ВЕСТНИК ТОГУ. 2010. № 2 (17)

УДК 536.25

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В ЯДРЕ С УЧЕТОМ ДЖОУЛЕВОЙ ДИССИПАЦИИ

Соловьев С. В. – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры «Прикладная математика», e-mail: solovjovsv@rambler.ru (ТОГУ); *Гринкруг Л. С.* – канд. техн. наук, проф. ректор, тел.: 8-426-224-0146 (ДВГСГА); *Цой Р. И.* – канд. техн. наук, проф. завкафедрой «Информационные системы и прикладная информатика» (ДВГСГА)

Рассмотрен конвективный теплообмен электропроводящей жидкости в сферическом слое, моделирующем жидкое ядро Земли. Сделан анализ влияния различных физических параметров на течение и теплообмен жидкости в сферической прослойке.

The convective heat transfer of electric conducting fluid in a spherical layer simulating a liquid Earth's core is considered. The influence of various physical parameters on the flow and heat transfer of a fluid in the spherical layer is analyzed.

Ключевые слова: моделирование, конвекция, магнитная гидродинамика, теплообмен, электропроводная жидкость, ядро Земли, джоулева диссипация.

Рассматриваются тепловые и магнитогидродинамические процессы в ядре Земли, вещество которого является электропроводящей жидкостью. В настоящей работе, в отличие от кинематических моделей гидромагнитного динамо (в которых задается поле скорости жидкости), рассматриваются совместно уравнения энергии – с учетом внутренних источников тепла и джоулевой диссипации, движения – с учетом магнитных, вязких и подъемных сил, индукции, неразрывности для скорости и магнитной индукции. Используется приближение Буссинеска. Ускорение свободного падения направлено к центру ядра. Математическая постановка задачи в безразмерной форме описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{\mathrm{Ho}}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}+(\mathbf{V}\nabla)\vartheta=\frac{1}{\mathrm{Pe}}(\Delta\vartheta+\mathrm{Q_v}+\mathrm{J}(\mathrm{rot}\,\mathbf{B})^2)\,; \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Ho}}\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\tau}+(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}=-\mathrm{Eu}\nabla\mathrm{P}+\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{Re_m}}(\mathrm{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B})+\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{V}+\square\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\vartheta\,; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Ho}}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} = \mathrm{rot}(\mathbf{V}\times\mathbf{B}) + \frac{1}{\mathrm{Re}_m}\Delta\mathbf{B}\,; \quad (3)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = 0\,;\ \ \mathrm{div}\mathbf{B} = 0\,. \quad (4)$$

Постоянная величина J в уравнении энергии (1), определяющая джоулеву диссипацию, принимает различные значения в зависимости от типа граничных условий для температуры.

При записи системы уравнений (1)–(4) использованы следующие обозначения:
$\mathbf{V} = V/u_0$, $\mathbf{B} = B/B_0$, $\tau = t/t_0$ – безразмерные скорость, магнитная индукция и время; $\mathrm{Eu} = \frac{P_0}{\rho_0 u_0^2}$, $\mathrm{Re} = \frac{u_0 r_1}{\nu}$, $\mathrm{Pe} = \frac{u_0 r_1}{a}$ – числа Эйлера, Рейнольдса и Пекле; $\mathrm{Ho} = \frac{u_0 t_0}{r_1}$ – число гомохронности; $\mathrm{Re}_m = \frac{u_0 r_1}{D_m}$, $S = \frac{\sigma B_0^2 r_1}{\rho_0 u_0}$ – магнитное число Рейнольдса и параметр магнитного взаимодействия; r', r_1, r_2 – размерные текущий радиус, радиус внутренней и внешней сферы ядра; $r = r'/r_2$, $R_0 = r_2/r_1$ – безразмерные текущий радиус и радиус внешней сферы ядра; θ – полярный угол; λ – коэффициент теплопроводности вещества ядра; D_m, σ – коэффициенты магнитной вязкости и электропроводности; P_0, ρ_0, u_0, t_0, B_0 – характерные масштабы давления, плотности, скорости, времени и магнитной индукции.

Задача (1)–(4) решалась в переменных температура-вихрь-функция тока (в сферических координатах с учетом симметрии по долготе φ):

$$\frac{1}{\mathrm{Ho}}\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{\mathrm{Pe}}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + Q_v\right) - \frac{J}{\mathrm{Pe}}\left(\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}B_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)^2 = 0\,;$$

$$\frac{1}{\mathrm{Ho}}\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \omega\mathrm{ctg}\theta\frac{\partial \psi}{\partial r}\right] =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r^2 \sin^2\theta}\right] -$$

$$- \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + \frac{S}{\mathrm{Re}_m}\left[B_r\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + 2\frac{B_r}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{\partial B_r}{\partial r}\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r}\frac{\partial B_r}{\partial r} - \right.$$

$$-\frac{B_r}{r}\frac{\partial^2 B_r}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial r}\frac{\partial B_r}{\partial\theta}+\frac{B_\theta}{r}\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial r}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}+\frac{2B_\theta}{r^2}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}-$$

$$\left.-\frac{B_\theta}{r^2}\frac{\partial^2 B_r}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial B_r}{\partial\theta}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}\right];$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-\frac{\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=-\omega r\sin\theta\,;$$

$$\frac{1}{Ho}\frac{\partial B_r}{\partial\tau}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{B_\theta}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+B_r\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial\theta}+\frac{\partial B_r}{\partial\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right]+$$

$$+\frac{1}{Re_m}\left[\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial B_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_r}{\partial\theta^2}+\frac{\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial B_r}{\partial\theta}-\right.$$

$$\left.-\frac{2B_r}{r^2}-\frac{2B_\theta\mathrm{ctg}\theta}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}\right];$$

$$\frac{1}{Ho}\frac{\partial B_\theta}{\partial\tau}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[-B_r\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}-\frac{\partial B_r}{\partial r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{B_\theta}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial\theta}+\frac{B_\theta}{r^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial B_\theta}{\partial r}\right]+\frac{1}{Re_m}\left[\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}-\right.$$

$$\left.-\frac{B_\theta}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 B_r}{\partial\theta}\right].$$

Для температуры задавались следующие граничные условия:

1. Температуры на $\Gamma_{1,2}$: $\vartheta|_{\Gamma_1}=1$; $\vartheta|_{\Gamma_2}=0$;

2. Подвод тепла q_1 на Γ_1 и задание температуры T_2 на Γ_2:

$$\partial\vartheta/\partial r|_{\Gamma 1}=-1;\ \vartheta|_{\Gamma_2}=0;$$

3. Задание температуры T_1 на Γ_1 и теплового потока q_2 на Γ_2:

$\partial\vartheta/\partial r|_{\Gamma 2}=\pm 1$; $\vartheta|_{\Gamma 1}=0$ («+» – подвод тепла; «–» – отвод тепла).

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}\right|_{\theta=0,\pi}=0\,.\ \left.\frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right|_{\theta=0,\pi}=\left.\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}\right|_{\theta=0,\pi}=0\,,\ \Psi|_{\Gamma_{1,2}}=\Psi|_{\theta=0,\pi}=\omega|_{\theta=0,\pi}=0\,,$$

$$B_r|_{\Gamma_1}=B_r|_{\Gamma_2}=0;\ B_\theta|_{\Gamma_1}=-0{,}01\sin\theta\,;\ B_\theta|_{\Gamma_2}=0{,}01\sin\theta\,.$$

В начальный момент времени задавались нулевые значения рассчитываемых полей (для температуры могло задаваться аналитическое решение $\vartheta(r)$ одномерного стационарного уравнения теплопроводности).

Для решения задачи использовался метод конечных элементов. Для аппроксимации рассчитываемых полей применялись билинейные конечные элементы. Дискретный аналог системы дифференциальных уравнений был получен с применением метода взвешенных невязок. Полученная система алгебраических уравнений решалась методом Зейделя с применением релаксации. По времени использовалась неявная схема.

Результаты расчетов

На рис. 1 приведены результаты стационарных расчетов (для температуры использовались граничные условия 1) без учета джоулевой диссипации и внутренних источников тепла для безразмерных чисел подобия: $Gr = 10^3$; $Re = 10$ ($Gr/Re^2 = 10$); $S = 10^{-5}$; $Re_m = 1$ ($S/Re_m = 10^{-5}$); $Pe = 10$; $r_2/r_1 = 2{,}5$.

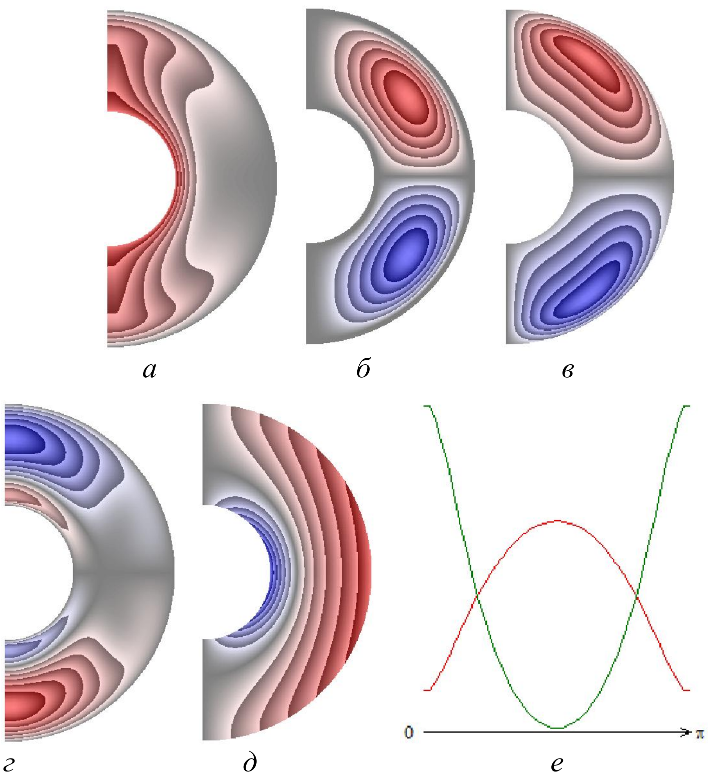


Рис. 1. Расчетные поля (джоулева диссипация и внутренние источники тепла отсутствуют): а – температура; б – функция тока; в – вихрь; г – радиальная составляющая магнитной индукции; д – меридиональная составляющая магнитной индукции; е – локальные числа Нуссельта (красный цвет – на границе Γ_1, зеленый – на Γ_2)

Основное изменение температуры (рис. 1, *а*) происходит в области полюсов. В ядре образуются две конвективные ячейки и два вихря (рис. 1, *б, в*). В северном полушарии жидкость движется против часовой стрелки (значения функции тока и вихря положительные), а в южном – по часовой стрелке (значения функции тока и вихря отрицательные). Радиальная составляющая магнитной индукции (рис. 1, *г*) в северном полушарии принимает отрицательные значения, а в южном – положительные (за исключением небольшой области вблизи внутренней границы Γ_1). Меридиональная составляющая магнитной индукции вблизи границы Γ_1 принимает отрицательные значения, а у внешней границы Γ_2 – положительные (рис. 1, *д*). Локальные числа Нуссельта (рис. 1, *е*): $0{,}79 \le \mathrm{Nu}_{\Gamma 1} \le 3{,}90$; $0{,}07 \le \mathrm{Nu}_{\Gamma 2} \le 6{,}03$. Осредненные: $\overline{\mathrm{Nu}}_{\Gamma 1} = 3{,}17$; $\overline{\mathrm{Nu}}_{\Gamma 2} = 1{,}38$.

На рис. 2 представлены результаты расчетов, полученные с учетом джоулевой диссипации, но без внутренних источников тепла (значения безразмерных чисел те же, что и для результатов рис. 1).

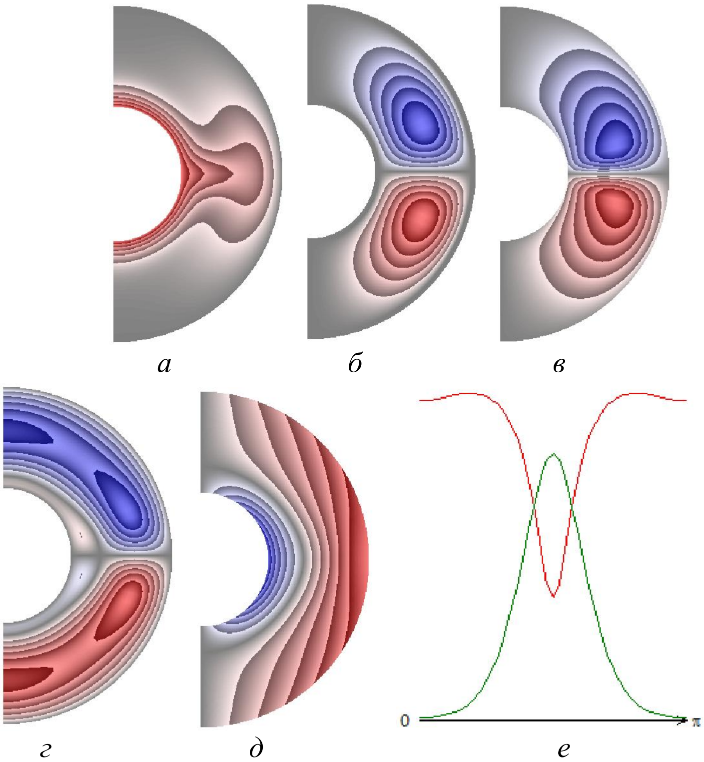
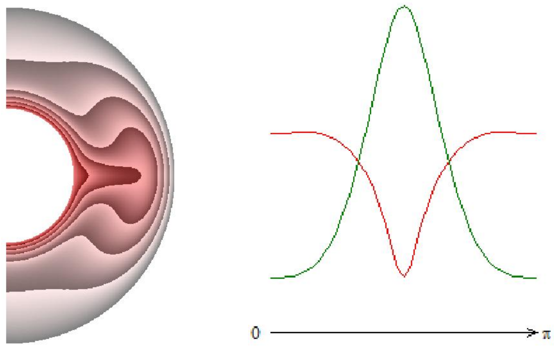


Рис. 2. Расчетные поля (с учетом джоулевой диссипации. Внутренние источники тепла отсутствуют): а – температура; б – функция тока; в – вихрь; г – радиальная составляющая магнитной индукции; д – меридиональная составляющая магнитной индукции; е – локальные числа Нуссельта

Из анализа результатов рис. 2 и 1 следует, что учет джоулевой диссипации приводит к изменению поля температуры, направления движения жидкости в конвективных ячейках, формы вихрей и распределения чисел Нуссельта. Теплообмен интенсифицируется в области экватора (рис. 2, *а*). Характер изменения локальных чисел Нуссельта (рис. 2, *е*) изменяется на противоположный по сравнению с результатом, представленным на рис. 1, *е*. Числа Нуссельта: $1{,}47 \le Nu_{\Gamma 1} \le 3{,}91$; $0{,}04 \le Nu_{\Gamma 2} \le 3{,}18$; $\overline{Nu}_{\Gamma 1} = 3{,}22$; $\overline{Nu}_{\Gamma 2} = 1{,}40$.

На рис. 3 представлены результаты расчетов, полученные с учетом джоулевой диссипации и внутренних источников тепла ($Q_v = 1$, значения безразмерных чисел те же). Оказалось, что поле функции тока, вихря, радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции в этом случае аналогичны результату, представленному на рис. 2, и не приводятся здесь.



а *б*

Рис. 3. Расчетные поля (с учетом джоулевой диссипации и внутренних источников тепла): а – температура; б – локальные числа Нуссельта

То есть учет внутренних источников тепла (рис. 2 и 3) не приводит к изменению направления циркуляции жидкости в конвективных ячейках, но ведет к интенсификации теплообмена в ядре. Числа Нуссельта (рис. 3, *б*): $0{,}93 \le Nu_{\Gamma 1} \le 3{,}30$; $0{,}91 \le Nu_{\Gamma 2} \le 5{,}39$; $\overline{Nu}_{\Gamma 1} = 2{,}53$; $\overline{Nu}_{\Gamma 2} = 3{,}01$.

На рис. 4 приведены результаты расчетов без учета джоулевой диссипации и внутренних источников тепла. Но в отличие от результатов, приведенных выше (рис. 1–3), интенсивность конвекции увеличена в 10 раз: $Gr = 10^4$; $Re = 10$ ($Gr/Re^2 = 10^2$). Увеличение конвекции привело к изменению поля температуры, формы вихрей, магнитной индукции по сравнению с результатами, представленными на рис. 1–3. Если сравнивать полученный результат ($Gr = 10^4$; $Gr/Re^2 = 10^2$) с результатом рис. 1 ($Gr = 10^3$; $Gr/Re^2 = 10$), где также не учитывались джоулева диссипация и внутренние источники тепла, то можно заметить, что интенсификация конвекции привела к смене направления движения жидкости в конвективных ячейках, т. е. не только учет джоулевой диссипации (рис. 2 и 1), но и интенсификация конвекции (рис. 4 и 1), может приводить к изменению направления движения жидкости в конвективных ячейках. Числа Нуссельта (рис. 4) принимают следующие значения: $2{,}46 \le Nu_{\Gamma 1} \le 7{,}06$; $0{,}06 \le Nu_{\Gamma 2} \le 5{,}04$; $\overline{Nu}_{\Gamma 1} = 5{,}69$; $\overline{Nu}_{\Gamma 2} = 2{,}48$.

На рис. 5 представлены результаты расчетов, полученные с учетом джоулевой диссипации, но без внутренних источников тепла ($Gr = 10^4$; $Re = 10$; $Gr/Re^2 = 10^2$; $S = 10^{-5}$; $Re_m = 1$; $S/Re_m = 10^{-5}$; $Pe = 10$). Учет джоулевой диссипации приводит к значительному изменению поля температуры, направления движения жидкости в конвективных ячейках, формы вихрей и распределения чисел Нуссельта по сравнению с результатом рис. 4. Теплообмен интенсифицируется в области полюсов (рис. 5, *а*), а не в области экватора, как на рис. 4, *а*. Направление движения жидкости в конвективных ячейках изменилось на противоположное (рис. 5, *б,в* и рис. 4, *б,в*). Значения радиальной составляющей магнитной индукции (рис. 5, *г*) поменялись на противоположные значения по сравнению с результатом рис. 4, *г*.

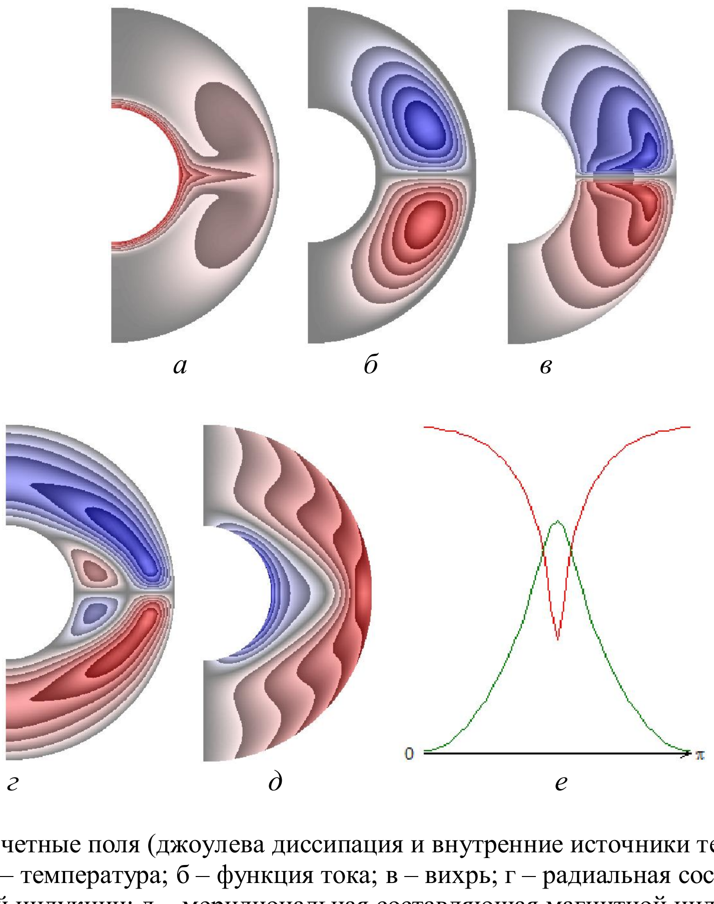


Рис. 4. Расчетные поля (джоулева диссипация и внутренние источники тепла отсутствуют): а – температура; б – функция тока; в – вихрь; г – радиальная составляющая магнитной индукции; д – меридиональная составляющая магнитной индукции; е – локальные числа Нуссельта

Эти изменения происходят благодаря учету джоулевой диссипации. Числа Нуссельта (рис. 5): $1{,}19 \le Nu_{\Gamma 1} \le 7{,}50$; $0{,}26 \le Nu_{\Gamma 2} \le 11{,}49$; $\overline{Nu}_{\Gamma 1} = 5{,}87$; $\overline{Nu}_{\Gamma 2} = 2{,}56$.

На рис. 6 представлены результаты, полученные с учетом джоулевой диссипации и внутренних источников тепла ($Q_v = 1$). Остальные значения безразмерных чисел, как и для результатов, приведенных на рис. 5. Числа Нуссельта (рис. 6, *б*): $0{,}95 \le Nu_{\Gamma 1} \le 6{,}90$; $0{,}93 \le Nu_{\Gamma 2} \le 12{,}62$; $\overline{Nu}_{\Gamma 1} = 5{,}34$; $\overline{Nu}_{\Gamma 2} = 4{,}23$. Остальные поля аналогичны результатам рис. 5.

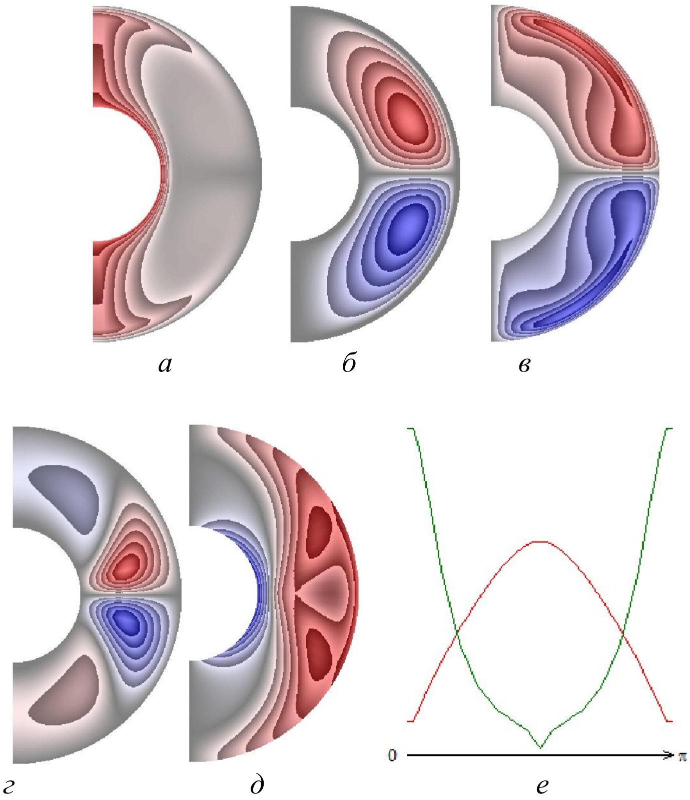
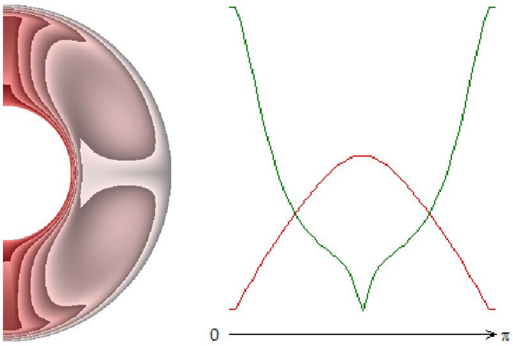


Рис. 5. Расчетные поля (с учетом джоулевой диссипации. Внутренние источники тепла отсутствуют): а – температура; б – функция тока; в – вихрь; г – радиальная составляющая магнитной индукции; д – меридиональная составляющая магнитной индукции; е – локальные числа Нуссельта

На рис. 7 представлены результаты, полученные с учетом джоулевой диссипации и внутренних стоков тепла ($Q_v = -1$; $Gr = 10^4$; $Re = 10^2$; $Gr/Re^2 = 1$; S =

10^{-2}; $\mathrm{Re_m} = 10$; $\mathrm{S/Re_m} = 10^{-3}$; $\mathrm{Pe} = 10^2$). Наличие стоков тепла привело к изменению поля температуры; направление движения в жидкости изменилось на противоположное (рис. 7, *б,в* и рис. 5, *б,в*). Значения радиальной составляющей магнитной индукции (рис. 7, *г*) поменялись на противоположные значения по сравнению с результатом, представленным на рис. 5, *г*. Числа Нуссельта (рис. 7, *е*): $3{,}03 \le \mathrm{Nu}_{\Gamma1} \le 6{,}61$; $-1{,}93 \le \mathrm{Nu}_{\Gamma2} \le -0{,}66$; $\overline{\mathrm{Nu}}_{\Gamma1} = 5{,}79$; $\overline{\mathrm{Nu}}_{\Gamma2} = -1{,}29$.



а б

Рис. 6. Расчетные поля (с учетом джоулевой диссипации и внутренних источников тепла): а – температура; б – локальные числа Нуссельта

Заключение

В результате проделанной работы была предложена математическая модель и разработан программный продукт, позволяющий моделировать конвективный теплообмен и магнитогидродинамические процессы в жидком ядре Земли. Анализ полученных результатов позволил сделать следующие выводы:

– конвекция оказывает значительное влияние на магнитное поле ядра Земли;

– учет джоулевой диссипации приводит к изменению направления течения жидкости в конвективных ячейках на противоположное (изменяется меридиональная циркуляция жидкости в ядре Земли, т. е. магнитные полюса Земли изменяют свое местоположение на противоположное), что приводит к существенной перестройке поля температуры в ядре. Аналогичный результат был отмечен в работе [1], что подтверждает достоверность полученных результатов;

– изменение внутреннего источника тепла на сток также приводит к изменению направления течения жидкости в конвективных ячейках на противоположное.

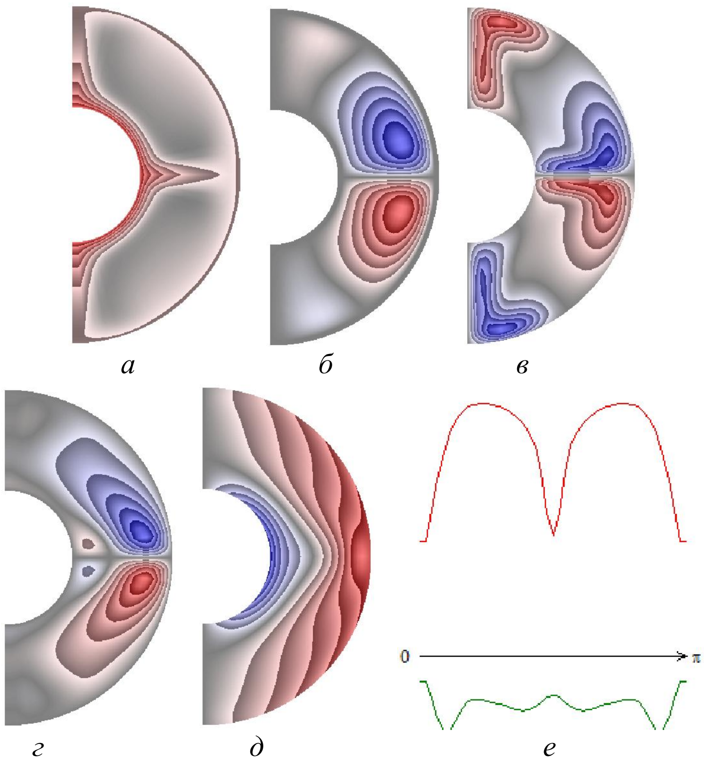


Рис. 7. Расчетные поля (с учетом джоулевой диссипации и внутренних стоков тепла): а – температура; б – функция тока; в – вихрь; г – радиальная составляющая магнитной индукции; д – меридиональная составляющая магнитной индукции; е – локальные числа Нуссельта

Библиографические ссылки

1. *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо / пер. с англ. А. Г. Муслимова, Н. А. Силантьева; под ред. А. З. Доминова. М., 1984.