



УДК 519.633

© В. А. Гладких, Т. В. Кожевникова, 2009

О СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Гладких В. А. – канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. лаборатории «Информационные технологии», тел.: (4212) 22-69-74, e-mail: gladkih@as.khb.ru; Кожевникова Т. В. – науч. сотр. лаборатории «Информационные технологии», тел.: (4212) 22-74-69, e-mail: ktvsl@mail.ru. (ВЦ ДВО РАН)

Рассматривается начально-краевая задача для трехмерного параболического уравнения. Разностная схема строится с помощью оригинального варианта метода взвешенных невязок, апробированного ранее в аналогичной задаче для двумерного параболического уравнения. Установлено, что в общем случае схема не аппроксимирует исходную задачу, но описаны разбиения, для которых элементарная корректировка схемы делает ее аппроксимирующей.

The initial boundary value problem for the three-dimensional parabolic equation is considered. The difference method is developed with the use of the original variant of the weighted residuals method, approved earlier in a similar problem for the two-dimensional parabolic equation. It is established that generally the scheme fails to approximate the initial problem, but the partitions are described for which elementary updating of the scheme renders it capable of approximation.

Ключевые слова: разностная схема, аппроксимация, численное моделирование, дифференциальные уравнения.

Рассмотрим трехмерное обобщение двумерного параболического уравнения [1, 2]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + u_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z} - D \Delta \Phi - \gamma \Phi - \xi = 0 \quad (1)$$

в трехмерной ограниченной области $\tilde{\Omega}$ с гладкой границей $\tilde{\Gamma}$. Как и в [1, 2], задано условие Дирихле

$$\Phi = \tilde{\eta} \quad (2)$$

и условие общего вида

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \tilde{\lambda} \Phi = \tilde{\mu} \quad (3)$$

на границе $\tilde{\Gamma}$. Здесь $\Phi(t, x, y, z)$ – искомая функция, D, γ – постоянные коэффициенты, $u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), u_3(x, y, z)$ – кусочно-гладкие функции, $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали.

Задано начальное распределение искомой функции

$$\Phi_0(t=0, x, y, z) = \Phi_0(x, y, z), \quad (4)$$

где Φ_0 – некоторая кусочно - гладкая в области $\tilde{\Omega}$ функция, на границе совпадающая с $\tilde{\eta}$. Требуется определить функцию Φ в последующие моменты времени.

Аналитическими методами получить решение задачи (1–3) удастся только в наиболее простых, модельных случаях. Они представляют скорее теоретический, чем практический интерес. Важные для практики задачи, как правило, решаются численными методами. Среди них наиболее приспособлен для решения задачи (1–3) в областях сложной формы конечно-элементный метод взвешенных невязок. Варианты этого метода также называют: метод Галеркина, метод наименьших квадратов, метод моментов, метод подобластей и т. д. Не вдаваясь в детальное обсуждение специфических особенностей этих общеизвестных методов, отметим, что все они на этапе численной реализации на ЭВМ используют процедуру обращения матриц. При решении реальных задач (когда число конечных элементов и, следовательно, размерность матриц измеряется тысячами), эта процедура требует значительных вычислительных ресурсов.

С целью преодоления указанных трудностей, авторы предлагают использовать нижеизложенный метод.

Построение основной системы уравнений методом L4M

Домножим левую и правую части уравнения (1) на кусочно-гладкую весовую функцию ω и проведем интегрирование по области $\tilde{\Omega}$. В результате получим интегральное тождество

$$\int_{\tilde{\Omega}} \omega \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + u_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \gamma \Phi - \xi \right\} d\tilde{\Omega} + D \int_{\tilde{\Omega}} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\} d\tilde{\Omega} = 0. \quad (5)$$



Пусть h – некоторый достаточно малый линейный размер. Приближим область $\tilde{\Omega}$ трехмерным многогранником $\Omega \in \tilde{\Omega}$ и представим его в виде объединения

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k,$$

где Ω_k – k -й тетраэдр, m – их число. Через V_k будем обозначать объем k -го тетраэдра. Будем предполагать, что длины ребер тетраэдров имеют порядок $O(h)$, площади граней – порядок $O(h^2)$, а их объемы – порядок $O(h^3)$. Тетраэдры, имеющие i -й узел в качестве основной из вершин, будем называть совершенными в i -м узле. Для их объединения будем использовать обозначение

$$\Omega_{(i)} = \bigcup_{k \in \{k\}_{(i)}} \Omega_k,$$

где $\{k\}_{(i)}$ – совокупность номеров совершенных в i -м узле тетраэдров, $V_{(i)}$ – их суммарный объем.

В качестве пробного пространства будем рассматривать линейную оболочку, натянутую на кусочно-линейные функции-крышки $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (функции $\varphi_i(x, y, z)$ – это такие кусочно-линейные функции, которые равны единице в i -м узле и нулю во всех остальных узлах). Носитель такой базисной функции $\varphi_i(x, y, z)$ – область $\Omega_{(i)}$. На k -м тетраэдре эта функция задается с.о.:

$$\varphi_i(x, y, z) = a_{k,i}x + b_{k,i}y + c_{k,i}z + d_{k,i},$$

где коэффициенты $a_{k,i}, b_{k,i}, c_{k,i}, d_{k,i}$ находятся из уравнений:

$$a_{k,i}x_j + b_{k,i}y_j + c_{k,i}z_j + d_{k,i} = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{i\}_k,$$

где $\{i\}_k$ – совокупность номеров четырех узлов-вершин k -го тетраэдра.

Весовое пространство метода ЛМ в трехмерном случае – это линейная оболочка, натянутая на базисные функции следующего вида:

$$\psi_i = -\frac{20}{V_i}(\varphi_i - 3\varphi_i^2), \quad i = 1, \dots, n.$$

Возьмем тетраэдр с номером k . Пусть $i, j, l \in \{i\}_k$. Справедлива формула, обобщающая аналогичную из работы [1]:

$$\int_{\Omega_k} \varphi_i^m \varphi_j^n \varphi_l^p d\Omega = \frac{m!n!p!}{(m+n+p+3)!} 6V_k,$$

где m, n, p – любые неотрицательные числа. Легко видеть также, что системы базисных функций пробного и весового пространства биортогональны:

$$\int_{\Omega} \psi_i \varphi_j d\Omega = \delta_{ij}, i = 1, \dots, n.$$

За пределами области Ω базисные функции пробного и весового пространства доопределим нулем.

Приближенное решение будем искать в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i(t) \varphi_i. \quad (6)$$

Также, как и в работе [1], получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\Phi_i}{dt} + \sum_{j=1}^n A_{ij} \Phi_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} f_i &= \int_{\Omega} \psi_i \xi d\Omega, \|A_{ij}\| = \sum_{r=1}^5 \|A_{ij}^{(r)}\|, A_{ij}^{(r)} = \sum_{k \in \{k\}_i} A_{k,ij}^{(r)}, A_{k,ij}^{(1)} = \int_{\Omega_k} \psi_i u_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} d\Omega, \\ A_{k,ij}^{(2)} &= \int_{\Omega_k} \psi_i u_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} d\Omega, A_{k,ij}^{(3)} = \int_{\Omega_k} \psi_i u_3 \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} d\Omega, A_{k,ij}^{(5)} = - \int_{\Omega_k} \psi_i \gamma \varphi_j d\Omega, \\ A_{k,ij}^{(4)} &= D \int_{\Omega_k} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Способ учета граничного условия (2) (как и в [1]) очевиден:

$$\Phi_i = \eta_i, \quad i = n_2 + 1, \dots, n \quad (9)$$

для узла с номером i . Для граничного условия (3) (как и в [1]) запишем:

$$\sum_{j=1}^n R_{ij} \Phi_j = q_i, \quad i = n_1 - 1, \dots, n_2, \quad (10)$$

где

$$R_{ij} = \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + \lambda \varphi_i \right) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} + \lambda \varphi_j \right) ds, \quad q_i = \int_{\Gamma_N} \mu \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + \lambda \varphi_i \right) ds. \quad (11)$$



Как и прежде [1], систему обыкновенных дифференциальных уравнений (7), соотношения (9) и систему алгебраических уравнений (10) назовем схемой {7,9,10}. Изучим аппроксимационные свойства этой схемы.

Аппроксимация

Как и в [1], мерой погрешности аппроксимации схемы {7,9,10} дифференциальной задачи (1)–(4) на ее решении Φ назовем величину

$$\rho(h) = \max_{i=1, \dots, n_1} \left| \frac{d[\Phi]_i}{dt} + \sum_{j=1}^n A_{ij} [\Phi]_j - f_i \right| + \max_{i=n_1+1, \dots, n_2} \left| \sum_{j=1}^n R_{ij} [\Phi]_j - q_i \right| + \max_{i=n_2+1, \dots, n} |[\Phi]_i - [\eta]_i|,$$

где $[\Phi]_i$ – след функции Φ в узле с номером i . Если $\rho(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то схема {7,9,10} аппроксимирует по пространственным переменным задачу (1–4) на решении. Порядок $\rho(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ – порядок аппроксимации на решении.

Проведем вспомогательные построения. Рассмотрим i -й узел. Будем предполагать, что он является началом исходной прямоугольной системы координат. Пусть Ω_k – один из тетраэдров, совершенных в этом узле. Его вершину, которая совпадает с узлом i , будем называть первой, а три другие вершины – второй, третьей и четвертой. Номера соответствующих узлов – $i_{k1}, i_{k2}, i_{k3}, i_{k4}$, а их радиус-векторы – $\vec{R}_{k,r}$ ($r = 1, 2, 3, 4$), причем

$$i_{k,1} = i, \vec{R}_{k,1} = 0.$$

Пусть $\vec{S}_{k,r}$ ($r = 1, 2, 3, 4$) – вектор площади грани тетраэдра, лежащей против узла $i_{k,r}$ (грани ориентированы векторами их площадей наружу). След базисной функции $\varphi_{i_{k,r}}$ на тетраэдре Ω_k будем обозначать через $\varphi_{k,r}$; тогда

$$\varphi_{k,r} = -\frac{\vec{S}_{k,r}}{3V_k} \left(\vec{r}' + \frac{\vec{R}_{k,r}}{3} \right), \vec{r}' = \vec{r} - \sum_{r=1}^4 \frac{\vec{R}_{k,r}}{3}, 2\vec{S}_{k,1} = [\vec{R}_{k,3}, \vec{R}_{k,4}] + [\vec{R}_{k,4}, \vec{R}_{k,2}] + [\vec{R}_{k,2}, \vec{R}_{k,3}], 2\vec{S}_{k,2} = [\vec{R}_{k,4}, \vec{R}_{k,3}], 2\vec{S}_{k,3} = [\vec{R}_{k,2}, \vec{R}_{k,4}], 2\vec{S}_{k,4} = [\vec{R}_{k,3}, \vec{R}_{k,2}]. \quad (12)$$

Непосредственная проверка убеждает в справедливости следующих равенств:



$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^4 (\bar{S}_{k,r})_x x_{k,r} &= \sum_{r=1}^4 (\bar{S}_{k,r})_y y_{k,r} = \sum_{r=1}^4 (\bar{S}_{k,r})_z z_{k,r} = -3V_k \sum_{r=1}^4 (\bar{S}_{k,r})_x y_{k,r} = \\
&= \sum_{r=1}^4 (\bar{S}_{k,r})_x z_{k,r} = \sum_{r=1}^4 (\bar{S}_{k,r})_y x_{k,r} = \sum_{r=1}^4 (\bar{S}_{k,r})_y z_{k,r} = \sum_{r=1}^4 (\bar{S}_{k,r})_z x_{k,r} = \\
&= \sum_{r=1}^4 (\bar{S}_{k,r})_z y_{k,r} = \sum_{r=1}^4 \bar{S}_{k,r} = \sum_k \bar{S}_{k,1} = 0.
\end{aligned} \quad (13)$$

Пусть $i = 1, \dots, n_1$. Имеет место очевидное равенство:

$$d[\Phi]/dt = [d\Phi/dt]_i.$$

Поскольку

$$\sum_{ij=1}^n A_{ij}[\Phi]_j = \sum_{r=1}^5 \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(r)}[\Phi]_j, \quad (14)$$

то будем последовательно придавать необходимую форму каждой из пяти сумм, фигурирующих в правой части этого выражения. Для первой суммы, воспользовавшись равенствами (13), получим

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)}[\Phi]_j &= \sum_{k \in \{k\}_i} \sum_{j=1}^n A_{k,ij}^{(1)}[\Phi]_j = \sum_{k \in \{k\}_i} \sum_{r=1}^4 A_{k,ii_r}^{(1)}[\Phi]_{i_r} = \\
&= -\frac{1}{3V_i} \sum_{k \in \{k\}_i} \sum_{r=1}^4 (\bar{S}_{k,r})_x [u_1]_i \{[\Phi]_i + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_i x_{k,r} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_i \times \\
&\quad \times y_{k,r} + [\partial \Phi / \partial z]_i z_{k,r} \} + O(h) = [u_1 \partial \Phi / \partial x]_i + O(h).
\end{aligned} \quad (15)$$

Для второй и третьей сумм аналогично получим

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}^{(2)}[\Phi]_j = [u_2 \partial \Phi / \partial y]_i + O(h), \quad \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(3)}[\Phi]_j = [u_3 \partial \Phi / \partial z]_i + O(h). \quad (16)$$

Для четвертой суммы, также согласно (13), получим



$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(4)}[\Phi]_j &= \sum_{k \in \{k\}_i} \sum_{r=1}^4 A_{k,ir}^{(4)}[\Phi]_{i_r} = \frac{10D}{9V_i} \sum_{k \in \{k\}_i} \sum_{r=1}^4 \left\{ (\bar{S}_{k,1})_x (\bar{S}_{k,r})_x + (\bar{S}_{k,1})_y \times \right. \\
 &\times (\bar{S}_{k,r})_y + (\bar{S}_{k,1})_z (\bar{S}_{k,r})_z \left. \right\} \frac{1}{V_k} \left\{ [\Phi]_i + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_i x_{k,r} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_i y_{k,r} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_i z_{k,r} \right\} + \\
 &+ \frac{10D}{9V_i} \sum_{k \in \{k\}_i} \sum_{r=1}^4 \frac{1}{V_k} \left\{ (\bar{S}_{k,1})_x (\bar{S}_{k,r})_x + (\bar{S}_{k,1})_y (\bar{S}_{k,r})_y + (\bar{S}_{k,1})_z (\bar{S}_{k,r})_z \right\} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right]_i \times \right. \\
 &\times x_{k,r}^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right]_i y_{k,r}^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]_i z_{k,r}^2 + \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right]_i x_{k,r} y_{k,r} + \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right]_i x_{k,r} z_{k,r} + \\
 &+ \left. \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right]_i y_{k,r} z_{k,r} + O(h^2) \right\} = K_i^{(1)} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right]_i + K_i^{(2)} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right]_i + K_i^{(3)} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right]_i + \\
 &+ K_i^{(4)} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right]_i + K_i^{(5)} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right]_i + K_i^{(6)} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]_i + O(h), \tag{17}
 \end{aligned}$$

где

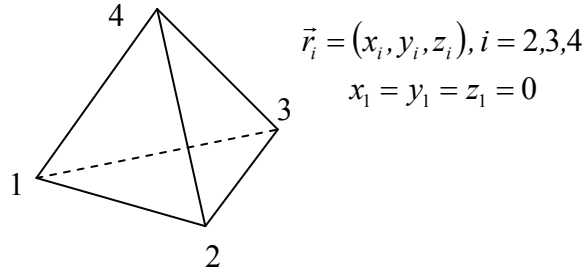
$$\begin{aligned}
 K_i^{(1)} &= \frac{10D}{9V_i} \sum_{k \in \{k\}_i} \sum_{r=1}^4 \frac{1}{V_k} \bar{S}_{k,1} \bar{S}_{k,r} x_{k,r} y_{k,r}, \quad K_i^{(2)} = \frac{10D}{9V_i} \sum_{k \in \{k\}_i} \sum_{r=1}^4 \frac{1}{V_k} \bar{S}_{k,1} \bar{S}_{k,r} x_{k,r} z_{k,r}, \\
 K_i^{(3)} &= \frac{10D}{9V_i} \sum_{k \in \{k\}_i} \sum_{r=1}^4 \frac{1}{V_k} \bar{S}_{k,1} \bar{S}_{k,r} y_{k,r} z_{k,r}, \quad K_i^{(4)} = \frac{5D}{9V_i} \sum_{k \in \{k\}_i} \sum_{r=1}^4 \frac{1}{V_k} \bar{S}_{k,1} \bar{S}_{k,r} x_{k,r}^2, \tag{18} \\
 K_i^{(5)} &= \frac{5D}{9V_i} \sum_{k \in \{k\}_i} \sum_{r=1}^4 \frac{1}{V_k} \bar{S}_{k,1} \bar{S}_{k,r} y_{k,r}^2, \quad K_i^{(6)} = \frac{5D}{9V_i} \sum_{k \in \{k\}_i} \sum_{r=1}^4 \frac{1}{V_k} \bar{S}_{k,1} \bar{S}_{k,r} z_{k,r}^2.
 \end{aligned}$$

Для пятой суммы и для f_i элементарно получаем

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}^{(5)}[\Phi]_j = -[\gamma \Phi]_i + O(h), \quad f_i = [\xi]_i + O(h). \tag{19}$$

Для произвольного разбиения области Ω на тетраэдры равенства $K_i^1 = K_i^2 = K_i^3 = 0 (i = 1, \dots, n_1)$ не выполняются, и, следовательно, мера аппроксимации имеет порядок $O(1)$. Однако здесь, как и в [1], ситуация не столь безнадежна. Укажем два простых способа корректировки нашей схемы, гарантирующих аппроксимацию задачи на решении.

Для k -го тетраэдра (тетраэдра (1–2–3–4)):



$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i), i = 2, 3, 4$$

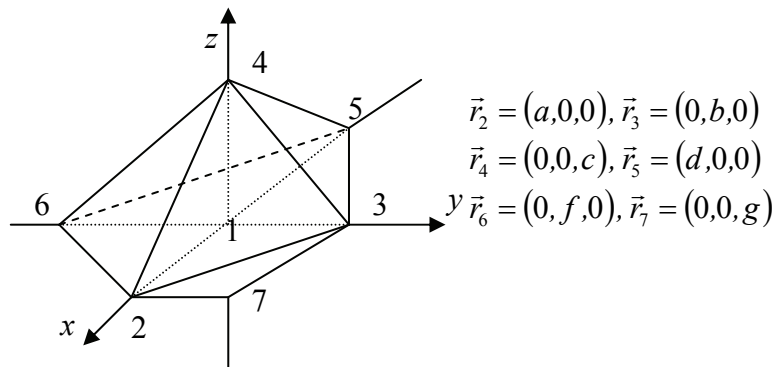
$$x_1 = y_1 = z_1 = 0$$

Рис. 1

запишем вспомогательные формулы

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 \bar{S}_2 &= \frac{1}{4} \left\{ -r_3^2 r_4^2 + (\vec{r}_3, \vec{r}_4)^2 + (\vec{r}_2, \vec{r}_3) r_4^2 - (\vec{r}_2, \vec{r}_4) (\vec{r}_4, \vec{r}_3) + \right. \\ &\quad \left. + (\vec{r}_2, \vec{r}_4) r_3^2 - (\vec{r}_2, \vec{r}_3) (\vec{r}_3, \vec{r}_4) \right\}; \\ \bar{S}_1 \bar{S}_3 &= \frac{1}{4} \left\{ -r_2^2 r_4^2 + (\vec{r}_2, \vec{r}_4)^2 + (\vec{r}_2, \vec{r}_3) r_4^2 - (\vec{r}_2, \vec{r}_4) (\vec{r}_4, \vec{r}_3) + \right. \\ &\quad \left. + (\vec{r}_3, \vec{r}_4) r_2^2 - (\vec{r}_2, \vec{r}_3) (\vec{r}_2, \vec{r}_4) \right\}; \\ \bar{S}_1 \bar{S}_4 &= \frac{1}{4} \left\{ -r_2^2 r_3^2 + (\vec{r}_2, \vec{r}_3)^2 + (\vec{r}_3, \vec{r}_4) r_2^2 - (\vec{r}_2, \vec{r}_3) (\vec{r}_2, \vec{r}_4) + \right. \\ &\quad \left. + (\vec{r}_2, \vec{r}_4) r_3^2 - (\vec{r}_2, \vec{r}_3) (\vec{r}_3, \vec{r}_4) \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

и рассмотрим следующий многогранник:



$$\vec{r}_2 = (a, 0, 0), \vec{r}_3 = (0, b, 0)$$

$$\vec{r}_4 = (0, 0, c), \vec{r}_5 = (d, 0, 0)$$

$$\vec{r}_6 = (0, f, 0), \vec{r}_7 = (0, 0, g)$$

Рис. 2

Этот многогранник состоит из восьми тетраэдров:

$$\begin{aligned} &(1-2-3-4), (1-3-5-4), (1-5-6-4), (1-6-2-4), \\ &(1-3-2-7), (1-5-3-7), (1-6-5-7), (1-2-6-7), \end{aligned} \quad (21)$$



причем

$$\begin{aligned} \vec{r}_2\vec{r}_3 &= \vec{r}_2\vec{r}_6 = \vec{r}_3\vec{r}_5 = \vec{r}_5\vec{r}_6 = \vec{r}_2\vec{r}_4 = \vec{r}_3\vec{r}_4 = \vec{r}_5\vec{r}_4 = \\ &= \vec{r}_6\vec{r}_4 = \vec{r}_2\vec{r}_7 = \vec{r}_3\vec{r}_7 = \vec{r}_5\vec{r}_7 = \vec{r}_6\vec{r}_7 = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Непосредственные вычисления приводят к первому способу корректировки.

Предложение 1. Если многогранник разбить на восемь совершенных прямоугольных тетраэдров (в прямом угле), то

$$K_i^{(1)} = K_i^{(2)} = K_i^{(3)} = 0, K_i^{(4)} = K_i^{(5)} = K_i^{(6)} = -5D, \quad (i = 1, \dots, n_1). \quad (23)$$

Рассмотрим теперь следующий элементарный тетраэдр:

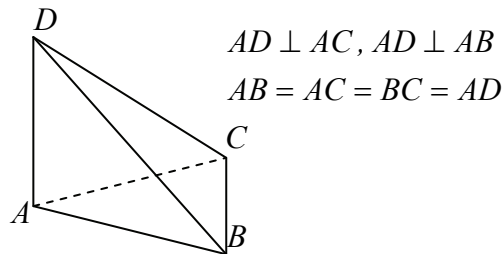


Рис. 3

Из шести таких тетраэдров можно составить многоугольник – семигранник, боковые грани которого (шесть) треугольники, а основание – правильный шестиугольник. Приставив к этому многограннику снизу точно такой же, получим двенадцатигранник, грани которого равны $\triangle BCD$.

Предложение 2. Подвергнем рассмотренный выше двенадцатигранник преобразованию:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Тогда

$$K_i^{(1)} = K_i^{(2)} = K_i^{(3)} = 0, K_i^{(4)} = K_i^{(5)} = -\frac{10}{3}D; K_i^{(6)} = -5D. \quad (25)$$

Это предложение, как и первое, доказывается непосредственным вычислением – формулы (20) расписываются для каждого элементарного (составляющего) тетраэдра.

Формулы (22), (25) решают поставленную задачу.



Библиографические ссылки

1. *Гладких В. А., Кожевникова Т. В., Окулов Н. А.* Об одном способе построения разностной схемы для параболического уравнения: препринт ВЦ ДВО РАН. Хабаровск, 1996.

2. *Баканов К. Г., Кожевникова Т. В., Окулов Н. А.* Численное моделирование процесса распространения неконсервативной примеси в реке с притоками: препринт ВЦ ДВО РАН. Хабаровск, 1996.