



УДК 536.25

© С. В. Соловьев, 2005

ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ В СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ С УЧЕТОМ ДЖОУЛЕВОЙ ДИССИПАЦИИ

Соловьев С. В. – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры «Прикладная математика и программирование» (ТОГУ)

Исследуется тепловая конвекция электропроводящей жидкости в сферическом слое с учетом внутренних источников тепла и джоулевой диссипации. Сделаны оценки влияния внутренних источников тепла и джоулевой диссипации на структуру конвективного течения и поле температуры.

The thermal convection of electrical conductive liquid in a spherical layer in view of internal sources of heat and joule dissipation is investigated. The estimations of influence of internal sources of heat and joule dissipation on convection current structure and temperature field are made.

Математическая постановка задачи естественно-конвективного теплообмена электропроводящей жидкости в безразмерной форме (используется приближение Буссинеска) описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1, 2]:

$$\frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \nabla) \vartheta = \frac{1}{\text{Pe}} (\Delta \vartheta + Q_v + J(\text{rot } \mathbf{B})^2), \quad (1)$$

$$\frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\text{Eu} \nabla p + \frac{S}{\text{Re}_m} (\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \vartheta, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} = \text{rot } (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta \mathbf{B}, \quad (4)$$



$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5)$$

Последнее слагаемое в правой части уравнения (1) определяет диссипацию тепла в жидкости в результате ее конечной проводимости (джоулева диссипация). Постоянная величина J в уравнении (1) принимает различные значения в зависимости от типа граничных условий для температуры.

В переменных вихрь – функция тока – температура система уравнений (1)–(5) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + Q_v \right) - \frac{J}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} B_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \omega \text{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \\ - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \\ - \frac{S}{\text{Re}_m} \left(B_r \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + 2 \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r \partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{2 B_\theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\omega r \sin \theta, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial B_r}{\partial \tau} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \\ = \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{2 B_r}{r^2} - \frac{2 B_\theta \text{ctg} \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (9)$$



$$\begin{aligned} \text{Но } \frac{1}{\partial \tau} \frac{\partial B_\theta}{r \sin \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \left(-B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = \\ = \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для температуры рассматривались граничные условия первого и второго родов:

- граничные условия первого рода

$$\vartheta|_{\Gamma_1} = 1; \quad \vartheta|_{\Gamma_2} = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}; \quad \text{Gr} = \frac{g\beta(T_1 - T_2)r_1^3}{\nu^2}; \\ Q_v = \frac{q_v r_1'^2}{\lambda(T_1 - T_2)}; \quad J = \frac{D_m}{4\pi} \frac{r_1'^2}{\lambda(T_1 - T_2)}; \end{aligned} \quad (12)$$

- граничные условия вида (подвод тепла q_1 на внутренней границе Γ_1 и задание температуры T_2 на внешней границе Γ_2)

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right|_{\Gamma_1} = -1; \quad \vartheta|_{\Gamma_2} = 0. \quad (13)$$

Здесь

$$\vartheta = \frac{T - T_2}{q_1 r_1'} \lambda; \quad \text{Gr} = \frac{g\beta q_1 r_1'^4}{\nu^2 \lambda}; \quad Q_v = \frac{q_v r_1'}{q_1}; \quad J = \frac{D_m}{4\pi} \frac{r_1'}{q_1}; \quad (14)$$

- граничные условия вида (задание температуры T_1 на внутренней границе Γ_1 и теплового потока q_2 на внешней границе Γ_2)

$$\vartheta|_{\Gamma_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right|_{\Gamma_2} = \pm 1 \quad (15)$$

(«+1» в случае подвода тепла и «-1» – в случае отвода).

Здесь

$$\vartheta = \frac{T - T_1}{q_2 r_1'} \lambda; \quad \text{Gr} = \frac{g\beta q_2 r_1'^4}{\nu^2 \lambda}; \quad Q_v = \frac{q_v r_1'}{q_2}; \quad J = \frac{D_m}{4\pi} \frac{r_1'}{q_2}. \quad (16)$$

На оси симметрии

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right|_{\theta=0, \pi} = 0. \quad (17)$$

Граничные условия для вихря и функции тока имеют следующий вид:

$$\Psi|_{\Gamma_{1,2}} = \Psi|_{\theta=0, \pi} = \omega|_{\theta=0, \pi} = 0. \quad (18)$$

Граничные условия для вихря на границах $\Gamma_{1,2}$ предполагают линейное изменение его.

Для магнитной индукции задаются граничные условия первого рода:

$$B_r|_{\Gamma_1} = B_r|_{\Gamma_2} = 0; \quad B_\theta|_{\Gamma_1} = -0,01 \sin \theta; \quad B_\theta|_{\Gamma_2} = 0,01 \sin \theta. \quad (19)$$

На оси симметрии граничные условия для радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции имели вид

$$\left. \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right|_{\theta=0, \pi} = \left. \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=0, \pi} = 0. \quad (20)$$

При решении нестационарного варианта задачи в качестве начальных условий для всех рассчитываемых полей задавались нулевые значения. Однако для поля температуры дополнительно в качестве начального условия может быть задано аналитическое решение $\vartheta(r)$ одномерного стационарного уравнения теплопроводности.

Решение задачи осуществлялось методом конечных элементов. Для аппроксимации рассчитываемых полей использовались билинейные конечные элементы. Пробные решения задаются в форме

$$\begin{aligned} \vartheta(r, \theta) &= \sum_{\alpha} \vartheta_{\alpha} N_{\alpha}(r, \theta); \quad \psi(r, \theta) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} N_{\alpha}(r, \theta); \quad \omega(r, \theta) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} N_{\alpha}(r, \theta); \\ B_r(r, \theta) &= \sum_{\alpha} B_{r\alpha} N_{\alpha}(r, \theta); \quad B_{\theta}(r, \theta) = \sum_{\alpha} B_{\theta\alpha} N_{\alpha}(r, \theta). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь N_{α} – функции формы. Дискретный аналог системы дифференциальных уравнений (6)–(10) был получен с применением метода взвешенных невязок. По времени использовалась неявная схема.

Дискретный аналог уравнения (6) представлен системой нелинейных уравнений вида

$$\begin{aligned} \vartheta_{\alpha}^{\circ} K_{\alpha}^{\circ} + \sum_{\beta} \vartheta_{\beta} K_{\alpha\beta}^{\vartheta} + \sum_{\beta \gamma} \left[\vartheta_{\beta} \psi_{\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{\vartheta\psi} + B_{\theta\beta} B_{\theta\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta}B_{\theta}} + \right. \\ \left. + B_{\theta\beta} B_{r\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta}B_r} + B_{r\beta} B_{\theta\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{B_rB_{\theta}} + B_{r\beta} B_{r\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{B_rB_r} \right] = K_{\alpha}, \end{aligned} \quad (22)$$



где

$$K_{\alpha}^{\circ} = -\frac{1}{\text{Ho}\Delta\tau} \int_0^{\tau_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} d\theta dr,$$

$$K_{\alpha\beta}^{\vartheta} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\text{Ho}\Delta\tau} \int_0^{\tau_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} d\theta dr -$$

$$-\frac{1}{\text{Pe}} \int_0^{\tau_2} \int_0^{\pi} \left(N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - r \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg}\theta}{r} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) d\theta dr,$$

$\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера,

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{\vartheta\psi} = \int_0^{\tau_2} \int_0^{\pi} \frac{N_{\alpha}}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) d\theta dr,$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{B_0 B_0} = -\frac{J}{\text{Pe}} \int_0^{\tau_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} \left(\frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{\beta} \right) \left(\frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{\gamma} \right) d\theta dr,$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{B_0 B_r} = -\frac{J}{\text{Pe}} \int_0^{\tau_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} \left(\frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{\beta} \right) \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} \right) d\theta dr,$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{B_r B_0} = -\frac{J}{\text{Pe}} \int_0^{\tau_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{\gamma} \right) d\theta dr,$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{B_r B_r} = -\frac{J}{\text{Pe}} \int_0^{\tau_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} \right) d\theta dr, \quad K_{\alpha} = \frac{Q_v}{\text{Pe}} \int_0^{\tau_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} d\theta dr.$$

Дискретный аналог уравнения (7) имеет следующий вид:

$$\omega_{\alpha}^{\circ} L_{\alpha}^{\circ} + \sum_{\beta} \omega_{\beta} L_{\alpha\beta}^{\omega} + \sum_{\beta} \vartheta_{\beta} L_{\alpha\beta}^{\vartheta} +$$

$$+ \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \left[\omega_{\beta} \psi_{\gamma} L_{\alpha\beta\gamma}^{\omega\psi} + B_{r\beta} B_{r\gamma} L_{\alpha\beta\gamma}^{B_r B_r} + B_{r\beta} B_{\theta\gamma} L_{\alpha\beta\gamma}^{B_0 B_r} + B_{\theta\beta} B_{\theta\gamma} L_{\alpha\beta\gamma}^{B_r B_0} \right] = 0, \quad (23)$$

где

$$L_{\alpha}^{\circ} = -\frac{1}{\text{Ho}\Delta\tau} \int_0^{\tau_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} d\theta dr,$$

$$L_{\alpha\beta}^{\omega} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\text{Ho}\Delta\tau} \int_0^{\tau_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} d\theta dr - \frac{1}{\text{Re}} \int_0^{\tau_2} \int_0^{\pi} \left(N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - r \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} + \right.$$

$$\left. + N_{\alpha} \frac{\text{ctg}\theta}{r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} - N_{\alpha} \frac{N_{\beta}}{r \sin^2 \theta} \right) d\theta dr,$$



$$L_{\alpha\beta\gamma}^{\omega\psi} = \iint_{10}^{r_2\pi} \frac{N_\alpha}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial N_\gamma}{\partial \theta} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} - \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} N_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta N_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} \right) d\theta dr,$$

$$L_{\alpha\beta}^g = \frac{Gr}{Re^2} \iint_{10}^{r_2\pi} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} d\theta dr, \quad L_{\alpha\beta\gamma}^{B_r B_r} = -\frac{S}{Re_m} \iint_{10}^{r_2\pi} \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} N_\beta \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} d\theta dr,$$

$$L_{\alpha\beta\gamma}^{B_r B_\theta} = -\frac{S}{Re_m} \iint_{10}^{r_2\pi} \left(N_\alpha N_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} - r \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} N_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} + \right. \\ \left. + N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial r} N_\gamma + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \theta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} N_\gamma \right) d\theta dr,$$

$$L_{\alpha\beta\gamma}^{B_\theta B_\theta} = -\frac{S}{Re_m} \iint_{10}^{r_2\pi} \left(\frac{2}{r} N_\alpha N_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial \theta} - \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} N_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial \theta} \right) d\theta dr.$$

Дискретный аналог уравнения (8) имеет следующий вид:

$$\sum_{\beta} M_{\alpha\beta}^{\psi} \psi_{\beta} + \sum_{\beta} M_{\alpha\beta}^{\omega} \omega_{\beta} = 0, \quad (24)$$

где

$$M_{\alpha\beta}^{\psi} = -\iint_{10}^{r_2\pi} \left(\left(N_\alpha + r \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \right) \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \theta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg} \theta}{r} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} \right) d\theta dr,$$

$$M_{\alpha\beta}^{\omega} = \omega_{\beta} \iint_{10}^{r_2\pi} r^2 N_\alpha N_\beta \sin \theta d\theta dr.$$

Дискретный аналог уравнения (9) имеет следующий вид:

$$B_{r\alpha}^o R_{\alpha}^o + \sum_{\beta} B_{r\beta} R_{\alpha\beta}^{B_r} + \sum_{\beta} B_{\theta\beta} R_{\alpha\beta}^{B_\theta} + \sum_{\beta} \sum_{\gamma} [B_{r\beta} \psi_{\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}^{B_r\psi} + B_{\theta\beta} \psi_{\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}^{B_\theta\psi}] = 0, \quad (25)$$

где

$$R_{\alpha}^o = -\frac{1}{Ho\Delta\tau} \iint_{10}^{r_2\pi} r N_{\alpha} d\theta dr,$$

$$R_{\alpha\beta}^{B_r} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{Ho\Delta\tau} \iint_{10}^{r_2\pi} r N_{\alpha} d\theta dr +$$

$$+ \frac{1}{Re_m} \iint_{10}^{r_2\pi} \left(r \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} - \frac{\text{ctg} \theta}{r} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} N_{\alpha} N_{\beta} \right) d\theta dr$$

$$R_{\alpha\beta}^{B_\theta} = \frac{1}{Re_m} \iint_{10}^{r_2\pi} \left(\frac{2\text{ctg} \theta}{r} N_{\alpha} N_{\beta} + \frac{2}{r} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) d\theta dr,$$



$$R_{\alpha\beta\gamma}^{B_r\psi} = \int_0^{r_2} \int_0^\pi \left(\left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \theta} N_\beta - \frac{\cos \theta}{r \sin^2 \theta} N_\alpha N_\beta \right) \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} \right) d\theta dr,$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{B_\theta\psi} = \int_0^{r_2} \int_0^\pi \left(\left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \theta} N_\beta - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} N_\alpha N_\beta \right) \frac{\partial N_\gamma}{\partial \theta} \right) d\theta dr.$$

Дискретный аналог уравнения (10) имеет следующий вид:

$$B_{\theta\alpha}^\circ S_\alpha^\circ + \sum_\beta B_{\theta\beta} S_{\alpha\beta}^{B_\theta} + \sum_\beta B_{r\beta} S_{\alpha\beta}^{B_r} + \sum_\beta \sum_\gamma [B_{\theta\beta} \psi_\gamma S_{\alpha\beta\gamma}^{B_\theta\psi} + B_{r\beta} \psi_\gamma S_{\alpha\beta\gamma}^{B_r\psi}] = 0, \quad (26)$$

где

$$S_\alpha^\circ = -\frac{1}{\text{Ho}\Delta\tau} \int_0^{r_2} \int_0^\pi r N_\alpha d\theta dr,$$

$$S_{\alpha\beta}^{B_\theta} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\text{Ho}\Delta\tau} \int_0^{r_2} \int_0^\pi r N_\alpha (B_{\theta\alpha} - B_{\theta\alpha}^\circ) d\theta dr - \frac{1}{\text{Re}_m} \int_0^{r_2} \int_0^\pi \left(N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial r} - r \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \theta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg}\theta}{r} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin^2 \theta} N_\alpha N_\beta \right) d\theta dr,$$

$$S_{\alpha\beta}^{B_r} = -\frac{1}{\text{Re}_m} \int_0^{r_2} \int_0^\pi \left(\frac{2}{r} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} \right) d\theta dr, \quad S_{\alpha\beta\gamma}^{B_\theta\psi} = -\int_0^{r_2} \int_0^\pi \frac{N_\beta}{r \sin \theta} \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \frac{\partial N_\gamma}{\partial \theta} d\theta dr,$$

$$S_{\alpha\beta\gamma}^{B_r\psi} = -\int_0^{r_2} \int_0^\pi \frac{N_\beta}{\sin \theta} \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} d\theta dr.$$

Для решения системы нелинейных уравнений использовался метод итераций с нижней релаксацией.

На рис. 1–8 приведены расчетные поля для установившегося режима конвективного теплообмена жидкости в ядре Земли при следующих значениях безразмерных чисел подобия:

$$\text{Gr} = 10^3; \quad \text{Gr}/\text{Re}^2 = 10; \quad \text{Ho} = 1; \quad S = 10^{-2}; \quad \text{Re}_m = 2 \cdot 10^{-5}; \\ S/\text{Re}_m = 500; \quad \text{Pe} = 1.$$

Безразмерная толщина слоя была принятой равной 1,5 при значении внешнего радиуса ядра $R_0 = 2,5$. В расчетах использовалась равномерная сетка с числом узлов по радиусу 20 и по углу 60. Для температуры рассматривались граничные условия I рода. Граничные условия для магнитной индукции имели следующий вид:

$$B_r|_{\Gamma_1} = B_r|_{\Gamma_2} = 0; \quad B_\theta|_{\Gamma_1} = -0,01 \sin \theta; \quad B_\theta|_{\Gamma_2} = 0,01 \sin \theta.$$

На рис. 1 представлены результаты расчетов для неэлектропроводящей жидкости, полученные при учете конвективных и подъемных сил. Как видно из рисунка, температурные возмущения (рис. 1, *a*) в основном сосредоточены в экваториальной области ($\theta = 90^\circ$) как у внутренней границы сферы, так и у внешней. В слое образуются две конвективные ячейки (рис. 1, *б*), вращающиеся в противоположные стороны (верхняя «отрицательная» – по часовой стрелке, нижняя «положительная» – против часовой стрелки).

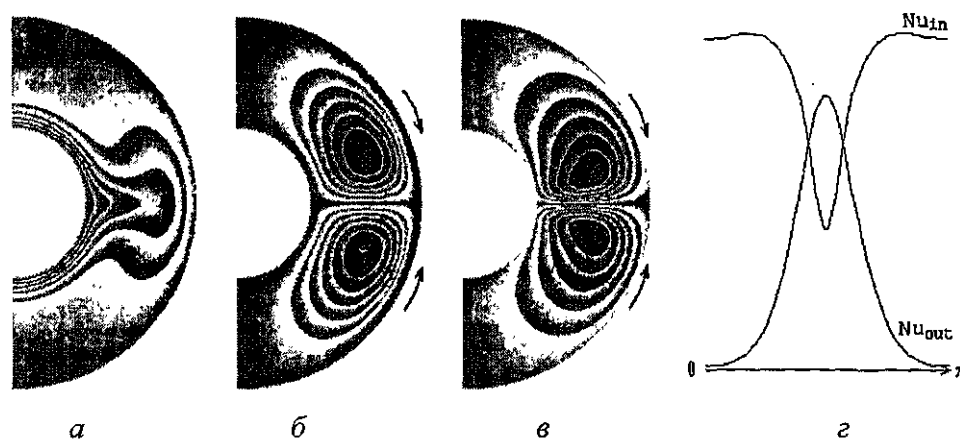


Рис. 1. Расчетные поля (без учета магнитных сил, джоулевой диссипации и внутренних источников тепла): *a* – температура; *б* – функция тока; *в* – вихрь; *г* – локальные числа Нуссельта

На рис. 1, *в* приведено поле вихря (в прослойке имеют место две вихря). Максимальные значения функции тока и вихря достигают следующих значений: $|\Psi_m| = 1,02$; $|\omega_{\max}| = 5,95$. В области экватора значения тепловых потоков Nu_{in} и Nu_{out} имеют экстремум: минимум на внутренней границе ядра и максимум – на внешней. Локальные числа Нуссельта изменяются в пределах: $1,54 \leq Nu_{in} \leq 3,68$; $0,04 \leq Nu_{out} \leq 3,00$.

На рис. 2 приведены результаты расчетов (поля температуры функции тока, вихря, распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границах слоя, радиальная и меридиональная составляющие магнитного поля) с учетом инерционных, подъемных и магнитных сил. Учет магнитных сил приводит к изменению поля температуры (рис. 2, *a*) по сравнению с результатом рис. 1, *a*. Основное изменение температуры (рис. 2, *a*) наблюдается в области полюсов, в то время как для неэлектропроводящей жидкости оно имеет место в области экватора (рис. 1, *a*). В ядре образуются две конвективные ячейки



(рис. 2, б) большего масштаба, но такой же интенсивности, как и для результата, приведенного на рис. 1, б. Однако направление движения жидкости в ячейках изменяется на противоположное (рис. 1, б и рис. 2, б).

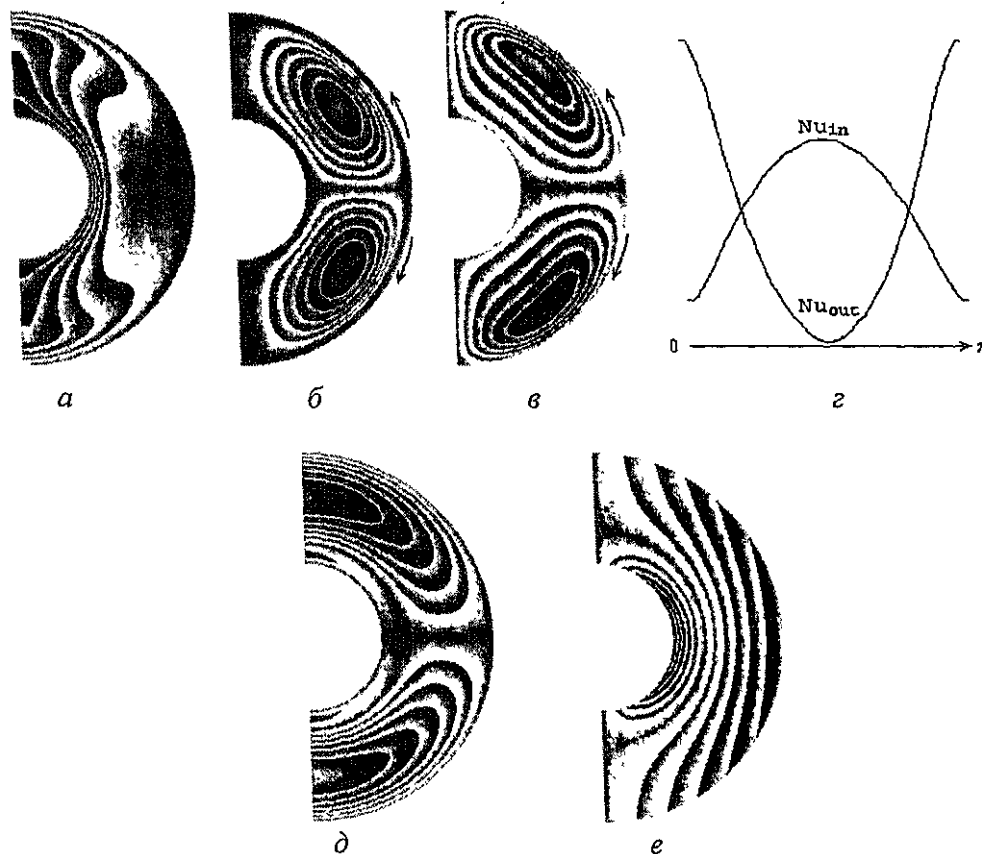


Рис. 2. Расчетные поля (с учетом магнитных сил). Джоулева диссипация и внутренние источники тепла отсутствуют):
 а – температура; б – функция тока; в – вихрь; г – локальные числа Нуссельта; д – радиальная составляющая магнитной индукции; е – меридиональная составляющая магнитной индукции

Форма вихрей (рис. 2, в), каждый из которых занимает половину расчетной области, отличается от конфигурации и расположения вихрей в слое (рис. 1, в). Максимальное значение напряженности вихря для электропроводной жидкости (рис. 2, в) возрастает по сравнению с напряженностью вихря для неэлектропроводной жидкости (рис. 1, в), достигая величины $|\omega_{\max}| = 6,44$. Диапазон изменения локальных чисел Нуссельта (рис. 2, г) для настоящего режима, по сравнению с конвек-

цией неэлектропроводной жидкости (рис. 1, *г*), увеличивается: $0,84 \leq Nu_{in} \leq 3,76$; $0,08 \leq Nu_{out} \leq 5,55$.

Характер изменения локальных чисел Нуссельта (рис. 2, *г*) изменился на противоположный по сравнению с результатом рис. 1, *г*. В прослойке имеет место регенерация радиальной составляющей магнитной индукции (рис. 2, *д*; ее максимальное значение $|\max B_r| \sim 8,54 \cdot 10^{-4}$), которая в северном полушарии принимает отрицательные значения, а в южном – положительные. Меридиональная составляющая магнитной индукции вблизи внутренней границы слоя принимает отрицательные значения, а у внешней границы – положительные (рис. 2, *е*).

На рис. 3 представлены результаты расчетов, полученные при учете джоулевой диссипации для режима, результаты которого представлены на рис. 2.

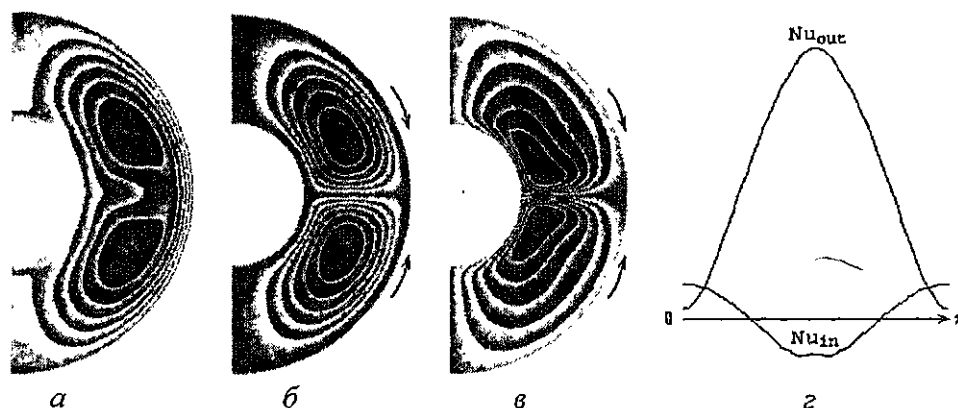


Рис. 3. Расчетные поля (с учетом магнитных сил и джоулевой диссипации. Внутренние источники тепла отсутствуют):
а – температура; *б* – функция тока; *в* – вихрь; *г* – локальные числа Нуссельта

Анализ результатов рис. 2 и 3 позволяет сделать следующий вывод. Учет джоулевой диссипации приводит к изменению поля температуры, направления движения жидкости в конвективных ячейках, формы вихрей и распределения чисел Нуссельта. В этом случае теплообмен интенсифицируется во всей прослойке (рис. 3, *а*), максимальное значение температуры достигает значения $\vartheta_{\max} = 3,15$. Интенсивности конвекции и напряженности вихря (рис. 3, *б* и *в*) также увеличиваются $|\Psi_{\max}| = 2,25$; $|\omega_{\max}| = 14,50$. Характер изменения локальных чисел Нуссельта (рис. 3, *г*) изменяется на противоположный по сравнению с



результатом рис. 2, *г*. Локальные числа Нуссельта изменяются в пределах: $-4,11 \leq Nu_{in} \leq 3,86$; $1,18 \leq Nu_{out} \leq 30,02$.

Дополнительный ко всем предыдущим факторам учет внутренних источников тепла мощностью $Q_v = 0,6$ приводит к результатам, представленным на рис. 4.

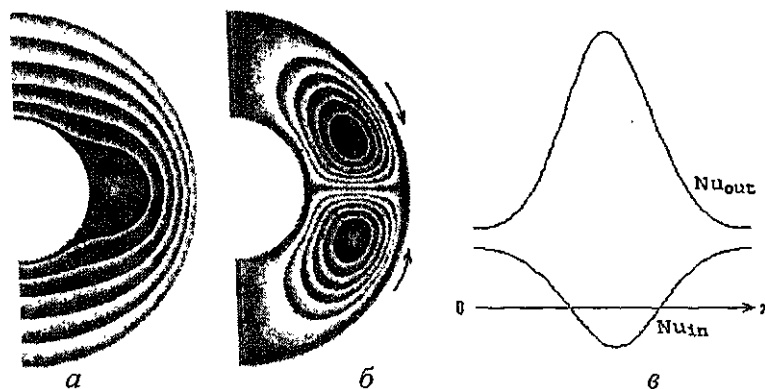


Рис. 4. Расчетные поля (с учетом магнитных сил, джоулевой диссипации и внутренних источников тепла $Q_v = 0,6$): *а* – температура; *б* – функция тока; *в* – локальные числа Нуссельта

Сравнивая результаты рис. 4 и 3, можно отметить, что учет внутренних тепловыделений приводит в основном к изменению поля температуры, не оказывая значительных качественных изменений на поля функции тока, вихря, чисел Нуссельта и магнитной индукции. Для результатов рис. 4 максимальные значения расчетных величин имеют следующие значения: $\vartheta_{max} = 1,12$; $|\Psi_{max}| = 1,20$; $|\omega_{max}| = 6,53$. Локальные числа Нуссельта изменяются в интервалах: $-0,72 \leq Nu_{in} \leq 1,07$; $1,43 \leq Nu_{out} \leq 5,00$. Поля вихря и магнитной индукции качественно аналогичны соответствующим полям, приведенным на рис. 3, *в* и рис. 2, *д* и *е*. Увеличение мощности внутренних тепловыделений по сравнению с предыдущим режимом до $Q_v = 6,0$ приводит к изменению поля температуры (рис. 5, *а*), практически не оказывая влияния на картину течения жидкости и характер изменения чисел Нуссельта (рис. 5, *б* и 4, *б*; рис. 5, *в* и 4, *в*), но количественно увеличивая интенсивность конвективного теплообмена: $\vartheta_{max} = 4,73$; $|\Psi_{max}| = 2,31$; $|\omega_{max}| = 18,10$. Локальные числа Нуссельта изменяются в пределах: $-9,55 \leq Nu_{in} \leq -0,32$; $4,65 \leq Nu_{out} \leq 40,18$.

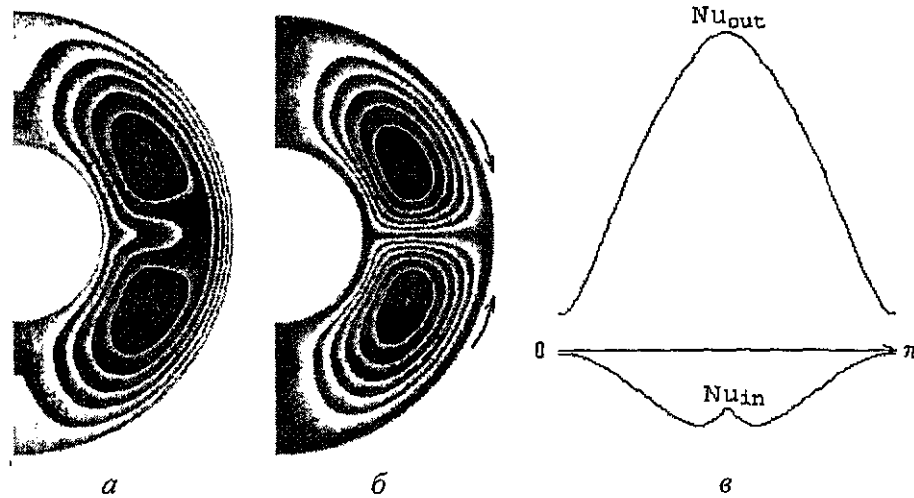


Рис. 5. Расчетные поля (с учетом магнитных сил, джоулевой диссипации и внутренних источников тепла $Q_v = 6,0$):
a – температура; *б* – функция тока; *в* – локальные числа Нуссельта

Данные результаты при достаточно больших Q_v неплохо согласуются с результатами, приведенными на рис. 3 (когда учитывалось тепло джоулевой диссипации, но не учитывались внутренние источники тепла). Этот факт говорит о том, что для режимов, в одном из которых учитывается только джоулева диссипация (результаты рис. 3), а в другом – джоулева диссипация и внутренние источники тепла (результаты рис. 5), джоулева диссипация оказывает значительное влияние (как качественное, так и количественное) на конвекцию в сферическом слое.

На рис. 6 представлены результаты конвективного теплообмена электропроводящей жидкости при учете внутренних источников тепла мощностью $Q_v = 0,6$, но без учета джоулевой диссипации. В этом случае теплообмен в прослойке осуществляется теплопроводностью, поле температуры (рис. 6, *a*) представляет собой концентрические окружности, в области образуются две конвективные ячейки (рис. 6, *б*), интенсивность которых незначительна. Значения локальных и осредненных чисел Нуссельта совпадают. $Nu_{in} = 0,94$; $Nu_{out} = 1,56$; $\vartheta_{max} = 1$; $|\Psi_{max}| = 6,89 \cdot 10^{-3}$; $|\omega_{max}| = 3,72 \cdot 10^{-2}$. Сравнивая эти результаты с результатами рис. 4 (где учитывались такие же внутренние источники тепла и джоулева диссипация), можно отметить, что учет джоулевой диссипации приводит к существенному изменению теплообмена (рис. 4, *a* и 6, *a*) и к изменению направления движения жидкости в ячейках (рис. 4, *б* и 6, *б*).

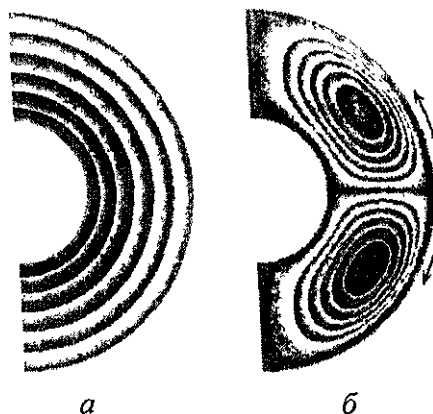


Рис. 6. Расчетные поля (с учетом магнитных сил и внутренних источников тепла $Q_v = 0,6$. Джоулева диссипация отсутствует):

a – температура; b – функция тока

На рис. 7 приведены результаты конвективного теплообмена электропроводящей жидкости при учете внутренних источников тепла мощностью $Q_v = 6,0$, но без учета джоулевой диссипации.

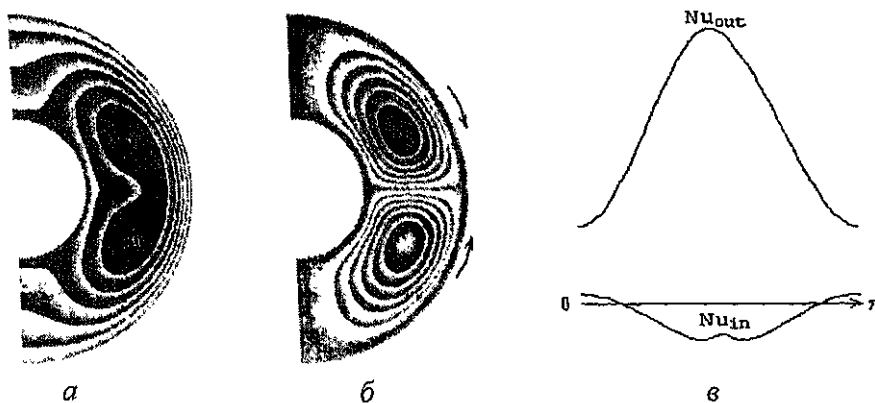


Рис. 7. Расчетные поля (с учетом магнитных сил и внутренних источников тепла $Q_v = 6,0$. Джоулева диссипация отсутствует):

a – температура; b – функция тока; c – локальные числа Нуссельта

Сравнивая эти результаты с результатами рис. 5 (где учитывались такие же внутренние источники тепла и джоулева диссипация), можно отметить, что учет джоулевой диссипации при достаточно больших Q_v практически не влияет на поле температуры (рис. 5, a и 7, a), картину течения жидкости (рис. 5, b и 7, b) и характер изменения чисел Нуссельта (рис. 5, c и 7, c), однако интенсифицирует конвекцию. Из этого анализа следует, что для режимов, в одном из которых учитыва-

ются только внутренние источники тепла (результаты рис. 7), а в другом – джоулева диссипация и внутренние источники тепла (результаты рис. 5), джоулева диссипация слабо влияет на качественную картину конвекции в сферическом слое, интенсифицируя ее количественно. Для результатов рис. 6 $\vartheta_{\max} = 1,83$; $|\Psi_{\max}| = 1,59$; $|\omega_{\max}| = 8,47$. Локальные числа Нуссельта изменяются в пределах: $-1,91 \leq Nu_{\text{in}} \leq 0,47$; $4,09 \leq Nu_{\text{out}} \leq 14,44$.

На рис. 8 представлены результаты, аналогичные результатам рис. 1 (без учета магнитных сил, внутренних источников тепла и джоулевой диссипации), за одним исключением: для результатов рис. 8 отношение $Gr/Re^2 = 100$.

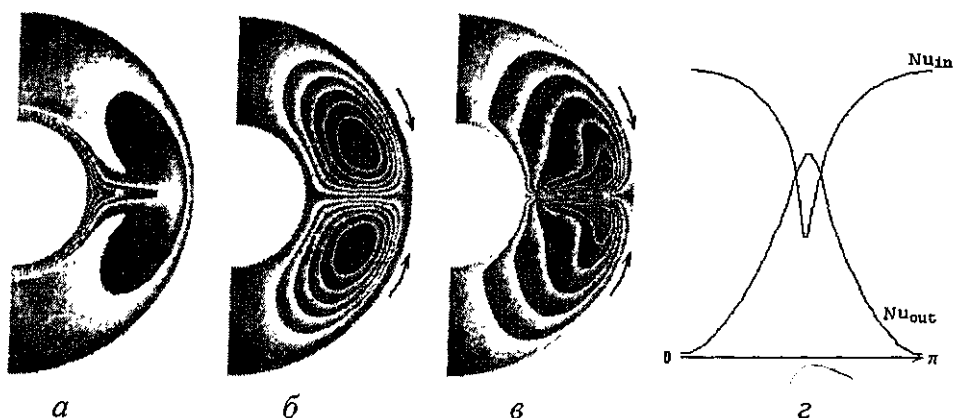


Рис. 8. Расчетные поля, $Gr/Re^2 = 100$ (без учета магнитных сил, джоулевой диссипации и внутренних источников тепла):
a – температура; *б* – функция тока; *в* – локальные числа Нуссельта

Увеличение отношения Gr/Re^2 на порядок приводит к интенсификации конвекции. По сравнению с результатами рис. 1 максимальные величины функции тока, напряженности вихря и локальных чисел Нуссельта возрастают, принимая следующие значения: $|\Psi_{\max}| = 4,56$; $|\omega_{\max}| = 28,20$; $2,67 \leq Nu_{\text{in}} \leq 6,36$; $0,07 \leq Nu_{\text{out}} \leq 4,50$. Некоторые изменения претерпевает поле температуры (рис. 8, *a* и 1, *a*).

На рис. 9–11 приведены поля температуры, функции тока и распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границах сферического слоя, внешний радиус которого $R_0 = 6$, для установившегося режима конвективного теплообмена электропроводящей жидкости. Безразмерные числа подобия имели следующие значения:



$$\begin{aligned} Gr/Re^2 &= 34; \quad Ho = 3; \quad Q_v = 0,67; \quad S = 3,3; \\ Re_m &= 1,1 \cdot 10^{-5}; \quad S/Re_m = 3 \cdot 10^5; \quad Pe = 3,3. \end{aligned}$$

В расчетах использовалась равномерная сетка с числом узлов по радиусу 40 и по углу 90. Граничные условия для температуры и магнитной индукции были те же, что и выше.

На рис. 9 представлены результаты, полученные при наличии внутренних источников тепла, но без учета джоулевой диссипации.

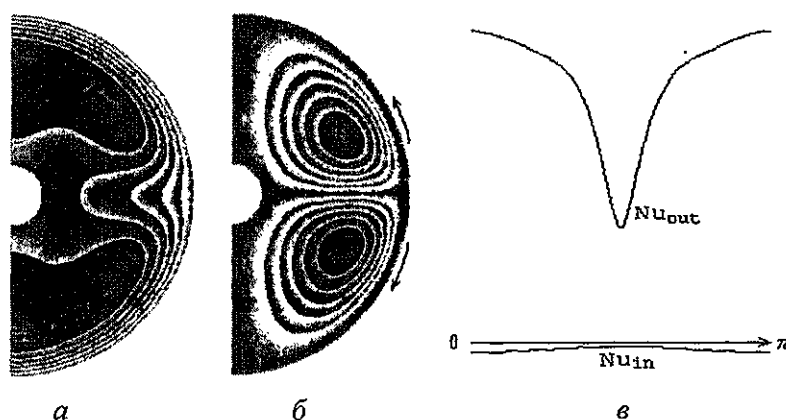


Рис. 9. Расчетные поля (с учетом магнитных сил и внутренних источников тепла. Джоулева диссипация отсутствует):
а – температура; б – функция тока; в – локальные числа Нуссельта

Как видно из рисунка, поле температуры (рис. 9, а) претерпевает значительные изменения вблизи наружной границы, причем минимум теплового потока (рис. 9, в) имеет место в области экватора ($\theta = 90^\circ$), оставаясь практически неизменным на внутренней границе слоя. Локальные числа Нуссельта изменяются в пределах: $-0,32 \leq Nu_{in} \leq -0,13$; $3,73 \leq Nu_{out} \leq 9,99$. В слое образуются две конвективные ячейки (рис. 9, б), вращающиеся в противоположные стороны (нижняя «отрицательная» – по часовой стрелке, верхняя «положительная» – против часовой стрелки). Максимальные значения температуры и функции тока достигают следующих значений: $\vartheta_{max} = 1,36$; $|\Psi_m| = 9,83$.

На рис. 10 приведены аналогичные результаты, полученные с учетом джоулевой диссипации, но без внутренних источников тепла.

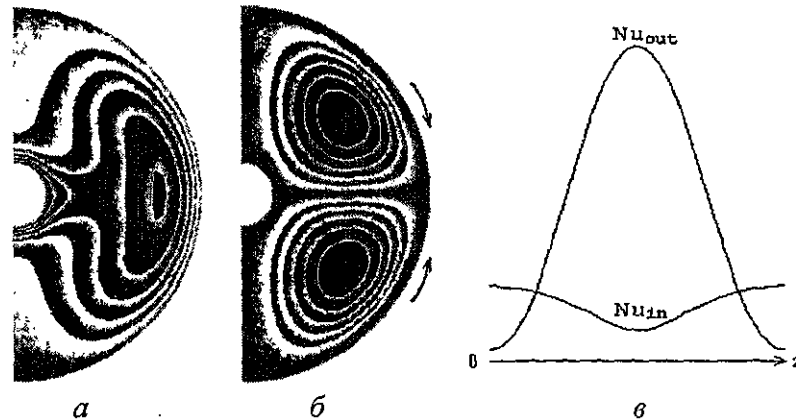


Рис. 10. Расчетные поля (с учетом магнитных сил и джоулевой диссипации. Внутренние источники тепла отсутствуют): а – температура; б – функция тока; в – локальные числа Нуссельта

Сравнение результатов рис. 10 показывает, что влияние внутренних источников тепла и джоулевой диссипации приводит к значительным изменениям теплообмена и гидродинамики жидкости в шаровом слое. Изотермы (рис. 10, а) сгущаются вблизи наружной границы. Изменение направления вращения конвективных ячеек (рис. 10, б) на противоположное по сравнению с результатом рис. 9, б приводит к перестройке поля температуры (рис. 10, а) у границ слоя, причем на наружной поверхности имеет место максимум теплового потока (рис. 10, в), не минимум, как для результата, приведенного на рис. 9, в). Локальные числа Нуссельта изменяются в пределах: $0,69 \leq Nu_{in} \leq 1,6$; $0,28 \leq Nu_{out} \leq 7,06$. Максимальные значения температуры и функции тока достигают следующих значений: $\vartheta_{max} = 1$; $|\Psi_m| = 4,71$. Интенсивность конвективного теплообмена уменьшается.

На рис. 11 представлены результаты расчетов, полученные при учете как внутренних источников тепла, так и джоулевой диссипации. Одновременный учет этих двух факторов качественно не изменил структуру течения в слое по сравнению с результатом, представленным на рис. 10, б, хотя поле температуры претерпело изменения.

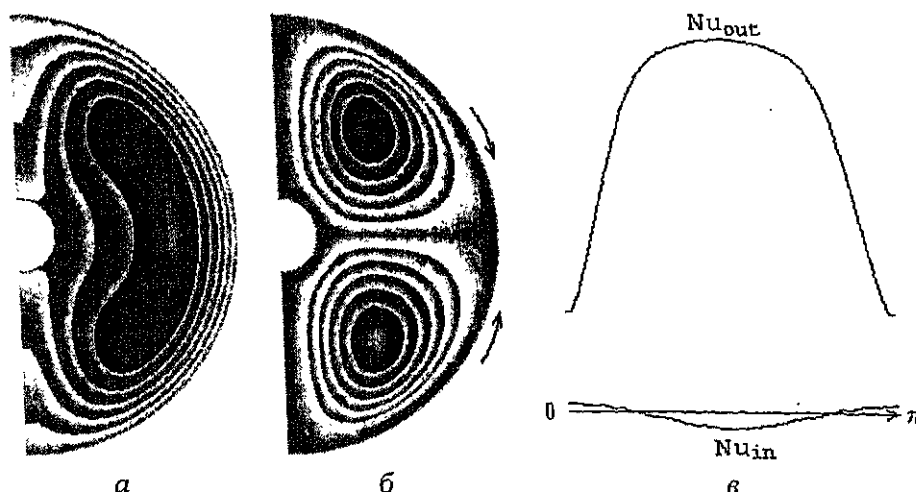


Рис. 11. Расчетные поля (с учетом магнитных сил, джоулевой диссипации и внутренних источников тепла):
а – температура; б – функция тока; в – локальные числа Нуссельта

Направление вращения конвективных ячеек (рис. 11, б) не изменилось по сравнению с результатом рис. 10, б. Максимальные значения температуры и функции тока достигают следующих значений: $\vartheta_{\max} = 1,99$; $|\Psi_m| = 6,49$. Максимум теплового потока (рис. 11, в), также как и для результата, приведенного на рис. 10, в, наблюдается на наружной границе в области экваториальной плоскости. Локальные числа Нуссельта изменяются в пределах: $-0,56 \leq Nu_m \leq 0,26$; $3,24 \leq Nu_{out} \leq 12,16$.

Обозначения

ϑ , $V = V/u_0$, $B = B/B_0$, $\tau = t/t_0$ – безразмерные температура, скорость, магнитная индукция и время; $Eu = \frac{P_0}{\rho_0 u_0^2}$ – число Эйлера; $Re = \frac{u_0 r_1}{\nu}$ – число Рейнольдса; $Pe = \frac{u_0 r_1}{a}$ – число Пекле; $No = \frac{u_0 t_0}{r_1}$ – число гомохронности; $Re_m = \frac{u_0 r_1}{D_m}$, $S = \frac{\sigma B_0^2 r_1}{\rho_0 u_0}$ – магнитное число Рейнольдса и параметр магнитного взаимодействия; λ – коэффициент теплопроводности вещества жидкого ядра Земли; r_1' – размерный текущий радиус внутренней сферы; R_0 – безразмерный радиус внешней



сферы; P_0, ρ_0, u_0, t_0 – характерные масштабы соответствующих величин: давления, плотности, скорости и времени. Индексы: 0 – масштабы величин; m – магнитный; 1, 2 – значения параметров на внутренней и внешней границах; in – внутренний; out – внешний, α – индекс суммирования.

Библиографические ссылки

1. Соловьев С. В., Кузнецов С. В. Естественная конвекция электропроводящей жидкости в сферическом слое. Ч. I. Постановка задачи // Инженерно-физический журнал. 1998. Т. 71, № 5.
2. Соловьев С. В. Магнитная гидродинамика Земли. Частные случаи // Тихоокеанская геология. 1999. Т. 18, № 3.