ВЕСТНИК ТОГУ. 2010. № 2 (17)

УДК 519.626.2

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ЗАДАЧИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ

Вихтенко Э. М. – канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», тел.: (4212) 37-52-03, e-mail: vikht@mail.khstu.ru (ТОГУ)

Для задачи с препятствием рассматривается схема двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа. Изучаются свойства модифицированного функционала Лагранжа. Исследуется итерационный метод нахождения седловой точки, доказывается теорема сходимости метода в исходном пространстве.

The duality scheme based on the modified Lagrange functional is examined for the obstacle problem. The properties of the modified Lagrange functional are studied. The iteration method for finding the saddle point is investigated; the convergence theorem of the method in the initial space has been proved.

Ключевые слова: задача с препятствием, функционал Лагранжа, седловая точка, метод Удзавы.

Введение

Многие задачи механики и физики могут быть сформулированы в виде вариационных и квазивариационных неравенств с ограничениями. При исследовании таких задач большую роль играют методы двойственности. Как правило, используются классические функционалы Лагранжа. При этом удается показать сходимость методов только в коэрцитивном случае для прямой переменной при условии малости шага сдвига двойственной переменной. Сходимость по двойственной переменной установить не удается вообще [1, 2]. В работах [3, 4] и других для решения конечномерных задач выпуклого программирования предлагается использовать схемы двойственности, основанные на модифицированных функциях Лагранжа. Для вариационных и квазивариационных неравенств механики схемы двойственности с модифицированными функционалами Лагранжа были построены и исследованы в работах [5–9]. В указанных работах рассматривались задачи минимизации функционалов на множествах функций с односторонними ограничениями на границах областей.

В данной работе на примере известной задачи с препятствием рассматривается методика использования модифицированных функционалов Лагранжа для задач с ограничениями в области. В работе построен модифицированный функционал Лагранжа, изучены его свойства; предложен итерационный метод нахождения седловой точки, доказана теорема сходимости метода по прямой переменной в исходном пространстве. Для двойственной переменной получена сходимость по двойственному функционалу. Полученные результаты в дальнейшем будут положены в основу построения и обоснования эффективных численных методов решения исходной задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $\Omega \subset R^2$ с достаточно гладкой границей Γ функционал

$$J(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 d\Omega - \int\limits_{\Omega} f(x)v(x)d\Omega \qquad (1)$$

и замкнутое выпуклое множество

$$\Lambda = \{w(x) : w(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\, w(x) \ge \psi(x) \text{ п.в. в } \Omega\},$$

где $f(x) \in L_2(\Omega)$ – заданная функция, $\psi(x)$ – непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция. Предполагаем, что $\psi(x) \le 0$ на Γ. В этом случае множество Λ не пусто.

Рассмотрим задачу

$$J(v) - \min, \quad v \in \Lambda. \qquad (2)$$

Множество K называется множеством ограничений, функция $\psi(x)$ называется препятствием, а задача (2) – задачей с препятствием [10].

Функционал $J(v)$ строго коэрцитивен на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, т. е. $J(v) \to +\infty$ при $\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \to \infty$. Следовательно, решение u задачи (2) существует, и оно единственно. Более того, в [10] показано, что при выполнении условий $\psi(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $\Gamma \in C^{2+\alpha}$, $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ решение u задачи (2) принадлежит пространству $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

В дальнейшем всюду будем предполагать, что решение u задачи (2) принадлежит пространству $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Для решения задачи (2), основанного на схеме двойственности, в [11] рассмотрен классический функционал Лагранжа

$$L(v,l) = J(v) + \int\limits_{\Omega} l(x)\big(\psi(x) - v(x)\big)d\Omega, \quad v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\, l \in L_2(\Omega).$$

Функционал $L(v,l)$ выпуклый по v при фиксированном l и вогнулый по

l при фиксированном v. Более того, $L(v,l)$ дифференцируем по Гато по переменным v и l, его производная равна $\nabla_v L(v,l) = (\Delta v - f - l)$.

Установлено [11], что $L(v,l)$ имеет на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\times\left(L_2(\Omega)\right)^+$ единственную седловую точку $(v^*,l^*) = (u,-\Delta u - f)$, т. е. выполняется

$$L(u,l) \le L(u,-\Delta u - f) \le L(v,-\Delta u - f), \quad \forall (v,l)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\times\left(L_2(\Omega)\right)^+.$$

Здесь через $\left(L_2(\Omega)\right)^+$ обозначено множество неотрицательных функций из $L_2(\Omega)$, $\left(L_2(\Omega)\right)^+ = \{w \in L_2(\Omega) : w(x) \ge 0 \text{ п.в. в } \Omega\}$.

Известные методы поиска седловой точки классического функционала Лагранжа не обеспечивают сходимость по двойственной переменной l. По прямой переменной сходимость показывается только в случае малых шагов сдвига по двойственной переменной. Снять описанные ограничения позволяет использование в схемах двойственности модифицированного функционала Лагранжа.

2. Модифицированный функционал Лагранжа

Для построения модифицированного функционала Лагранжа воспользуемся схемой, аналогичной схемам, использованным в работах [5], [6].

На пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\times L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$ введем функционал

$$K(v,l,m) = \begin{cases} J(v) + \dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_\Omega \left((l+rm)^2 - l^2\right)d\Omega, & \text{если } \psi - v \le m \text{ п.в. в } \Omega, \\ +\infty & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

где $r > 0$ – постоянная.

Определим модифицированный функционал Лагранжа

$$M(v,l) = \inf_{m\in L_2(\Omega)} K(v,l,m). \tag{3}$$

Определение. *Пара* $(v^*,l^*) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\times L_2(\Omega)$ *называется седловой точкой функционала Лагранжа* $M(v,l)$, *если выполнено двустороннее неравенство*

$$M(v^*,l) \le M(v^*,l^*) \le M(v,l^*) \quad \forall (v,l)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\times L_2(\Omega). \tag{4}$$

Исследуем свойства функционала $M(v,l)$. Функционал $M(v,l)$ можно записать в виде

$$M(v,l) = J(v) + \frac{1}{2r}\int_\Omega \left(\left((l + r(\psi - v))^+\right)^2 - l^2\right)d\Omega, \tag{5}$$

где $w^{+}=\max\{w,0\}$.

Определим функционал

$$\underline{M}(l)=\inf_{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} M(v,l)=\inf_{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}\left\{J(v)+\frac{1}{2r}\int_\Omega\left(\left((l+r(\psi-v))^{+}\right)^2-l^2\right)d\Omega\right\}. \quad (6)$$

Выражение (6) можно переписать как

$$\underline{M}(l)=\inf_{m\in L_2(\Omega)}\left\{\inf_{v:\psi-v\le m} J(v)+\frac{1}{2r}\int_\Omega\left((l+rm)^2-l^2\right)d\Omega\right\}.$$

Обозначив через $\chi(m)=\inf\limits_{v:\psi-v\le m} J(v)$ функцию чувствительности, получаем

$$\underline{M}(l)=\inf_{m\in L_2(\Omega)}\left\{\chi(m)+\frac{1}{2r}\int_\Omega\left((l+rm)^2-l^2\right)d\Omega\right\}. \quad (7)$$

Задача

$$J(v)-\min,\quad v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\psi-v\le m \quad (8)$$

в силу коэрцитивности функционала $J(v)$ имеет единственное решение при любом $m\in L_2(\Omega)$. Это означает, что функция $\chi(m)$ определена и $\chi(m)>-\infty$ для любого $m\in L_2(\Omega)$. Легко показать, что $\chi(m)$ – выпуклая функция. Следовательно, функционал в (7) является сильно выпуклым в $L_2(\Omega)$ и для любого $l\in L_2(\Omega)$ существует единственный $m(l)\in L_2(\Omega)$, такой, что

$$\underline{M}(l)=\chi(m(l))+\frac{1}{2r}\int_\Omega\left((l+rm(l))^2-l^2\right)d\Omega.$$

Обозначим решение задачи (8) при $m=m(l)$ через $v(l)$, т. е. $\chi(m(l))=J(v(l))$. Тогда

$$\underline{M}(l)=J(v(l))+\frac{1}{2r}\int_\Omega\left((l+rm(l))^2-l^2\right)d\Omega=K(v(l),l,m(l)). \quad (9)$$

Рассмотрим задачу

$$M(v,l)=J(v)+\frac{1}{2r}\int_\Omega\left(\left((l+r(\psi-v))^{+}\right)^2-l^2\right)d\Omega-\min,\quad v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \quad (10)$$

Теорема 1. *Для любого $l\in L_2(\Omega)$ задача (10) имеет единственное решение $v(l)$, т.е.*

$$\inf_{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}\left\{J(v)+\frac{1}{2r}\int_\Omega\left(\left((l+r(\psi-v))^{+}\right)^2-l^2\right)d\Omega\right\}=$$

$$=J(v(l))+\frac{1}{2r}\int_\Omega\left(\left((l+r(\psi-v(l)))^{+}\right)^2-l^2\right)d\Omega. \quad (11)$$

Доказательство теоремы 1 повторяет доказательства, проведенные в [8], [9].

Определим функционал

$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\Omega)} M(v,l). \tag{12}$$

Предположим, что $v \in \Lambda$, т. е. $\psi - v \le 0$, тогда $K(v,l,0) = J(v)$ для всех $l \in L_2(\Omega)$. Следовательно, $M(v,l) = \inf_{m \in L_2(\Omega)} K(v,l,m) \le J(v)$, а также

$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\Omega)} M(v,l) \le J(v). \tag{13}$$

Если $\psi - v \le m$ и $l = 0$, то $M(v,0) \ge J(v)$ и

$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\Omega)} M(v,l) \ge M(v,0) \ge J(v). \tag{14}$$

Сопоставляя (13) и (14), получаем $\overline{M}(v) = J(v)$ для всех $v \in \Lambda$.

На пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ определим функционал

$$\mathrm{K}(v,l,m) = \begin{cases} J(v) + \int\limits_{\Omega} lm\,d\Omega, & \text{если } \psi - v \le m \text{ п.в. в } \Omega, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что $K(v,l,m) \ge \mathrm{K}(v,l,m)$ для всех $(v,l,m) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Для $l \in \left(L_2(\Omega)\right)^+$ имеем $L(v,l) = J(v) + \int\limits_{\Omega} l(\psi - v)\,d\Omega = \inf_{m:\psi - v \le m} \mathrm{K}(v,l,m)$.

Сравнивая выражения для $K(v,l,m)$ и $\mathrm{K}(v,l,m)$, получаем $M(v,l) \ge L(v,l)$, $\overline{M}(v) \ge \overline{L}(v)$, где $\overline{L}(v) = \sup_{l \in \left(L_2(\Omega)\right)^+} L(v,l)$.

Если $v \notin \Lambda$, т. е. $\psi - v > 0$ на $\Omega' \subset \Omega$, $mes\Omega' > 0$, то

$$\overline{L}(v) = \sup_{l \in \left(L_2(\Omega)\right)^+} L(v,l) = \sup_{l \in \left(L_2(\Omega)\right)^+} \left\{ J(v) + \int\limits_{\Omega} l(\psi - v)\,d\Omega \right\} = +\infty.$$

Следовательно, функционал $\overline{M}(v)$ может быть определен как

$$\overline{M}(v) = \begin{cases} J(v), & \text{если } v \in \Lambda, \\ +\infty, & \text{если } v \notin \Lambda, \end{cases}$$

и исходная задача (2) представима в виде

$$\overline{M}(v) - \min, \quad v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{15}$$

Для функционала $\underline{M}(l)$ рассмотрим двойственную задачу

$$\underline{M}(l) - \max, \quad l \in L_2(\Omega). \tag{16}$$

Как было установлено выше, задача (15) имеет единственное решение u.

При условии, что решение u задачи (2) принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$, двойственная задача (16) имеет единственное решение $(-\Delta u - f)$.

Очевидно, что $\inf\limits_{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \sup\limits_{l \in L_2(\Omega)} M(v,l) \geq \sup\limits_{l \in L_2(\Omega)} \inf\limits_{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} M(v,l)$, т. е.

$$\inf_{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \overline{M}(v) \geq \sup_{l \in L_2(\Omega)} \underline{M}(l). \qquad (17)$$

Из неравенства (17) вытекает, что если для некоторой пары $(v^*, l^*) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ имеет место равенство $\overline{M}(v^*) = \underline{M}(l^*)$, то v^* и l^* есть решения задач (15) и (16) соответственно. Нетрудно показать, что (v^*, l^*) является седловой точкой функционала $M(v,l)$ и, наоборот, всякая седловая точка функционала $M(v,l)$ соответствует решениям задач (15) и (16).

Повторяя рассуждения [8], [9], можно показать совпадение множеств седловых точек классического и модифицированного функционалов Лагранжа.

Исследуем функционал $\underline{M}(l)$ двойственной задачи (16).

Теорема 2. *Функционал* $\underline{M}(l)$ *дифференцируем по Гато в* $L_2(\Omega)$, *и его производная* $\nabla \underline{M}(l)$ *удовлетворят условию Липшица с постоянной* $1/r$, *т. е. выполняется*

$$\| \nabla \underline{M}(l_1) - \nabla \underline{M}(l_2) \|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{r} \| l_1 - l_2 \|_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, l_1, l_2 \in L_2(\Omega).$$

Доказательство. Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теоремы 2 в работе [5].

В силу сильной выпуклости функционала $\{\chi(m) + \int\limits_{\Omega} lm d\Omega + r/2 \int\limits_{\Omega} m^2 d\Omega\}$ для любого $m \in L_2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\chi(m(l)) + \int_{\Omega} l m(l) d\Omega + \frac{r}{2} \int_{\Omega} (m(l))^2 d\Omega + \frac{r}{2} \| m - m(l) \|_{L_2(\Omega)}^2 \leq$$

$$\leq \chi(m) + \int_{\Omega} lm d\Omega + \frac{r}{2} \int_{\Omega} m^2 d\Omega. \qquad (18)$$

Запишем (18) для l_1, $l_2 \in L_2(\Omega)$ и $m(l_1)$, $m(l_2)$ и сложим два получившихся неравенства, тогда

$$r \| m(l_1) - m(l_2) \|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} (l_1 - l_2)(m(l_2) - m(l_1)) d\Omega, \qquad (19)$$

откуда для любых $l_1, l_2 \in L_2(\Omega)$ имеем

$$\| m(l_1) - m(l_2) \|_{L_2(\Omega)} \le \frac{1}{r} \| l_1 - l_2 \|_{L_2(\Omega)} . \tag{20}$$

Так как функционал $\underline{M}(l)$ вогнутый и $\underline{M}(l) \ne -\infty$ для всех $l \in L_2(\Omega)$, то субдифференциал $\partial \underline{M}(l) \ne \varnothing$ для любого $l \in L_2(\Omega)$ [12]. Для доказательства дифференцируемости $\underline{M}(l)$ достаточно установить, что $\partial \underline{M}(l)$ состоит из единственного элемента.

Пусть функция $l \in L_2(\Omega)$ фиксирована и $t \in \partial \underline{M}(l)$. Тогда для любого $\xi \in L_2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\underline{M}(\xi) \le \underline{M}(l) + \int_\Omega t(\xi - l) d\Omega$$

или

$$\chi(m(\xi)) + \int_\Omega \xi m(\xi) d\Omega + \frac{r}{2} \int_\Omega (m(\xi))^2 d\Omega \le$$

$$\le \chi(m(l)) + \int_\Omega l m(l) d\Omega + \frac{r}{2} \int_\Omega (m(l))^2 d\Omega + \int_\Omega t(\xi - l) d\Omega.$$

Функция $m(l)$ доставляет минимум функционалу $\chi(m) + \int_\Omega lm d\Omega + \frac{r}{2} \int_\Omega (m)^2 d\Omega$, поэтому

$$\chi(m(\xi)) + \int_\Omega \xi m(\xi) d\Omega + \frac{r}{2} \int_\Omega (m(\xi))^2 d\Omega \le$$

$$\le \chi(m(\xi)) + \int_\Omega l m(\xi) d\Omega + \frac{r}{2} \int_\Omega (m(\xi))^2 d\Omega + \int_\Omega t(\xi - l) d\Omega.$$

Из последнего неравенства следует, что для всех $\xi \in L_2(\Omega)$ и $\beta > 0$

$$\frac{1}{\beta} \int_\Omega (m(\xi) - t)(\xi - l) d\Omega \le 0.$$

Положим $\xi = l + \beta p$ и перейдем к пределу при $\beta \to 0$. Из (20) вытекает непрерывность функции $m(l)$, т. е. $m(\xi) \to m(l)$ при $\beta \to 0$ и для любых $p \in L_2(\Omega)$ $\int_\Omega (m(l) - t) p d\Omega \le 0$. Отсюда делаем вывод, что $t = m(l)$. Как было установлено выше, функция $m(l)$ определяется однозначно, т. е. $\partial \underline{M}(l) = \{m(l)\}$. Таким образом установлено, что $\underline{M}(l)$ дифференцируем по Гато и для его производной $\nabla \underline{M}(l) = m(l)$ выполняется условие Липшица (см. (20)).

Теорема доказана.

Форма (6) позволяет определить величину $m(l) = \nabla \underline{M}(l)$ явным образом, $m(l) = \max\{-l/r, \psi - v\}$.

3. Метод Удзавы решения задачи с препятствием

Так как производная функционала $\underline{M}(l)$ удовлетворяет условию Липшица, то для поиска точки максимума $\underline{M}(l)$ можно применить градиентный метод [13], [14]

$$l^{k+1} = l^k + r\nabla\underline{M}(l^k), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

с любым начальным $l^0 \in L_2(\Omega)$. Так как $\nabla\underline{M}(l) = m(l) = \max\{-l/r, \psi - v\}$, то

$$l^{k+1} = l^k + r\max\{-l^k/r, \psi - v\} = \max\{l^k - l^k, l^k + r(\psi - v)\} = (l^k + r(\psi - v))^+.$$

Градиентный метод порождает следующий алгоритм метода Удзавы решения задачи (2).

$$(i) \quad u^{k+1} = \arg \min_{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} M(v, l^k),\ k{=}0,1,\ldots\ (l^0 \in L_2(\Omega) \text{ задано}) \qquad (21)$$

$$(ii) \quad l^{k+1} = l^k + r\nabla\underline{M}(l^k) = (l^k + r(\psi - u^{k+1}))^+. \qquad (22)$$

Теорема 3. *Для последовательности* $\{l^k\}$*, построенной по (22), имеет место оценка*

$$\lim_{k\to\infty} \| m(l^k) \|_{L_2(\Omega)} = 0. \qquad (23)$$

Доказательство. Подобный результат получен в [13] для конечномерного случая. Для проведения доказательства рассмотрим функционал $F(l) = -\underline{M}(l)$. Он ограничен снизу, $F(l) \ge F(l^*) = -\underline{M}(l^*)$, а его производная $\nabla F(l) = -\nabla\underline{M}(l)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $1/r$. Градиентный метод поиска минимума функционала $F(l)$ имеет вид $l^{k+1} = l^k - r\nabla F(l^k)$.

Согласно определению производной

$$F(l+\eta) - F(l) = (\nabla F(l), \eta) + \int_0^1 \big(\nabla F(l+\tau\eta) - \nabla F(l), \eta\big) d\tau. \qquad (24)$$

Положим $l = l^k$ и $\eta = -r\nabla F(l^k)$. Так как $\nabla F(l)$ Липшиц непрерывен, то из (24) получаем

$$F(l^{k+1}) = F(l^k) - r\|\nabla F(l^k)\|^2_{L_2(\Omega)} + r\int_0^1 \big(\nabla F(l^k - \tau r\nabla F(l^k)) - \nabla F(l^k), r\nabla F(l^k)\big) d\tau \le$$

$$\le F(l^k) - \frac{r}{2}\|\nabla F(l^k)\|^2_{L_2(\Omega)}. \qquad (25)$$

Суммируя (25) по k от 0 до s, получаем

$$F(l^{s+1}) \le F(l^0) - \frac{r}{2}\sum_{k=0}^{s} \|\nabla F(l^k)\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Поскольку $r > 0$, то

$$\sum_{k=0}^{s} \| \nabla F(l^k) \|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{2}{r}(F(l^0) - F(l^{s+1})) \le \frac{2}{r}(F(l^0) - F(l^*))$$

при всех s, т. е. $\sum_{k=0}^{\infty} \| \nabla F(l^k) \|^2_{L_2(\Omega)} < \infty$. Отсюда $\| \nabla F(l^k) \|_{L_2(\Omega)} \to 0$. Теорема доказана.

Так как функция чувствительности является выпуклой и конечнозначной, то она непрерывна. Поэтому справедливо следующее соотношение

$$\lim_{k\to\infty} J(u^k) = \lim_{k\to\infty} \chi(m(l^k)) = \chi(0) = \min_{v\in K} J(v) = J(u), \qquad (26)$$

что обозначает сходимость метода (21), (22) по функционалу.

Более того, оценка (23) позволяет показать сходимость метода Удзавы (21), (22) по двойственному функционалу $\underline{M}(l)$. Действительно, в силу вогнутости $\underline{M}(l)$ имеем

$$| \underline{M}(l^k) - \underline{M}(l^*) | \le \| m(l^k) \|_{L_2(\Omega)} \| l^k - l^* \|_{L_2(\Omega)},$$

т. е. $\lim_{k\to+\infty} \underline{M}(l^k) = \underline{M}(l^*)$. В известных методах поиска седловой точки с классическим функционалом Лагранжа указанную сходимость по двойственной переменной l обосновать не удается.

Теорема 4. *Последовательность* $\{(u^k, l^k)\}$, *построенная по алгоритму (21), (22), ограничена в* $W_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что задача (21) для каждого k =0,1 имеет единственное решение $u^{k+1} = v(l^k)$. Если предположить, что последовательность $\{u^k\}$ не ограничена, то в силу коэрцитивности функционала $J(v)$ получим $J(u^k) \to +\infty$, что противоречит (26).

Для доказательства ограниченности последовательности $\{l^k\}$ рассмотрим отображение $P: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, действующее по правилу $P(l) = l + r\nabla\underline{M}(l)$. Из дифференцируемости функционала $\underline{M}$ для $l^* = (-\Delta u - f)$ решения двойственной задачи (16) справедливо $\nabla\underline{M}(l^*) = 0$ и $P(l^*) = l^*$.

Возьмем произвольную функцию $l \in L_2(\Omega)$, $l \ne l^*$. Так как $\nabla\underline{M}(l) = m(l)$ и $\nabla\underline{M}(l^*) = m(l^*)$, то имеем

$$\left\| P(l^*) - P(l) \right\|^2_{L_2(\Omega)} = \left\| l^* - l \right\|^2_{L_2(\Omega)} + r^2 \left\| m(l^*) - m(l) \right\|^2_{L_2(\Omega)} + 2r\left(l^* - l, m(l^*) - m(l) \right)_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда и из (19) вытекает, что

$$\left\|P\left(l^*\right)-P(l)\right\|^2_{L_2(\Omega)}<\left\|l^*-l\right\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad (27)$$

откуда следует ограниченность последовательности $\{l^k\}$, вырабатываемой алгоритмом (22), в пространстве $L_2(\Omega)$.
Теорема доказана.

Теорема 5. *Последовательность* $\{u^k\}$, *k =1, 2, , генерируемая по алгоритму (21), сходится к и в пространстве* $W_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Обозначим $a(v,w)=\int\limits_\Omega \nabla v \nabla w d\Omega, \quad (f,v)=\int\limits_\Omega f v d\Omega.$

Условие того, что (u^*,l^*) – седловая точка $L(v,l)$ эквивалентно соотношениям

$$L(u^*,l^*)\le L(v,l^*) \quad \forall v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \qquad (28)$$

$$u^*\ge\psi,\, l^*\ge 0, l^*(\psi-u^*)=0 \text{ п.в. в } \Omega. \qquad (29)$$

Условия (29) равносильны равенству

$$l^*=(l^*+r(\psi-u^*))^+. \qquad (30)$$

Неравенство (28) равносильно вариационному равенству

$$a(u^*,v-u^*)-(f,v-u^*)+\int\limits_\Omega l^*(v-u^*)d\Omega=0 \quad \forall v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Отсюда и из (30) вытекает следующее соотношение:

$$a(u^*,v-u^*)-(f,v-u^*)-\int\limits_\Omega (l^*+r(\psi-u^*))^+(v-u^*)d\Omega=0 \quad \forall v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \qquad (31)$$

Так как точка u^{k+1} – точка минимума функционала $M(v,l^k)$, то выполняется равенство $\forall v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$a(u^{k+1},v-u^{k+1})-(f,v-u^{k+1})-\int\limits_\Omega (l^k+r(\psi-u^{k+1}))^+(v-u^{k+1})d\Omega=0. \qquad (32)$$

Положим $v=u^{k+1}$ в (31), $v=u^*$ в (32) и сложим два равенства. Тогда получаем

$$a(u^{k+1}-u^*,u^{k+1}-u^*)=\int\limits_\Omega \left((l^k+r(\psi-u^{k+1}))^+-(l^*+r(\psi-u^*))^+\right)(u^{k+1}-u^*)d\Omega=$$

$$=\int\limits_\Omega (l^{k+1}-l^*)(u^{k+1}-u^*)d\Omega.$$

Имеем

$$a(u^{k+1}-u^*,u^{k+1}-u^*)=-\frac{1}{r}\int_\Omega(l^{k+1}-l^*)\Big((l^k+r(\psi-u^{k+1}))-(l^*+r(\psi-u^*))\Big)d\Omega+$$
$$+\frac{1}{r}\int_\Omega(l^{k+1}-l^*)(l^k-l^*)d\Omega\le$$
$$\le-\frac{1}{r}\int_\Omega\Big((l^k+r(\psi-u^{k+1}))^+-(l^*+r(\psi-u^*))^+\Big)^2d\Omega+\frac{1}{r}\int_\Omega(l^{k+1}-l^*)(l^k-l^*)d\Omega\le$$
$$\le-\frac{1}{r}\int_\Omega(l^{k+1}-l^*)(l^{k+1}-l^k)d\Omega. \qquad (33)$$

При выводе (33) было использовано известное неравенство для чисел [15]:

$$(x^+-y^+)(x-y)\ge(x^+-y^+)^2. \qquad (34)$$

Далее

$$\|l^k-l^*\|^2_{L_2(\Omega)}=\|l^k-l^{k+1}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|l^{k+1}-l^*\|^2_{L_2(\Omega)}-2\int_\Omega(l^{k+1}-l^*)(l^{k+1}-l^k)d\Omega\ge$$
$$\ge\|l^k-l^{k+1}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|l^{k+1}-l^*\|^2_{L_2(\Omega)}\,. \qquad (35)$$

Из (35) получаем

$$\|l^{k+p}-l^*\|^2_{L_2(\Omega)}\le\|l^k-l^*\|^2_{L_2(\Omega)}\,. \qquad (36)$$

Следовательно, $\{l^k-l^*\}$ есть ограниченная последовательность в $L_2(\Omega)$. Покажем, что $\{\|l^k-l^*\|_{L_2(\Omega)}\}$ является сходящейся последовательностью. Пусть

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}\|l^k-l^*\|_{L_2(\Omega)}=\lim_{j\to\infty}\|l^{k_j}-l^*\|_{L_2(\Omega)}\,. \qquad (37)$$

Неравенство (36) при $k=k_j$ дает $\|l^{k_j+p}-l^*\|_{L_2(\Omega)}\le\|l^{k_j}-l^*\|_{L_2(\Omega)}$.

Устремляя j к бесконечности, для $p=1,2,\ldots$, имеем

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\|l^m-l^*\|_{L_2(\Omega)}\le\underline{\lim}_{k\to\infty}\|l^k-l^*\|_{L_2(\Omega)},$$

т. е. $\lim_{k\to\infty}\|l^k-l^*\|_{L_2(\Omega)}$ существует.

Из (35) следует $\|l^{k+1}-l^k\|^2_{L_2(\Omega)}\le\|l^k-l^*\|^2_{L_2(\Omega)}-\|l^{k+1}-l^*\|^2_{L_2(\Omega)}$. Отсюда при $k\to\infty$ $\lim_{k\to\infty}\|l^{k+1}-l^k\|_{L_2(\Omega)}=0$. Теперь из (33) получаем

$$\lim_{k\to\infty}a(u^{k+1}-u^*,u^{k+1}-u^*)=0.$$

Следовательно, $\|u^{k+1}-u^*\|_{W_2^1(\Omega)}=0$.

Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. *Гловински Р., Лионс Ж. Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М., 1979.

2. *Glowinski R.* Numerical methods for nonlinear variational problems. New York, 1984.

3. *Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В.* Модифицированные функции Лагранжа. М., 1989.

4. *Антипин А. С.* Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании. М., 2002.

5. *Ву Г., Намм Р. В., Сачков С. А.* Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 1.

6. *Вихтенко Э. М., Намм Р. В.* Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 12.

7. *Вихтенко Э. М., Намм Р. В.* Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа для решения полукоэрцитивного квазивариационного неравенства Синьорини // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 9.

8. *Вихтенко Э. М., Намм Р. В.* Характеристические свойства модифицированного функционала Лагранжа в полукоэрцитивной скалярной задаче Синьорини // Вестник Тихоокеанского государственного университета. 2008. № 4.

9. *Вихтенко Э. М., Намм Р. В.* Характеристические свойства мидифицированного функционала Лагранжа для контактной задачи теории упругости с заданным трением // Дальневост. матем. журнал. 2009. Т. 9. № 1–2.

10. *Фридман А. А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. М., 1990.

11. *Каплан А. А., Тихачке Р.* Вариационные неравенства и полубесконечные задачи выпуклой оптимизации : препринт № 27. Новосибирск, 1989.

12. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., 1979.

13. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М., 1983.

14. *Гроссман К., Каплан А. А.* Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. Новосибирск, 1981.

15. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М., 1980.