

$$=(-\beta+i\lambda\omega)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\{(-\beta+i\lambda\omega)t\}}{n!}(\beta t)^n\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2 n}{2}\right\}\cdot\exp\{i\lambda\varphi_o\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\beta\cdot\frac{\exp\{(-\beta+i\lambda\omega)t\}}{(n-1)!}(\beta t)^{n-1}\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2 n}{2}\right\}\cdot\exp\{i\lambda\varphi_o\}=$$

$$=(-\beta+i\lambda\omega)\sum_{n=0}^{\infty}\exp\{-\beta t\}\cdot\frac{(\beta t)^n}{n!}\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2 n}{2}\right\}\cdot\exp\{i\lambda(\varphi_o+\omega t)\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\beta\cdot\exp\{-\beta t\}\cdot\frac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2 n}{2}\right\}\cdot\exp\{i\lambda(\varphi_o+\omega t)\}=$$

$$=\left(-\beta+i\lambda\omega+\beta\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}\right)g_{\varphi}(\lambda;t|\,\varphi_o).$$

Таким образом, получили обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\left[g_{\varphi}(\lambda;t|\,\varphi_o)\right]=\left(-\beta+i\lambda\omega+\beta\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}\right)g_{\varphi}(\lambda;t|\,\varphi_o).$$

Перепишем его в виде

$$\frac{dg_{\varphi}(\lambda;t|\,\varphi_o)}{g_{\varphi}(\lambda;t|\,\varphi_o)}=\left(-\beta+i\lambda\omega+\beta\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}\right)dt.$$

Решение этого уравнения

$$\ln g_\varphi(\lambda; t|\,\varphi_o) - \ln g_\varphi(\lambda; 0|\,\varphi_o) = \left(-\beta + i\lambda\omega + \beta\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}\right)t$$

или

$$g_\varphi(\lambda; t|\,\varphi_o) = \exp\left\{\left(-\beta + i\lambda\omega + \beta\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}\right)t\right\} g_\varphi(\lambda; 0|\,\varphi_o).$$

Поскольку $g_\varphi(\lambda; 0|\,\varphi_o) = \exp\{i\lambda\varphi_o\}$, то получаем

$$g_\varphi(\lambda, t|\,\varphi_o) = \exp\left\{\left(-\beta - i\lambda\omega + \beta\exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}\right)t\right\}\cdot\exp\{i\lambda\varphi_o\}.$$

Лемма доказана.

Замечание 7. *Можно получить формулу* (51) *непосредственно, преобразовав ряд* (48) .

Лемма 7. *Пусть* $z(t) = \cos\varphi(t)$, *где* $\varphi(t) = \sum\limits_{k=1}^{n(t)} \triangle\varphi_k + \varphi_o + \omega t$, $\triangle\varphi_k$ $(k = \overline{1, n(t)})$ *– случайные, нормально распределенные величины* $\left(\mathbf{M}\triangle\varphi_k = 0,\ \mathbf{M}(\triangle\varphi_k)^2 = \sigma^2\right)$. *Если плотность переходных вероятностей случайной величины* φ *имеет вид* (лемма 5)

$$P(t;\varphi|\,\varphi_o) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma}}\exp\left\{-\frac{(\varphi-\varphi_o-\omega t)^2}{2\sigma^2 n}\right\}\cdot\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n + \\ + \exp\{-\beta t\}\cdot\delta(\varphi-\varphi_o-\omega t), \tag{52}$$

то условный момент $L_1\Big(m; t\Big|\varphi_o\Big)$ *для* $z(t)$ *может быть найден из соотношения*

$$L_1\Big(m; t\Big|\varphi_o\Big) = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \exp\left\{-\beta t + \beta t\exp\left\{-\frac{(m-2k)^2\sigma^2}{2}\right\}\right\}\times \\ \times\cos\left[(m-2k)(\varphi_o+\omega t)\right].$$

Доказательство. По определению условного момента для случайной величины $z(t) = \cos\varphi(t)$ порядка m имеем

$$L_1(m; t|\,\varphi_o) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}[z(t)]^m P(t;\varphi|\,\varphi_o)d\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}[\cos\varphi(t)]^m P(t;\varphi|\,\varphi_o)d\varphi \tag{53}$$

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$\cos\varphi(t) = \frac{e^{i\varphi(t)} + e^{-i\varphi(t)}}{2}.$$

Раскрывая бином Ньютона, получим (для удобства будем использовать обозначение φ вместо $\varphi(t)$)

$$\begin{gathered}
\Big[\cos\varphi\Big]^m = \left[\frac{\exp\{i\varphi\} + \exp\{-i\varphi\}}{2}\right]^m = \\
= \tfrac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \exp\{i\varphi k\}\cdot\exp\{-i\varphi(m-k)\} = \\
= \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{\infty}\exp\{-i\varphi(m-2k)\}C_m^k.
\end{gathered} \tag{54}$$

Подставив (52), (54) в выражение (53) для момента $L_1\Big(m;t\Big|\varphi_o\Big)$, находим

$$\begin{gathered}
L_1\Big(m;t\Big|\varphi_o\Big) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}\exp\{-i\varphi(m-2k)\}\cdot C_m^k\times \\
\times\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\exp\left\{-\frac{(\varphi-\varphi_o-\omega t)^2}{2\sigma^2 n}\right\}\times\right. \\
\left.\times\,\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n + \exp\{-\beta t\}\cdot\delta(\varphi-\varphi_o-\omega t)\right]d\varphi = \\
= \frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n\times \\
\times\left\{\sum_{k=0}^{m}C_m^k\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\{-i\varphi(m-2k)\}\cdot\frac{\exp\left\{-\dfrac{(\varphi-\varphi_o-\omega t)^2}{2\sigma^2 n}\right\}}{\sqrt{2\pi n}}d\varphi\right\} + \\
+\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\cdot\exp\{-\beta t\}\times \\
\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\{-i\varphi(m-2k)\}\cdot\delta(\varphi-\varphi_o-\omega t)d(\varphi-\varphi_o-\omega t).
\end{gathered} \tag{55}$$

Преобразуем первое слагаемое в сумме (55). Получаем

$$\frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{m}C_m^k\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\{-i\varphi(m-2k)\}\cdot\frac{\exp\left\{-\dfrac{(\varphi-\varphi_o-\omega t)^2}{2\sigma^2 n}\right\}}{\sqrt{2\pi n}}d\varphi\right\}=$$

$$=\frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!\sqrt{2\pi n}}(\beta t)^n\left[\sum_{k=0}^{m}C_m^k\exp\{-i(\varphi_o+\omega t)(m-2k)\}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-i(\varphi-\varphi_o-\omega t)(m-2k)\}\exp\left\{-\frac{(\varphi-\varphi_o-\omega t)^2}{2\sigma^2 n}\right\}d(\varphi-\varphi_o-\omega t)\right].$$

Сделав замену переменных в последнем интеграле и применив интеграл Пуассона (10), вычислим его:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-i(\varphi-\varphi_o-\omega t)(m-2k)\}\exp\left\{-\frac{(\varphi-\varphi_o-\omega t)^2}{2\sigma^2 n}\right\}d(\varphi-\varphi_o-\omega t)=$$

$$=\sigma\sqrt{2\pi n}\cdot\exp\left\{-\frac{(m-2k)^2\sigma^2 n}{2}\right\}.$$

В результате первое слагаемое в (55) примет следующий вид:

$$\frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n\left[\sum_{k=0}^{m}C_m^k\exp\left\{-i(\varphi_o+\omega t)(m-2k)-\frac{(m-2k)^2\sigma^2 n}{2}\right\}\right].\tag{56}$$

Второе слагаемое в (55) вычислим, используя свойства дифференциала и дельта-функции:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}C_m^k e^{-\beta t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\varphi(m-2k)}\cdot\delta\Big(\varphi-(\varphi_o+\omega t)\Big)\cdot d(\varphi-\varphi_o-\omega t)=\\&=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\exp\{-\beta t\}\exp\Big\{-i(m-2k)(\varphi_o+\omega t)\Big\}.\end{aligned}\tag{57}$$

Подставляя выражения (56) и (57) в сумму (55), получаем

$$L_1\Big(m;t\Big|\varphi_o\Big) = \frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\beta t}}{n!}(\beta t)^n\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{m} C_m^k \exp\Big\{-i(\varphi_o+\omega t)(m-2k) - \frac{(m-2k)^2\sigma^2 n}{2}\Big\}\right] +$$

$$+\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \exp\{-\beta t\}\exp\{-i(m-2k)(\varphi_o+\omega t)\} =$$

$$= \frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n\sum_{k=0}^{m} C_m^k \exp\left\{-i(m-2k)(\varphi_o+\omega t) - \frac{(m-2k)^2\sigma^2 n}{2}\right\}.$$

Изменяя порядок суммирования, приходим к выражению

$$\begin{aligned} L_1\Big(m;t\Big|\varphi_o\Big) &= \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \exp\{-i(m-2k)(\varphi_o+\omega t)\}\times \\ &\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n \exp\Big\{-\frac{(m-2k)^2\sigma^2 n}{2}\Big\}. \end{aligned} \tag{58}$$

Поскольку $\displaystyle\sum_{0}^{+\infty}\frac{(\beta t)^n}{n!} = \exp\{\beta t\}$, то получаем

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\exp\{-\beta t\}}{n!}(\beta t)^n \exp\{-i(m-2k)\omega t\}\exp\left\{-\frac{(m-2k)^2\sigma^2 n}{2}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\beta t - i(m-2k)\omega t + \beta t\exp\left\{-\frac{(m-2k)^2\sigma^2}{2}\right\}\right\}.$$

Возвращаясь к (58), находим

$$\begin{aligned} L_1\Big(m;t\Big|\varphi_o\Big) &= \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \exp\{-i(m-2k)(\varphi_o+\omega t)\}\times \\ &\times\exp\left\{-\beta t + \beta t\exp\left\{-\frac{(m-2k)^2\sigma^2}{2}\right\}\right\}. \end{aligned} \tag{59}$$

Воспользуемся представлением Эйлера для $\exp\{-i(m-2k)(\varphi_o+\omega t)\}$. В итоге

$$L_1\Big(m;t\Big|\varphi_o\Big) = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m} C_m^k\cdot\exp\left\{-\beta t + \beta t\exp\left\{-\frac{(m-2k)^2\sigma^2}{2}\right\}\right\}\times$$

$$\times\Big(\cos\Big[(m-2k)(\varphi_o+\omega t)\Big]-i\sin\Big[(m-2k)(\varphi_o+\omega t)\Big]\Big)=$$

$$=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\cdot\exp\left\{-\beta t+\beta t\exp\left\{-\frac{(m-2k)^2\sigma^2}{2}\right\}\right\}\cos\Big[(m-2k)(\varphi_o+\omega t)\Big]-$$

$$-i\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\cdot\exp\left\{-\beta t+\beta t\exp\left\{-\frac{(m-2k)^2\sigma^2}{2}\right\}\right\}\sin\Big[(m-2k)(\varphi_o+\omega t)\Big].$$

Поскольку

$$\sum_{k=0}^{m}\exp\left\{\beta t\frac{(m-2k)^2\sigma^2}{2}\right\}\sin\Big[(m-2k)(\varphi_o+\omega t)\Big]\equiv 0,$$

то (59) переходит в такое выражение:

$$L_1\Big(m;t\Big|\varphi_o\Big)=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\exp\left\{-\beta t+\beta t\exp\left\{\frac{(m-2k)^2\sigma^2}{2}\right\}\right\}\times$$
$$\times\cos\Big[(m-2k)(\varphi_o+\omega t)\Big].$$

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы. Воспользовавшись леммами 5–7 и соотношением

$$L_1(m;t)=\int_{-\infty}^{+\infty}L_1\Big(m;t\Big|\varphi_o\Big)\rho(\varphi_o)d\varphi_o,$$

приходим к утверждению основной теоремы:

$$L_1(m;t)=\frac{1}{2^m}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\cos[(m-2k)(\varphi_o+\omega t)]\times$$

$$\times\exp\left\{-\beta t+\beta t\exp\left\{\frac{(m-2k)^2\sigma^2}{2}\right\}\right\}\rho(\varphi_o)d\varphi_o.$$

Доказательство теоремы завершено.

2.5.3. Задачи для самостоятельного исследования

Задача 5. *На основе того же алгоритма, что был применен для нахождения $L_1(m;t)$, найти $L_2(m;t)=\mathbf{M}\Big[\sin\varphi(t)\Big]^m$.*

Задача 6. *Построить аналитическое выражение для смешанных моментов* $\mathbf{M}\left[\left(cos\varphi(t)\right)^m\left(\sin\varphi(t)\right)^l\right]$.

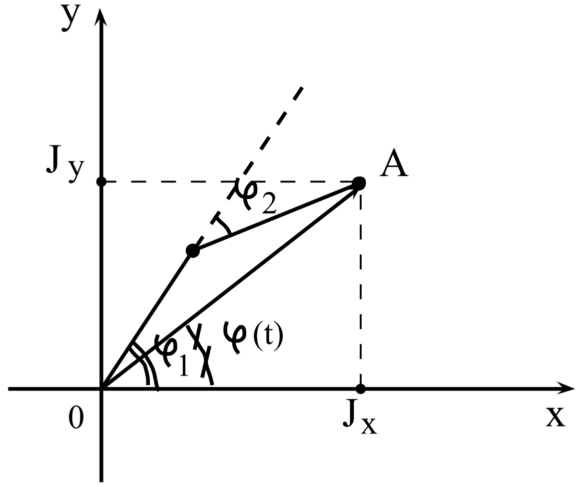

Рис. 3. Расположение ломаной относительно системы координат

Задача 7. *Пусть дана ломаная, состоящая из двух одинаковых звеньев* (рис. 3)*. Один конец ломаной закреплен в начале координат. Под действием случайных импульсов первое звено может изменять свое положение относительно положительного направления оси Ox – угол φ_1, второе звено меняет угол φ_2 относительно первого звена независимо от φ_1. Рассмотрим точку A, соответствующую второму концу ломаной, и радиус-вектор этой точки. Полагая, что проекции вектора $\overrightarrow{OA}$ на оси координат – случайные величины, определить моменты этих случайных величин. При этом $\varphi(t) = \varphi_1 + \varphi_2$. Закон изменения $\varphi(t)$ такой же, как и в поставленной в 2.5.1 задаче.*

Задача 8. *Провести исследование задачи 7 для случая n звеньев.*

Заключение

Область применения метода х. ф. довольна обширна. Мы рассматриваем данное пособие как шаг на пути его освоения. Наличие множества приложений как при решении математических проблем, так и задач прикладного характера позволяет надеяться в полезности поданного материала. Возможные подходы по применению метода лучше всего демонстрируются и усваиваются при рассмотрении конкретных примеров. Мы продолжим работу в этом направлении, рассмотрев в следующем издании более полно свойства и применение специальных сумм. Сосредоточим внимание на нахождении и построении различных типов инвариантов для стохастических систем. Продемонстрируем применение метода х. ф. при моделировании динамики полимерной цепи на основе обобщения модели вращательной диффузии [7].

Пособие корректировалось в процессе апробации на протяжении ряда лет, при проведении занятий со студентами старших курсов специальности «Прикладная математика» Тихоокеанского государственного университета (Хабаровск) и Национального авиационного университета (Киев).

Авторы не претендуют на законченность и совершенность работы и будут благодарны за критические замечания и рекомендации по улучшению содержания пособия.

Авторы выражают признательность рецензентам пособия за заинтересованное и критическое его прочтение.

Библиографические ссылки

1. Валиев К. А., Иванов Е. Н. Вращательное броуновское движение // Успехи Физических наук. Т. 109, № 1, 1973. – С. 31–64.

2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1981. – 512 с.

3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев : Наук. Думка,1968.– 354 с.

4. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М. : Наука, 1965. – 654 с.

5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М. : Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.

6. Дубко В. А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. – Владивосток : ДВО АН СССР, 1989. – 185 с.

7. Дубко В. А., Чалых Е. В. Динамика цепи конечных размеров с бесконечным числом звеньев в $\mathbb{R}^2$. Препринт / Ин-т прикл. матем. ДВО РАН. Владивосток ; Хабаровск : Дальнаука, 1998. – 18 с.

8. Дубко В. А., Савенко О. А., Чалых Е. В. Характеристические функции и их применение. – Биробиджан : Изд-во Биробидж. гос. пед. ин-та, 1996. – 35 с.

9. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В трех томах. Т. 3. Изд. 2, доп. и перераб. – М. : Высш. шк., 1989. – 352 с.

10. Миллер Б. М., Панков А. Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 320 с.

11. Пугачев В. С. Введение в теорию вероятностей. – М. : Наука, 1968. – 368 с.

12. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Теория стохастических систем. – М. : Логос, 2004. – 1000 с.

13. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. – М. : Наука, 1985. – 640 с.

14. Толстов Г. П. Ряды Фурье. – Изд. 2., испр. – М. : Гл. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 390 с.

15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – С-Пб. : Лань, 1997. – 800 с.

Приложения

Приложение 1. Дельта–функция и некоторые ее свойства

Рассмотрим функцию $\delta_h(t)$ следующего вида:

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, t < 0, t > h, \\ \dfrac{1}{h}, 0 \le t \le h. \end{cases}$$

Эта функция действует лишь на отрезке [0, h], где имеет постоянное значение $\dfrac{1}{h}$, при этом выполняется условие (общий суммарный эффект)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t)dt = \int\limits_{o}^{h} \frac{dt}{h} = 1.$$

Предположим, что $h \to 0$. Получающееся для всех параметров семейство функций $\Big\{\delta_h(t),\ h \to 0\Big\}$. Введем функцию $\delta(t)$, которую будем считать пределом этого семейства и называть дельта-функцией:

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \delta_h(t).$$

Следовательно, функция $\delta(t)$ равна нулю всюду, кроме точки $t = 0$, где она равна бесконечности, и, тем не менее, для нее считается справедливым соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Таким образом, δ–функция представляет собой условное сокращенное обозначение для вполне определенного предельного процесса, который часто рассматривается в физике: бесконечно большая величина, действующая в бесконечно малый промежуток с суммарным эффектом, равным единице. Введение этой функции сильно упрощает вычисления, связанные с таким предельным процессом: вместо того, чтобы производить выкладки до перехода к пределу и перейти к пределу в окончательном результате, переходят к пределу сразу, до выкладок. В большинстве физических задач законность такой перестановки вполне оправдана.

Некоторые свойства δ–функции:

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_o)f(t)dt = f(t_o)$, где f – произвольная функция, непрерывная в точке $t = t_o$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_o)\cdot \exp\Big\{-i\lambda t\Big\}dt = \exp\Big\{-i\lambda t_o\Big\}, \quad i = \sqrt{-1}.$

3. $\delta(t-t_o) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{-i\lambda t_o\Big\}\cdot \exp\Big\{-i\lambda t\Big\}d\lambda.$

4. $\delta(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{-i\lambda t\Big\}d\lambda$ – интегральное представление δ–функции.

Приложение 2. Преобразование Фурье

Преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется функция $\overline{F}(\lambda)$, определяемая следующим образом ([14, с. 240], [9, с. 81-84]):

$$\overline{F}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}f(x)dx.$$

Обратное преобразование Фурье позволяет по функции $\overline{F}(\lambda)$ восстановить функцию $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\overline{F}(\lambda)d\lambda.$$

Когда говорят о характеристических функциях, то используют прямое и обратное преобразование Фурье определяют следующего вида: ([14, с. 244]):

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}f(x)dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}F(\lambda)d\lambda.$$

То есть произведение коэффициентов при интегралах в прямом и обратном преобразованиях Фурье должно быть всегда равным $(2\pi)^{-1}$.

Т. к. $\delta(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} d\lambda$, то можно считать δ–функцию обратным преобразованием Фурье единичной функции.

В случае, когда x – векторная величина, т. е. $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, то говорят о многомерном прямом и обратном преобразованиях Фурье:

$$\overline{F}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\lambda,x)} f(x) dx, \qquad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\lambda,x)} \overline{F}(\lambda) d\lambda.$$

В этом случае $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, (λ, x) – скалярное произведение векторов x и λ. Для коэффициентов перед интегралами произведение равно $(2\pi)^{-n}$.

Приложение 3. Марковские процессы

Пусть $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ – σ– алгебра подмножеств борелевского пространства $\mathbb{R}^1$.

Вещественный случайный процесс $\Big\{X(t),\ t \in T\Big\}$ называется марковским, если для любых $t_j \to T$: $t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k$, $j = 1, \cdots, k$, произвольного целого $k > 1$ и любого борелевского множества $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ выполнено равенство

$$P\left(X(t_k) \in \mathbf{B} \Big| X(t_1), \cdots, X(t_{k-1})\right) = P\left(X(t_k) \in \mathbf{B} \Big| X(t_{k-1})\right). \qquad \text{(I)}$$

В соотношении (I) условные вероятности определяются относительно σ–алгебры, порожденной случайными величинами $X(t_1, \cdots, X(t_{k-1})$ (в левой части) и σ–алгебры, порожденной только $X(t_k)$ (в правой части).

Соотношение (I) можно записать также в виде

$$P\left(X(t_k) \in \mathbf{B} \Big| X(t_1) = x_1, \cdots, X(t_{k-1}) = x_{k-1}\right) = \\ = P\left(X(t_k) \in \mathbf{B} \Big| X(t_{k-1}) = x_{k-1}\right),$$

где $x_j \in \mathbb{R}^1$ — произвольное допустимое значение случайной величины $X(t_j)$, $j = 1, \ldots, k$.

Переходная вероятность марковского процесса определяется как

$$P(s, x, t, \mathbf{B}) = P\left(X(t) \in \mathbf{B} \Big| X(s) = x\right),$$

при $t > s,\ \ x \in \mathbb{R}^1$, $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$.

Если переходная вероятность процесса $X(t)$ имеет плотность $f\left(X(t) = y \mid X(s) = x\right)$, то

$$P\left(s, x, t, \mathbf{B}\right) = \int\limits_{\mathbb{B}} f\left(X(t) = y \middle| X(s) = x\right) dy.$$

При этом для любого k также существует конечномерная плотность распределения

$$f_X\left(x_1, \cdots, x_k \middle| t_1, \cdots, t_k\right) =$$
$$= \left(\prod_{j=2}^{k} f\left(X(t_j) = y_j \middle| X(t_{j-1}) = y_{j-1}\right)\right) \cdot f\Big(X(t_1) = y_1\Big).$$

Приложение 4. Формула Ито

В силу того, что в различной литературе используется несколько видов формулы Ито (содержание остается прежним, но используется специфическая формула для построения дифференциала Ито), приведем несколько вариантов (см., напр., [12, 13]).

1. [13, с. 477]. Пусть случайный процесс $X(t)$, $X \in \mathbb{R}^n$ является решением стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$dx_i(t) = a_i(t)dt + \sum_{k=1}^{m} b_{i,k}(t)dw_k(t), \qquad i = \overline{1, n}.$$

Пусть $f = f(t, x)$ – неслучайная функция, непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\ , \qquad \frac{\partial f(t,x)}{\partial x_i}\ , \qquad \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}\ , \qquad i, j = \overline{1, n}.$$

Тогда функция $f(t, X(t))$ обладает стохастическим дифференциалом, имеющим вид

$$d_t f(t; X(t)) = \left[\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\Big|_{x=X(t)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_i}\Big|_{x=X(t)} + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,k}(t)\, b_{j,k}(t)\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{x=X(t)}\right] dt +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{i,k}(t)\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_i}\Big|_{x=X(t)} dw_k(t).$$

Формула Ито остается справедливой и тогда, когда коэффициенты случайные, т. е. $a_i(t) = a_i(t,\omega)$, и $b_{i,k}(t) = b_{i,k}(t,\omega)$, $i, j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$, измеримые на том же вероятностном пространстве, что и $\mathbf{w}(t)$ и не нарушающие условия существования и единственности решения уравнения Ито [13, с. 483–484].

2. [12, с. 497-498]. Пусть $Z(t)$ – случайный процесс, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения

$$dZ(t) = X(t)dt + Y(t)dW(t).$$

Тогда стохастический дифференциал скалярной действительной непрерывной функции $U(t) = \varphi(Z(t), t)$, обладающей ограниченными первыми и вторыми производными, определяется следующей формулой:

$$dU(t) = \Big\{\varphi_t(Z(t),t) + (\varphi_z(Z(t),t))^* \cdot X(t) +$$
$$+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{tr}\left[\varphi_{\mathrm{zz}}(\mathrm{Z(t),t}) \cdot \mathrm{Y(t)} \cdot \sigma(\mathrm{t}) \cdot (\mathrm{Y(t)})^*\right]\Big\}\mathrm{dt} + \qquad \text{(II)}$$
$$+(\varphi_z(Z(t),t))^* \cdot Y(t)dW(t).$$

Здесь n – размерность вектора z; $\varphi_t(z,t) = \dfrac{\partial\varphi(z,t)}{\partial t}$; $\varphi_z(z,t) = \dfrac{\partial\varphi(z,t)}{\partial z}$ – матрица-столбец первых производных по компонентам вектора z; $\varphi_{zz}(z,t)$ – квадратная матрица вторых производных по компонентам z; $\sigma(t)$ – интенсивность винеровского процесса $W(t)$; * – знак транспонирования.

В формуле (II) tr[A] – сумма диагональных элементов матрицы A, называемая «следом матрицы». Иногда эту сумму называют «шпуром» и обозначают sp[A].

Приложение 5. Уравнение Бесселя, функции Бесселя

Уравнение вида

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \, \frac{\partial u(\rho)}{\partial \rho} + \left(\rho^2 - \nu^2\right) u(\rho) = 0, \qquad \text{(III)}$$

где $-\infty < \nu < \infty$, называется уравнением Бесселя. Всякое решение этого уравнения, не равное тождественно нулю, называется цилиндрической функцией. Решением уравнения (III) является функция

$$F_\nu(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \, \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+\nu}, \qquad \text{(IV)}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция, представляющая собой обобщение факториала для любых (в т. ч. и натуральных) z. Функции вида (IV) называются функциями Бесселя порядка ν. Множество всех функций Бесселя, относящихся к данному уравнению Бесселя, называется спектром.

Более подробно см. [2, § 23].

Приложение 6. Полиномы Лежандра

[9, с. 143]. Многочлены

$$P_o(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \, \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}, \qquad n = 1, \ 2, \ \ldots$$

называются полиномами Лежандра.

Оглавление

Учебное издание

Елена Викторовна Карачанская, Валерий Алексеевич Дубко

**ПРИМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Учебное пособие

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка *Е. В. Карачанская*
Дизайнер обложки *М. В. Привальцева*

Подписано в печать 28.12.10. Формат $60 \times 84\ {}^1/_{16}$. Бумага писчая.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 4,0. Тираж 150 экз. Заказ 293.

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

Отдел оперативной полиграфии издательства Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

ISBN 978-5-7389-0932-0

9 785738 909320