



УДК 625.717

© А. Д. Ловцов, М. В. Долгачев, 2012

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЛАСТИНЫ
И ГРУНТА ПРИ ЕГО ВЫПУЧИВАНИИ И ПРОСАДКЕ**

Ловцов А. Д. – д-р техн. наук, проф. кафедры «Механика деформируемого твердого тела», тел. 22-43-40, e-mail: Lovtsov@bk.ru; Долгачев М. В. – преп. кафедры «Механика деформируемого твердого тела», тел. 22-43-40, e-mail: md555@mail.ru (ТОГУ)

Рассматривается взаимодействие пластины с односторонними дискретными жесткими и/или упругими опорами. Разработан алгоритм расчета, позволяющий: определять параметры НДС пластины при выпучивании и осадке грунта; регулировать усилия взаимодействия контактирующих тел изменением зазоров; оценивать влияние жесткостей контактирующих тел на параметры НДС.

The interaction of a plate with one-sided discrete rigid and / or elastic supports is considered. The design algorithm has been developed, which makes it possible to: 1) determine the parameters of stress-strain state (SSS) of the plate in buckling and soil settlement; 2) control the interaction between the bodies in contact by changing the gap; 3) evaluate the effects of strength of the bodies in contact on the parameters of SSS.

Ключевые слова: идеальный контакт; односторонние связи с зазорами; изгибаемая пластинка; просадка, выпучивание грунта.

Рассматривается физически и геометрически линейный изгиб пластин, описываемый технической теорией изгиба [1], построенной на основе гипотез Кирхгофа-Лява о малости нормальных напряжений, перпендикулярных к срединной поверхности пластины, и прямых нормалей к той же поверхности:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \text{ или } \nabla^4 w = \frac{q}{D},$$

где: $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость пластины; E, ν – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины; h – толщина пластины.

Пластина произвольной конфигурации, занимающая область Ω , нагружена произвольной внешней нагрузкой, опирается на части границы Γ_u на двусторонние опоры и на части границы Γ_K на односторонние опоры. Γ_u может отсутствовать. Γ_K представляет собой множество точек x_i, y_i , в которых распо-

ложены односторонние жесткие опоры $i \in I_r, I_r = \{i: i = \overline{1, N_r}\}$ и односторонние упругие опоры $i \in I_e, I_e = \{i: i = \overline{N_r + 1, N_r + N_e}\}, K = N_r + N_e$.

Между пластинкой и дискретными опорами имеются зазоры ξ_i (рис. 1 а). Зазоры предполагаются малыми, что позволяет заранее определить те точки пластины, которые могут вступить в контакт с опорами. То есть координаты x_i, y_i опор и точек контакта пластины с таковыми совпадают.

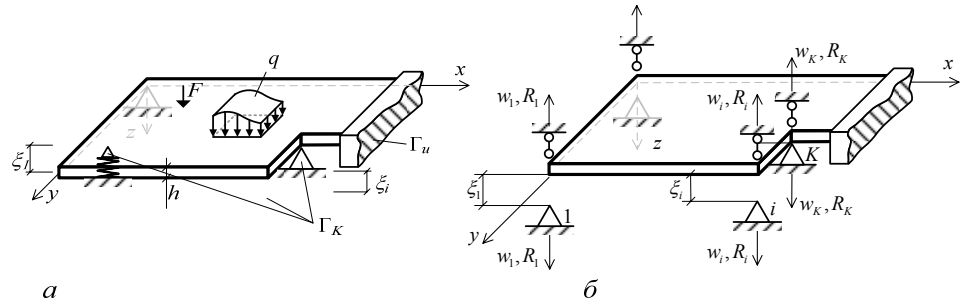


Рис. 1. Пластина: а – модель; б – правило знаков

На рис. 2 а серым показаны пластина и опоры до деформации, черным – после деформации. Под зоной контакта подразумевается набор дискретных опор, вступивших в контакт с пластиной (показаны черным цветом), под зоной отрыва – не вступивших в контакт с пластиной (остались серыми).

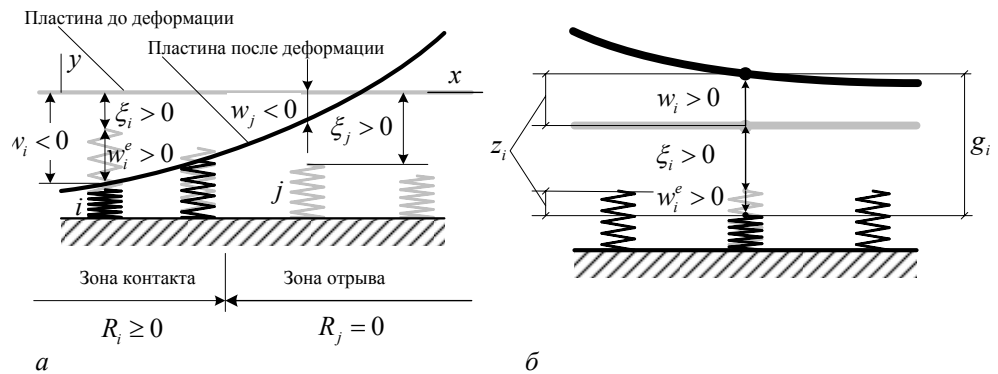


Рис. 2. К граничным условиям одностороннего контакта

Односторонний контакт опоры и пластины осуществляется по нормали к поверхности пластины. Горизонтальные составляющие реакций односторонних связей равны нулю. В этой ситуации граничные условия одностороннего контакта записываются в виде:

– для зоны контакта:

$$R_i \geq 0, w_i + w_i^e + \xi_i \geq 0, R_i(w_i + \xi_i) \geq 0, \quad (1)$$

– для зоны отрыва:

$$R_i = 0, w_i^e = 0, w_i + \xi_i \geq 0, \quad (2)$$



где: \mathbf{W}_i – прогибы пластины в точках x_i, y_i возможного контакта; \mathbf{R}_i – реакции взаимодействия пластины с опорами (см. рис. 1 б), положительные при сжатии. Зазор $\xi_i \geq 0$, если совпадает по направлению с $\mathbf{w}_i \geq 0$ (см. рис. 2 а). Прогибы пластинки $\mathbf{w}_i > 0$ и осадка упругих опор $\mathbf{w}_i^e > 0$, если они совпадают по направлению с $\mathbf{R}_i > 0$. Силы взаимодействия пластины с упругими опорами $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(x_i, y_i) = c_i \cdot \mathbf{w}_i^e$, где c_i – жесткость упругих опор.

Отметим, что при наличии Γ_x с граничными условиями, обеспечивающими отсутствие смещение тела как жесткого целого, зазорами $\xi_i < 0$ обеспечивается предварительное напряжение конструкции.

Отметим также, что отрицательными зазорами моделируется выпучивание грунта при любых условиях опирания.

В [2] для систем с односторонними связями показана справедливость принципа Лагранжа для задачи трехмерной теории упругости. В [3] на основе этого принципа разработан алгоритм решения плоской задачи теории упругости для многослойных конструкций с односторонним взаимодействием слоев.

Введем переменную $\mathbf{g}_i = \mathbf{w}_i + \xi_i$, представляющую собой зазор между пластиной в деформированном состоянии и опорой (рис. 2 б). Тогда граничные условия (1), (2) переписуются в виде:

$$\mathbf{R}_i \geq 0, \mathbf{g}_i \geq 0, \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{g}_i \geq 0.$$

Вариационная постановка задачи состоит в следующем:

$$\min \Pi_L(\mathbf{w}_i, \mathbf{g}_i), \forall \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i^e \in M_L,$$

$$M_L = \left\{ \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i^e \mid \begin{array}{l} \mathbf{w}_i + \mathbf{w}_i^e + \xi_i \geq 0 \\ \mathbf{w}_i = \mathbf{f}_1, \quad \partial \mathbf{w} / \partial n = \mathbf{f}_2 \end{array} \right\},$$

где:

$$\Pi_L = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{B}\mathbf{w})^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{w} d\Omega + \frac{1}{2} \sum_{i \in I_c} c_i \cdot (\mathbf{w}_i^e)^2 - \int_{\Omega} \mathbf{q} \mathbf{w} d\Omega - \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j \mathbf{w}_j \quad (3)$$

– функционал Лагранжа, являющейся выражением потенциальной энергии изгибаемой пластины, упругих опор и потенциала внешних сил. Для жестких опор соответствующее перемещение \mathbf{w}_i^e принимается равным нулю.

Конечно-элементная аппроксимация функционала Лагранжа (3) приводит к следующей квадратичной форме

$$\Pi_L(\bar{\Delta}) = \frac{1}{2} \bar{\Delta}^T \bar{\mathbf{K}} \bar{\Delta} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{w}}^e T \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{w}}^e - \bar{\Delta}^T \bar{\mathbf{F}}$$

где $\bar{\Delta}^T = \{\bar{\mathbf{w}}^T \quad \bar{\boldsymbol{\phi}}^T\}$ – вектор обобщенных перемещений пластинки размерности m , $\bar{\mathbf{w}}$ – вектор контактных степеней свободы (прогибы пластинки в узлах конечно-элементной сетки) и $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ – вектор неконтактных степеней свободы (углы поворота в узлах конечно-элементной сетки). Тогда потенциальная энергия системы запишется в виде:

$$\Pi_L(\bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{w}}^e, \bar{\boldsymbol{\phi}}) = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{w}}^T \quad \bar{\boldsymbol{\phi}}^T) \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w\boldsymbol{\phi}} \\ \mathbf{K}_{\boldsymbol{\phi}w} & \mathbf{K}_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{w}}^e T \quad \mathbf{0}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{w}}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} -$$

$$(\bar{\mathbf{w}}^T \quad \bar{\boldsymbol{\phi}}^T) \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_w \\ \bar{\mathbf{F}}_{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{Z}}^T \quad \bar{\boldsymbol{\phi}}^T) \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w\boldsymbol{\phi}} \\ \mathbf{K}_{\boldsymbol{\phi}w} & \mathbf{K}_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{z}} \\ \bar{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} - (\bar{\mathbf{w}}^T \quad \bar{\boldsymbol{\phi}}^T) \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_w \\ \bar{\mathbf{F}}_{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

где: $\mathbf{K}_{ww} = \bar{\mathbf{K}}_{ww} + \mathbf{C}$; $\bar{\mathbf{z}}$ – вектор взаимных перемещений пластинки и упругой опоры в точках контакта.

Таким образом, задача (4) свелась к задаче выпуклого квадратичного программирования с ограничениями:

$$\min \Pi_L(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\boldsymbol{\varphi}}), \quad \bar{\mathbf{z}} \geq \mathbf{0}$$

Решение данной задачи должно удовлетворять условиям Куна-Таккера, которые в нашем случае выглядят так:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi w} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{z}} \\ \bar{\boldsymbol{\varphi}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}_w \\ \bar{\mathbf{F}}_\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{z}} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

где: \mathbf{E} – единичная матрица размером $\mathbf{K} \times \mathbf{K}$; $\mathbf{0}$ – нулевая матрица размером $(m - \mathbf{K}) \times \mathbf{K}$; $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ – вектор неопределенных множителей. Вектор $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ физически представляет собой вектор усилий взаимодействия пластины и односторонней опоры $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \bar{\mathbf{R}}$.

Распишем далее задачу Куна-Таккера в терминах $\bar{\mathbf{z}}$ и $\bar{\mathbf{R}}$. Из второго уравнения (5) выразим $\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \bar{\mathbf{F}}_\varphi - \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \mathbf{K}_{\varphi w} \bar{\mathbf{z}}$ и подставим в первое. В результате получим:

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{K} \bar{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{R}}_p, \quad \bar{\mathbf{z}} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

где: $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{ww} - \mathbf{K}_{w\varphi} \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \mathbf{K}_{\varphi w}$; $\bar{\mathbf{R}}_p = \mathbf{K}_{w\varphi} \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \bar{\mathbf{F}}_\varphi - \bar{\mathbf{F}}_w$.

В [4] показано, что после проведенной выше конденсации контактных степеней свободы приходим к стандартной форме линейной задачи дополнителности (ЛЗД) (6). В указанной статье приведен также алгоритм с введением параметра предварительного обжатия для решения этой ЛЗД. Разработанный алгоритм программно реализован в [5, 6].

Далее на примерах покажем решения некоторых задач с использованием разработанного алгоритма. На рис. 3–4 представлены результаты численного эксперимента по моделированию выпучивания и просадки грунта. Представлены результаты, позволяющие сравнить поведение пластинки (на примере функции прогибов и полей главных напряжений) в случае одностороннего и двустороннего опирания. На рис. 3–4 б в аксонометрии, а на рис. 3–4 г, д – линиями уровня представлены эпюры прогибов при одностороннем опирании (литера «д») и при двустороннем опирании (литера «г») – т. е. без учета односторонности связей. На рис. 3–4 б эпюра прогибов в случае одностороннего основания раскрашена, а в случае двустороннего – нет.

На рис. 3–4 в показана одна из КЭ-сеток (16x16), используемых в расчетах. Закрашенными кружками обозначены опоры, вступившие в контакт с пластиной. На рис. 3–4 е, ж представлены эпюры прогибов по сечениям, обозначенным на рис. 3–4 в. Пунктир выбран для двустороннего опирания,



сплошная линия соответствует результатам расчета с учетом односторонности опор.

На рис. 3–4 з, и представлены поля главных напряжений σ_1 соответственно для двустороннего и одностороннего опирания. По графикам (литеры «к», «л», «м») можно отследить процесс численной сходимости по максимальному прогибу и реакциям в характерных точках.

Численная сходимость определяется относительной разностью двух последовательных результатов, полученных при сгущении сетки вдвое. Согласно рис. 3–4 к, л, м численная сходимость по прогибам в характерных точках обеспечена при сетке 16x16. Сходимость по реакциям взаимодействия (см. рис. 3–4 н, о, п) обеспечена уже при сетке 4x4. Таким образом, для дискретных односторонних опор сетка, обеспечивающая сходимость по перемещениям, заведомо обеспечивает сходимость и по реакциям взаимодействия с односторонними опорами.

Из сравнения эпюр прогибов (см. рис. 3–4 б, г, д) в случае двустороннего и одностороннего контакта пластин с опорами видна существенная разница результатов расчета в зонах отрыва (сечения 1, 3, 5 на рис. 3–4 е, ж). В зоне контакта разница в прогибах составляет не более 6 % (сечения 2, 4 на рис. 3–4 е, ж).

Из сравнения полей напряжений (см. рис. 3–4 з, и) видно практически полное их совпадение в местах максимальных значений. По результатам счета в окрестности точки приложения силы для односторонних опор и для двусторонних опор (разница составила 2 %).

Рассмотрим далее пластину (рис. 5 а), аналогичную разобранный в предыдущих примерах, с заменой жестких опор на упругие. Опоры с номерами 1, 2, 8 также имеют отрицательные зазоры по отношению к остальным опорам, моделирующим выпучивание упругого основания.

Данная задача решалась с целью отследить, как изменяется рабочая схема и соответствующие ей параметры НДС пластинки в зависимости от жесткости опор, а также сравнить полученные результаты с результатами предыдущей задачи.

На рис. 5 б, г, е, з, к, м представлены рабочие схемы, а на рис. 5 в, д, ж, и, л, н эпюры функций прогиба, соответствующие различной величине жесткости опор. При этом выбраны такие величины жесткости, чтобы каждой из них соответствовала новая рабочая схема. Результаты на данных рисунках позволяют понять, как меняются рабочая схема конструкции и функция прогиба при уменьшении жесткости опор от ∞ до $c = 5 \text{ кг/см}$. Более подробно отследить этот процесс можно на рис. 5 о, п, где показаны сечения 1-1 и 2-2 (см. рис. 5 м) функции прогиба.

Для аналогичных целей, а именно, отследить изменение рабочей схемы и соответствующего ей контактного давления в зависимости от жесткости опор, была решена задача, представленная на рис. 6 а.

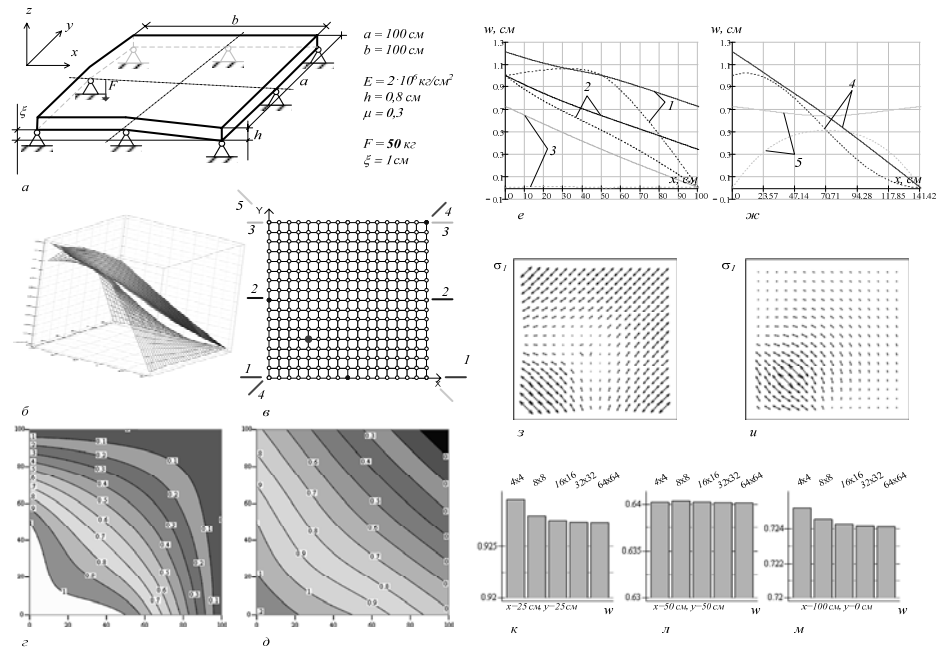


Рис. 3. Моделирование выпучивания грунта

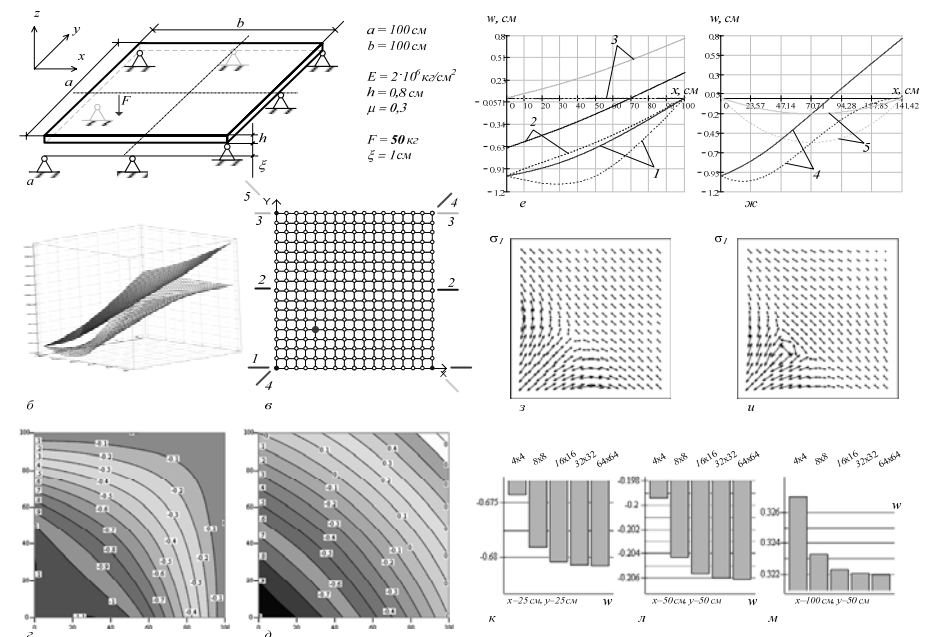


Рис. 4. Моделирование просадки грунта

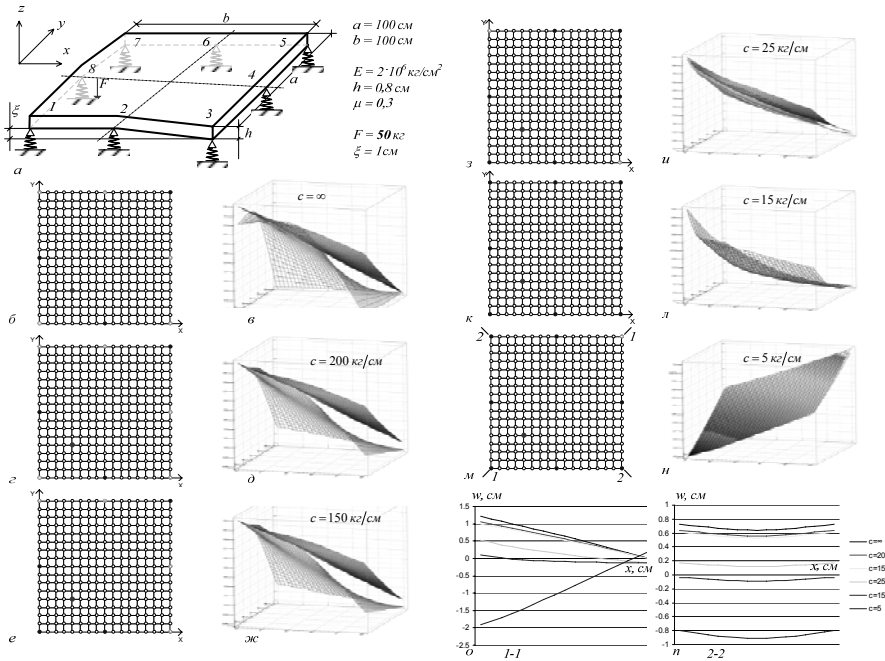


Рис. 5. Влияние жесткости основания на параметры НДС пластинки

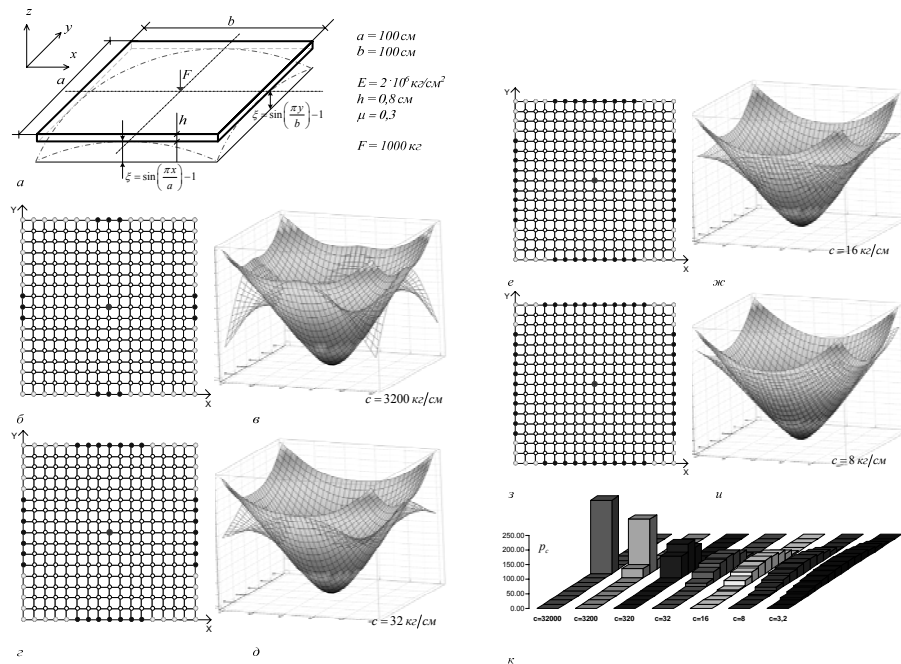


Рис. 6. Влияние жесткости опор на распределение контактного давления

На рис. 6 к показано распределение контактного давления по упругому контуру для различных величин жесткости опор. Из рис. 6 к видно, что распределение контактного давления по всей кромке, более других близкое к равномерному, наблюдается при $c = 3,2 \text{ кг/см}$.

Выводы

Для задачи взаимодействия пластины с односторонним основанием разработан алгоритм расчета, позволяющий: определять параметры НДС пластины при выпучивании и осадке грунта; регулировать усилия взаимодействия контактирующих тел изменением зазоров; оценить влияние жесткостей контактирующих тел на параметры НДС.

Библиографические ссылки

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки / Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1963.
2. Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.
3. Ким Т. С., Ловцов А. Д. Расчет многослойных конструкций с односторонним взаимодействием слоев как плоская задача теории упругости // Дальний Восток: Проблемы развития архитектурно-строительного комплекса: Мат-лы регион. научно-практической конференции 14–15 октября 1999 г. / Хабар. гос. техн. ун-т. – Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2000. – Вып. 3.
4. Ловцов А. Д. Алгоритмы метода перемещений для расчета систем с односторонними связями // Научно-технические ведомости СПбГТУ. – 2004 – № 2.
5. Долгачев М. В., Ловцов А. Д. Расчет пластин на одностороннем упругом основании // Св-во об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2002611286, 2002.
6. Долгачев М. В., Ловцов А. Д. Расчет пластинчатых систем на дискретных односторонних опорах // Программный комплекс для IBM PC 486: Зарегистрирован ВНТИЦ 27.06.2003. – № А/113 № 0203023180306.