ВЕСТНИК ТОГУ. 2012. № 1 (24)

УДК 519.21

МОМЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ДИНАМИКА ПОЛОЖЕНИЯ ДИФФУНДИРУЮЩЕЙ НА СФЕРЕ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПУАССОНОВСКИХ СКАЧКОВ

Карачанская Е. В. – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика»,
e-mail: EKarachanskaya@mail.khstu.ru (ТОГУ)

Определены моменты порядка m для координат точки, случайно перемещающейся на сфере под действием скачков пуассоновского процесса. Представление случайных сферических углов, определяющих положение точки на сфере, с помощью суммирования приращений этих углов, позволяет определять динамику ее положения на сфере.

The moments of an m-th order for a point, which randomly moves on a sphere, are found. In the representation of random spherical angles that describe the point position on a sphere the summation of their increments makes it possible to determine the point location in dynamics.

Ключевые слова: моменты случайного процесса, характеристическая функция, пуассоновские скачки, случайное блуждание.

Введение

В работе [1] для моделирования положения точки использовалось представление полярного угла в виде суммы приращений за некоторые промежутки времени. Этот подход оказался удачным для определения моментных характеристик координат, описывающих положение случайно перемещающейся по окружности точки, и для описания динамики случайной цепи на плоскости [2, 3]. Данная работа продолжает цикл работ, посвященных моделированию положения точки, случайно перемещающейся по сфере. Подобные задачи возникают при рассмотрении диффузии с постоянной скоростью, случайного блуждания по пространственной решетке и т. п.

Определение моментных характеристик координат случайной точки на сфере

Пусть $H(t) = H\left(X(t), Y(t), Z(t)\right)$ – точка, совершающая движение на сфере радиуса r. Ее координаты определяются следующим образом:

$$X(t) = r\cos\varphi(t)\sin\theta(t),\ Y(t) = r\sin\varphi(t)\sin\theta(t),\ Z(t) = r\cos\theta(t), \quad (1)$$

где: $r, \varphi(t), \theta(t)$ – сферические координаты данной точки в момент времени t, $X^2(t) + Y^2(t) + Z^2(t) = r^2$. Уравнения, входящие в систему (1), можно рассматривать как проекции вектора скорости, полагая, что модуль скорости остается неизменным: $|v(t)| = const$. Такие модели возникают при пространственной диффузии с постоянной скоростью. Если изменяется со временем только угол $\varphi(t)$, то точка движется на сфере по окружности в плоскости, параллельной плоскости $x0y$. Если изменяется только угол $\theta(t)$, то движение происходит по окружности диагонального сечения, перпендикулярного плоскости $x0y$.

Пусть $\varphi(t) = \varphi_o + \omega_1 t + \sum_{k=0}^{n(t)} \Delta\varphi_k$, $\theta(t) = \theta_o + \omega_2 t + \sum_{k=0}^{n(t)} \Delta\theta_k$, где φ_o и θ_o определяют начальное положение точки, $\Delta\varphi_k$ и $\Delta\theta_k$ – скачкообразные изменения углов, происходящие одновременно под действием пуассоновского процесса (ПП), $n(t)$ – число скачков пуассоновского процесса за время t, ω_1 и ω_2 – соответствующие собственные неслучайные частоты. И, без потери общности, положим $r = 2$.

Теорема. Пусть случайные процессы $X(t) = 2\cos\varphi(t)\sin\theta(t)$, $Y(t) = 2\sin\varphi(t)\sin\theta(t)$, $Z(t) = 2\cos\theta(t)$, где: $\varphi(t) = \varphi_o + \omega_1 t + \sum_{k=0}^{n(t)} \Delta\varphi_k$, $\theta(t) = \theta_o + \omega_2 t + \sum_{k=0}^{n(t)} \Delta\theta_k$; φ_o и θ_o определяют начальное положение точки; $\Delta\varphi_k$ и $\Delta\theta_k$ – скачкообразные изменения углов, происходящие одновременно под действием пуассоновского процесса; $n(t)$ – число скачков пуассоновского процесса за время t; ω_1 и ω_2 – соответствующие собственные неслучайные частоты; случайные величины $\Delta\varphi_k$ и $\Delta\theta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ – независимые между собой и для любых k случайные величины с характеристическими функциями $g_{\Delta\varphi}(\alpha)$ и $g_{\Delta\theta}(\beta)$ соответственно. Тогда моментные функции порядка m для этих процессов имеют вид:

$$\mathbf{M}[X(t)]^m = (-2)^{-m} \sum_{s=0}^{m} \sum_{j=0}^{s} \sum_{l=0}^{m-s} (-1)^s C_m^s C_s^j C_{m-s}^l \cdot$$
$$\cdot \exp\{i[(2j + 2l - m)(\varphi_o + \omega_1(t)) + (2j - 2s - 2l + m)(\theta_0 + \omega_2 t)]\} \cdot$$
$$\cdot (g_{\Delta\varphi}(2j + 2l - m))^{n(t)} (g_{\Delta\theta}(2j - 2s - 2l + m))^{n(t)},$$

$$\mathbf{M}[Y(t)]^m = (-2)^{-m} i^m \sum_{s=0}^{m}\sum_{j=0}^{s}\sum_{l=0}^{m-s}(-1)^{j+l+s} C_m^s C_s^j C_{m-s}^l \cdot$$
$$\cdot \exp\{i[(l+j-m)(\varphi_o+\omega_1(t))+(m+j-2s-l)(\theta_0+\omega_2 t)]\}\cdot$$
$$\cdot (g_{\Delta\varphi}(l+j-m))^{n(t)}(g_{\Delta\theta}(m+j-2s-l))^{n(t)},$$
$$\mathbf{M}[Z(t)]^m = 2^{1-m}\sum_{h=0}^{m} C_h^m \exp\{i[(2h-m)(\theta_0+\omega_2 t)]\}\cdot(g_{\Delta\theta}(2h-m))^{n(t)}.$$

Доказательство. Воспользуемся преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму. Получаем:

$$X(t) = \sin[(\varphi_o+\theta_o)+(\omega_1+\omega_2)t+\sum\nolimits_{k=0}^{n(t)}(\Delta\varphi_k+\Delta\theta_k)]-$$
$$-\sin[(\varphi_o-\theta_o)+(\omega_1-\omega_2)t+\sum\nolimits_{k=0}^{n(t)}(\Delta\varphi_k-\Delta\theta_k) = X_1(t)-X_2(t),$$
$$Y(t) = \cos[(\varphi_o+\theta_o)+(\omega_1+\omega_2)t+\sum\nolimits_{k=0}^{n(t)}(\Delta\varphi_k+\Delta\theta_k)]-$$
$$-\cos[(\varphi_o-\theta_o)+(\omega_1-\omega_2)t+\sum\nolimits_{k=0}^{n(t)}(\Delta\varphi_k-\Delta\theta_k)] = Y_1(t)-Y_2(t),$$
$$Z(t) = 2\cos(\theta_o+\omega_2 t+\sum\nolimits_{k=0}^{n(t)}\Delta\theta_k),$$

Далее, применяя разложение бинома, формулу Эйлера и свойства характеристической функции, получаем утверждение теоремы.

Динамика диффундирующей точки

Примененный выше метод представления случайного угла с помощью суммирования приращений угла позволяет провести моделирование положения точки, диффундирующей на сфере. Пусть $H(t) = H\left(X(t), Y(t), Z(t)\right)$ – точка, совершающая случайные перемещения на сфере радиуса r под действием пульсаций, вызванных пуассоновскими скачками:

$$X(t) = X_1(t)-X_2(t) = \frac{r}{2}\sin[\alpha_1+\sum\nolimits_{k=0}^{n(t)}\Delta\phi_k+\beta_1 t]-\frac{r}{2}\sin[\alpha_2+\sum\nolimits_{k=0}^{n(t)}\Delta\vartheta_k+\beta_2 t],$$
$$Y(t) = Y_1(t)-Y_2(t) = \frac{r}{2}\cos[\alpha_1+\sum\nolimits_{k=0}^{n(t)}\Delta\phi_k+\beta_1 t]-\frac{r}{2}\cos[\alpha_2+\sum\nolimits_{k=0}^{n(t)}\Delta\vartheta_k+\beta_2 t],$$
$$Z(t) = r\cos(\theta_o+\sum\nolimits_{k=0}^{n(t)}\Delta\theta_k+\omega t).$$

Эта модель соответствует диффузии по сферической поверхности под действием, например, порывов ветра, или изменение ориентации молекулы при случайном вращении.

Для получения траектории случайного блуждания на сфере с центром в начале координат применим данную модель. Пусть точка, помещенная на сферу радиуса $r=1$, совершает случайное блуждание по ней под действием скачков ПП с интенсивностью $\beta=2$ за время, равное 10 усл. ед. времени, при условиях, что приращения нормально распределены: $\Delta\varphi$: $\mathrm{N}(0;\pi/6)$, $\Delta\theta$: $\mathrm{N}(0;\pi/9)$. Начальное положение точки определялось равномерным распределением углов φ_0 и θ_0: φ_0: $\mathrm{R}(-\pi;\pi)$, θ_0: $\mathrm{R}(0;\pi)$. Сначала моделируется, сколько скачков ПП происходит в единицу времени за 10 единиц времени, затем моделируется динамика положения точки. На рис. 1 представлена траектория блуждания.

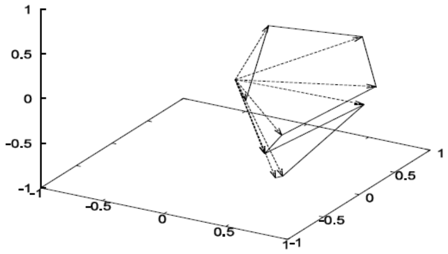

Рис.1. Случайное блуждание на сфере под действием скачков пуассоновского процесса

Библиографические ссылки

1. *Дубко В. А. , Савенко О. В., Чалых Е. В.* Характеристические функции и их применение: Учебно-методические указания. – Биробиджан: Изд-во БГПИ, 1996.

2. *Дубко В. А. , Чалых Е. В.* Динамика цепи конечных размеров с бесконечным числом звеньев в R^2: препринт. – Владивосток; Хабаровск: Дальнаука, 1998.

3. *Karachanskaya E.* Dynamics of random chains of finite size with an infinite number of elements in R^2. Theory of Stochastic processes. – 2010. – vol.16 (32). – № 2.