



УДК 536.25

© С. В. Соловьев, Л. С. Хаенко, 2010

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В НАКЛОННОЙ ПОЛОСТИ

*Соловьев С. В.* – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры «Прикладная математика», e-mail: solovjovsv@rambler.ru; *Хаенко Л. С.* – спец. кафедры «Прикладная математика» (ТОГУ)

Целью работы является математическое моделирование естественно-конвективного теплообмена в замкнутой наклонной полости, проектирование и создание программного продукта, расчет полей температуры, функции тока и вихря.

The purpose of the work is the mathematical modeling of natural convective heat transfer in the closed inclined cavity, designing and creation of software, the computation of temperature, functions of stream, and vortex.

*Ключевые слова:* моделирование, естественная конвекция, замкнутая полость.

### Введение

В связи с развитием новой техники все большее значение приобретают вопросы тепло- и массообмена. Решение многих задач космической, авиационной техники и энергетики неразрывно связано с теорией теплообмена, в том числе с теплообменом путем естественной конвекции. Повышенный интерес к естественной конвекции отражает растущее внимание к проблемам энергетики и охраны окружающей среды. Изучение процессов естественной конвекции имеет большое значение в связи с проблемой отвода тепла во многих электронных приборах, процессах, энергетических установках и системах. Этот механизм может определять безопасность эксплуатации объектов и их элементов в условиях, когда обычные способы отвода тепла невозможны или не приводят к нужному результату. Большой класс задач естественно-конвективного теплообмена в плоских слоях (наклонных, незамкнутых) и их устойчивость рассмотрены в работах [1–3]. Однако практический интерес вызывают случаи тел с ограниченным объемом, например, прямоугольная полость, на границах которой задаются граничные условия для температуры не только первого, но и второго рода, а в жидкости распределены как источники тепла (положительные), так и стоки тепла (отрицательные). В этой связи в настоящей работе проведено математическое моделирование естественно-

конвективного теплообмена жидкости в наклонной прямоугольной полости, нагреваемой с одной стороны и охлаждаемой с противоположной. В жидкости, находящейся в полости, распределены внутренние источники (стоки) теплоты. На боковых стенках полости для температуры заданы граничные условия второго рода по закону Фурье. Угол наклона полости  $\alpha$  изменяется в диапазоне  $0-90^{\circ}$ . В результате проведенных численных экспериментов получены поля температуры, функции тока и вихря. Проанализировано влияние угла наклона на теплообмен и структуру течения в полости.

#### Математическая постановка задачи

Конвективный теплообмен в наклонной полости в приближении Буссинеска описывается следующей системой безразмерных уравнений (задача решалась в переменных вихрь  $\xi$ , функция тока  $\psi$ , температура  $T$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \xi}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \xi}{\partial Y} \right) &= -\text{Ra} \left( \frac{\partial T}{\partial Y} \sin \alpha + \frac{\partial T}{\partial X} \cos \alpha \right) + \Delta \xi, \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial T}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial T}{\partial Y} \right) &= \Delta T + Q_v, \\ \Delta \psi &= -\xi. \end{aligned}$$

В качестве начальных условий при  $\tau = 0$  задавались нулевые значения функций:  $\psi = \xi = T = 0$ ,  $0 \leq X \leq \frac{W}{H} = L$ ,  $0 \leq Y \leq 1$ .

Граничные условия имели следующий вид:

$$\text{при } X = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial X}(0, Y, \tau) = Q_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial Y}(0, Y, \tau) = -\frac{\partial \psi}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0,$$

$$\text{при } X = L: \quad \frac{\partial T}{\partial X}(L, Y, \tau) = Q_2, \quad \frac{\partial \psi}{\partial Y}(L, Y, \tau) = -\frac{\partial \psi}{\partial X}(L, Y, \tau) = 0,$$

$$\text{при } Y = 0: \quad T(X, 0, \tau) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial Y}(X, 0, \tau) = -\frac{\partial \psi}{\partial X}(X, 0, \tau) = 0,$$

$$\text{при } Y = 1: \quad T(X, 1, \tau) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial Y}(X, 1, \tau) = -\frac{\partial \psi}{\partial X}(X, 1, \tau) = 0.$$

Приняты следующие обозначения безразмерных величин:

$$X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}; \quad \tau = \frac{ta}{H^2} \quad - \text{время}; \quad T = \frac{(\theta - \theta_0)}{(\theta_h - \theta_c)} \quad - \text{температура};$$

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda}, \quad \text{Ra} = \frac{\rho_0^2 g c_p \beta l^3 (\theta_h - \theta_c)}{\lambda \mu} \quad - \text{числа Прандтля и Рэлея};$$



$$Q_v = \frac{q_v H^2}{\lambda(\theta_h - \theta_c)} - \text{внутренний источник тепла}; Q_1 = \frac{q_1 H}{\lambda(\theta_h - \theta_c)},$$

$$Q_2 = \frac{q_2 H}{\lambda(\theta_h - \theta_c)} - \text{тепловые потоки на боковых стенках полости.}$$

На рис. 1 представлена физическая постановка задачи.

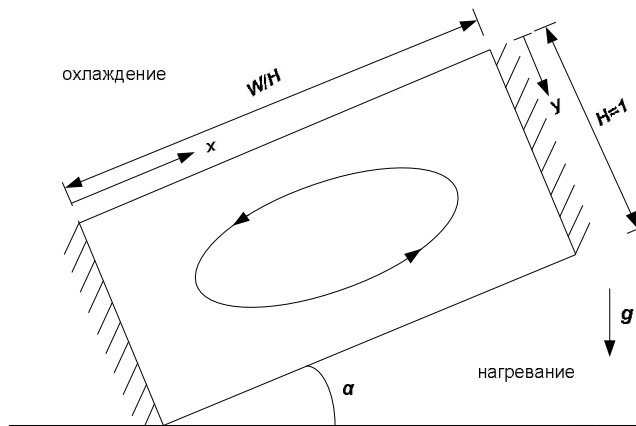


Рис. 1. Физическая постановка задачи

Для решения системы дифференциальных уравнений использовался метод конечных разностей. По времени использовалась явная схема. Погрешность аппроксимации использованных явных разностных схем определялась первым порядком точности по времени и вторым – по координатам. Величина шагов по времени и координатам выбиралась в результате численных экспериментов, чтобы обеспечить устойчивость вычислительного процесса [1, 4, 5]. Разностный аналог уравнения Пуассона решался методом Зейделя.

Конечно-разностные аналоги дифференциальных уравнений представлены в виде:

$$\begin{aligned} \xi_{i,j}^{n+1} = & \xi_{i,j}^n + (-Ra \cdot Pr) \left( \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2h_y} \sin \alpha + \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2h_x} \cos \alpha \right) + \\ & + \frac{\xi_{i+1,j}^n - 2\xi_{i,j}^n + \xi_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{\xi_{i,j+1}^n - 2\xi_{i,j}^n + \xi_{i,j-1}^n}{h_y^2} - \\ & - \frac{(\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n)(\xi_{i+1,j}^n - \xi_{i-1,j}^n) - (\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n)(\xi_{i,j+1}^n - \xi_{i,j-1}^n)}{4h_x h_y} \Delta \tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n &+ \left( \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{h_y^2} - \right. \\
 &\left. - \frac{(\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n)(T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n) - (\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n)(T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n)}{4h_x h_y} + Q_v \right) \Delta\tau, \\
 \frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} &+ \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} = -\xi_{i,j}^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Здесь

$X_i = ih_x, (i = 0, 1, \dots, N), Y_j = jh_y, (j = 0, 1, \dots, M), h_x = \frac{L}{N}, h_y = \frac{1}{M}$  – шаги по координатам  $X$  и  $Y$  соответственно;  $\Delta\tau$  – шаг по времени;  $f(X_i, Y_j, \tau_n) = f_{i,j}^n$ .

Начальные условия:  $\Psi_{i,j}^0 = \xi_{i,j}^0 = T_{i,j}^0 = 0$ .

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{0,j}^n = 0, \quad \frac{\partial \Psi_{0,j}^n}{\partial X} = \frac{\Psi_{1,j}^n - \Psi_{-1,j}^n}{2h_x} = 0, \quad \frac{\partial T_{0,j}^n}{\partial X} = \frac{T_{1,j}^n - T_{-1,j}^n}{2h_x} = Q_1, \\
 \xi_{0,j}^n = -\frac{2\Psi_{1,j}^n}{h_x^2}, \quad j = \overline{0, M}, \quad \Psi_{i,0}^n = 0, \quad \frac{\partial \Psi_{i,0}^n}{\partial Y} = \frac{\Psi_{i,1}^n - \Psi_{i,-1}^n}{2h_y} = 0, \quad T_{i,0}^n = -\frac{1}{2}, \\
 \xi_{i,0}^n = -\frac{2\Psi_{i,1}^n}{h_y^2}, \quad i = \overline{0, N}, \quad \frac{\partial \Psi_{N,j}^n}{\partial X} = \frac{\Psi_{N+1,j}^n - \Psi_{N-1,j}^n}{2h_x} = 0, \\
 \frac{\partial T_{N,j}^n}{\partial X} = \frac{T_{N+1,j}^n - T_{N-1,j}^n}{2h_x} = Q_2, \quad \Psi_{N,j}^n = 0, \quad \xi_{N,j}^n = -\frac{2\Psi_{N-1,j}^n}{h_x^2}, \quad j = \overline{0, M}, \\
 \Psi_{i,M}^n = 0, \quad \frac{\partial \Psi_{i,M}^n}{\partial Y} = \frac{\Psi_{i,M+1}^n - \Psi_{i,M-1}^n}{2h_y} = 0, \quad T_{i,M}^n = \frac{1}{2}, \\
 \xi_{i,M}^n = -\frac{2\Psi_{i,M-1}^n}{h_x^2}, \quad i = \overline{0, N}. \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

В результате численного решения задачи были получены поля температуры, функции тока и вихря.



### Результаты расчетов

В настоящей работе приведены результаты, когда внутренние источники тепла отсутствовали –  $Q_v = 0$ , а на боковых стенках полости были заданы условия адиабатичности:  $Q_1 = Q_2 = 0$ . Рамки данной статьи не позволяют представить здесь результаты для общего случая ( $Q_v \neq 0, Q_1 \neq Q_2 \neq 0$ ) в силу ограниченности объема и большого количества графического материала.

На рис. 2–5 представлены результаты расчета для прямоугольной полости высотой  $H = 1$ , шириной  $W = 2$  и числа Прандтля  $Pr = 0,73$ . Шаг по времени выбирался в результате численных экспериментов, чтобы обеспечить устойчивость вычислительного процесса –  $\Delta\tau = 10^{-4}$ .

На рис. 2 представлены результаты расчета температурного поля для Релея  $Ra = 10^3$  и для разных углов наклона полости в момент времени  $t = 0,15$ .

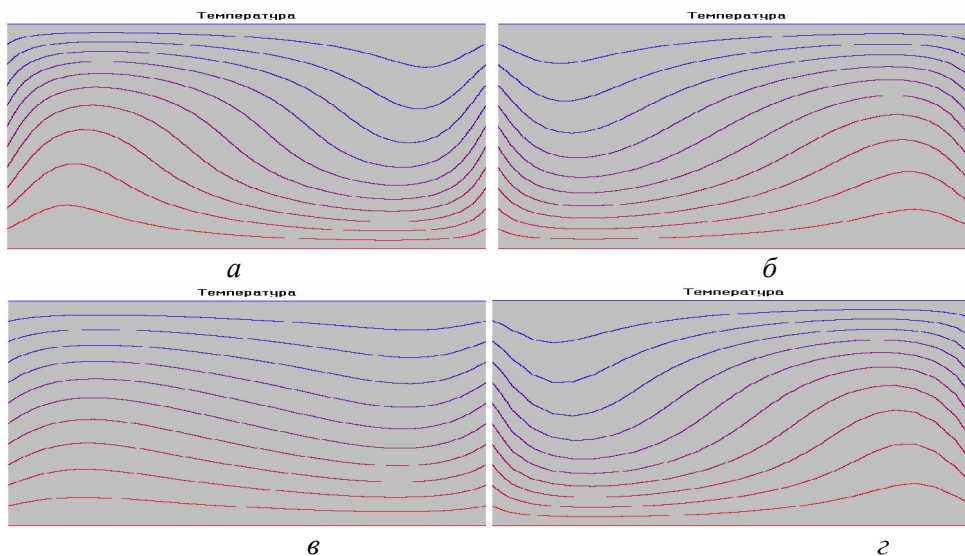


Рис. 2. Поле температуры:  $a - \alpha = 30^0$ ;  $б - \alpha = 45^0$ ;  $в - \alpha = 60^0$ ;  $г - \alpha = 90^0$

Из анализа приведенных результатов следует, что для значения угла  $\alpha = 30^0$  изотермы имеют максимум в области правой границы полости и минимум – в области левой. При увеличении угла наклона до значения  $\alpha = 45^0$  происходит перестройка поля течения и теплообмена в полости, характер поведения изотерм меняется на противоположный: минимум в области правой (нижней) границы, максимум – в области левой (верхней). Дальнейшее увеличение угла наклона до значения  $\alpha = 60^0$  приводит к изменению поля течения и теплообмена в полости, которое качественно согласуется с результатом рис. 2, а. При  $\alpha = 90^0$  характер теплообмена аналогичен режиму, приведенному на рис. 2, б. То есть изменение угла наклона полости в интервале  $\alpha = 0-30, 30-45, 45-60, 60-90^0$  приводит к перестройке поля температуры, которое происходит вследствие изменения структуры течения жидкости. Результаты,

подтверждающие такое изменение структуры течения жидкости в полости в зависимости от угла ее наклона, представлены на рис. 3.

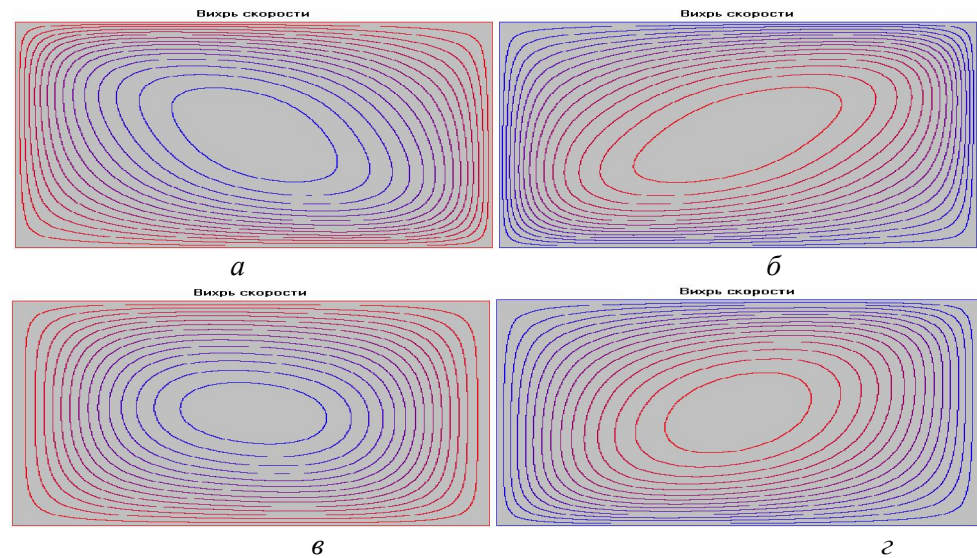


Рис. 3. Поле вихря скорости:  $a - \alpha = 30^0$ ;  $b - \alpha = 45^0$ ;  $в - \alpha = 60^0$ ;  $г - \alpha = 90^0$

На рис. 3 представлены результаты расчета поля вихря скорости для тех же значений параметров и времени в зависимости от угла наклона полости. Для  $\alpha = 30^0$  изолинии вихря скорости вытянуты вдоль диагонали: левый верхний угол – правый нижний угол. В полости жидкость движется по часовой стрелке (изолинии вихря скорости имеют отрицательные значения). Для  $\alpha = 45^0$  изолинии вихря скорости вытянуты вдоль диагонали (расположенной противоположно предыдущему режиму): левый нижний угол – правый верхний угол. В полости жидкость движется против часовой стрелки (изолинии вихря скорости имеют положительные значения). Для  $\alpha = 60^0$  и  $\alpha = 90^0$  структура течения жидкости в полости аналогична результатам, приведенным на рис. 3, *а* и рис. 3, *б* соответственно. Для всех углов наклона максимальное значение вихря скорости (по модулю) находится в его центре, уменьшаясь до нуля на границах полости. Таким образом, влияние угла наклона полости проявляется во взаимном изменении тепловой и гидродинамической структуры исследуемого явления.

Результаты расчета поля функции тока не приводятся, поскольку структура течения для разных углов наклона качественно одна и та же – одноячеечное течение во всей полости (направление течения и знак значений функции тока те же, что и для вихря скорости).

На рис. 4, 5 представлены результаты расчета поля температуры и поля вихря скорости для тех же параметров, кроме значения числа Релея, которое увеличилось по сравнению с предыдущим режимом в 10 раз –  $Ra = 10^4$ .

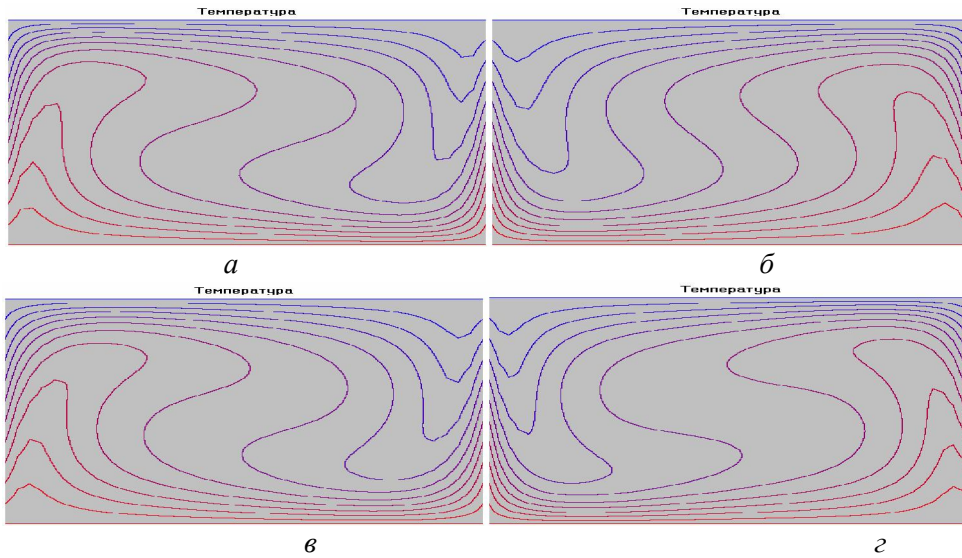


Рис. 4. Поле температуры:  $a - \alpha = 30^{\circ}$ ;  $b - \alpha = 45^{\circ}$ ;  $в - \alpha = 60^{\circ}$ ;  $г - \alpha = 90^{\circ}$

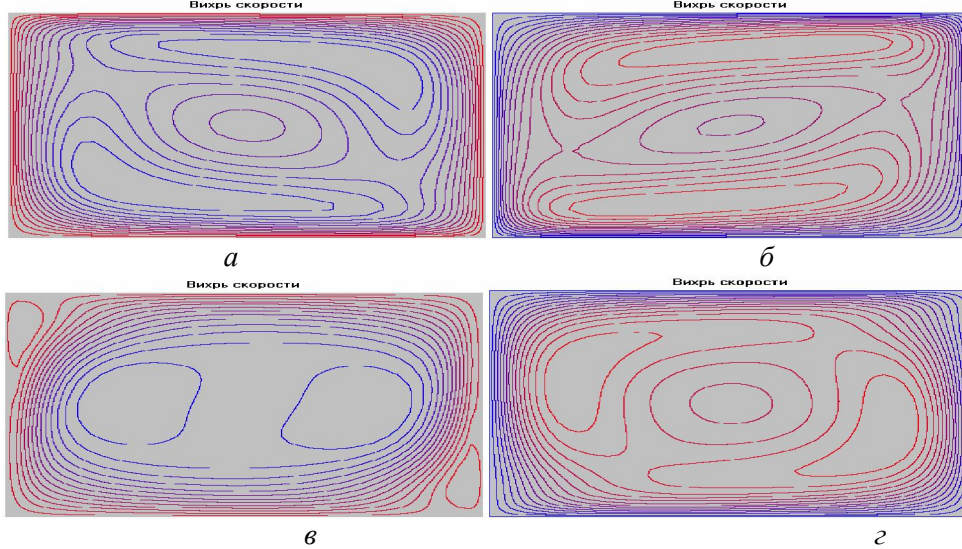


Рис. 5. Поле вихря скорости:  $a - \alpha = 30^{\circ}$ ;  $b - \alpha = 45^{\circ}$ ;  $в - \alpha = 60^{\circ}$ ;  $г - \alpha = 90^{\circ}$

Увеличение числа Релея привело к интенсификации конвективного теплообмена в полости. Как поле температуры, так и поле вихря скорости значительно отличаются от результатов, приведенных выше. Однако, несмотря на такие различия, поведение изотерм на рис. 4 качественно согласуется по расположению максимумов и минимумов с результатами, представленными на рис. 2. При этом результаты расчета вихря скорости (рис. 5) как количественно, так и качественно отличаются от результатов, приведенных на рис. 3.

Были проведены расчеты с числом Прандтля  $Pr = 10$ . Качественно они не отличались от приведенных выше результатов.

Полученные результаты сравнивались с результатами работы [6]. Сравнение показало хорошее качественное согласование.

В результате проведенных исследований был создан программный комплекс, позволяющий моделировать свободно-конвективный теплообмен в наклонной замкнутой полости.

### Библиографические ссылки

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., 1972.
2. Джалурия Й. Естественная конвекция. Тепло и массообмен / под ред. В. И. Полежаева. М., 1983.
3. Исаев С. И. Теория тепломассообмена / под ред. А. И. Леонтьева. М., 1979.
3. Патанкар С. В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в канале / пер. с англ. Е. В. Калабина; под ред. Г. Г. Янькова. М., 2003.
4. Тарунин Е. Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск, 1990.
5. Catton I., The effect of insulating vertical walls on the onset of motion in a fluid heated from below, Int. J. Heat Mass Transfer 15, (1972).