



УДК 532.542.2

© С. М. Колосов, И. Г. Русяк, 2008

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ

Колосов С. М. – асп.; *Русяк И. Г.* – д-р. техн. наук, проф. кафедры «Математическое моделирование процессов и технологий» (ИжГТУ)

В статье представлена математическая постановка задачи пространственного течения несжимаемой жидкости на прямолинейном и криволинейном участках трубопровода, разностный оператор модели, результаты расчета ламинарного течения в искривленной части трубопровода.

The mathematical statement of the problem for the incompressible liquid flowing through the rectilinear and curvilinear areas of the pipeline is presented. Also, discrete operator and prediction for the laminar flow through a curvilinear part of the pipeline are considered.

В работе представлены результаты численного моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в канале с криволинейной образующей. Моделируется течение жидкости, обладающее следующими свойствами:

- 1) жидкость является ньютоновской и несжимаемой;
- 2) течение является изотермическим, ламинарным, стационарным;
- 3) влияние силы тяжести на течение не учитывается.

На рис. 1 приведен пример криволинейной области. Компенсатор трубопровода состоит как из цилиндрических блоков с прямолинейной образующей (1), так и из криволинейных участков (2). В работе ставилась задача построения ортогональной конечно-разностной сетки во всей рассматриваемой области. Ортогональность сетки позволяет существенно упростить вид решаемых уравнений, сократить число ненулевых диагоналей в матрице разностного оператора модели (в трехмерном случае с девятнадцати до семи), и, как следствие, упростить конечно-разностные уравнения, повысить скорость сходимости итерационного процесса и точность расчета.

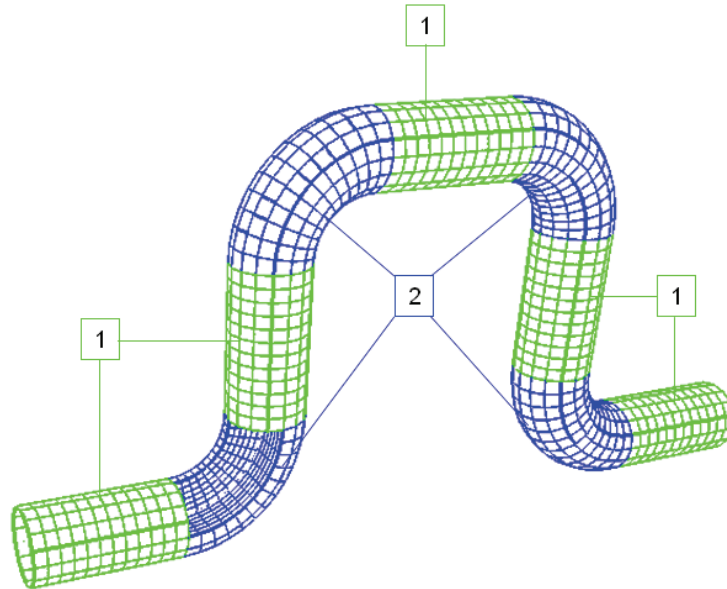


Рис. 1. Криволинейный участок трубопровода

Для обеспечения ортогональности конечно-разностной сетки в каждом из блоков, составляющих компенсатор, строится собственная система координат (рис. 2, 3).

На прямолинейном участке вводится цилиндрическая система координат, описываемая тремя координатами: расстоянием вдоль оси ξ , радиусом η , и углом поворота φ . Построение узлов конечно-разностной сетки на пересечении координатных линий цилиндрической системы гарантирует ортогональность полученной сетки.

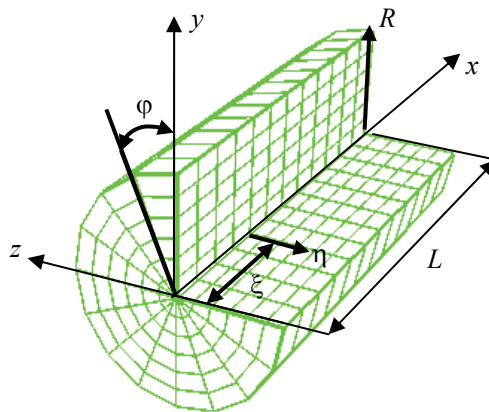


Рис. 2. Цилиндрическая система координат на прямолинейном участке канала



Задача построения ортогональной сетки в криволинейной области решается похожим образом. Вводятся три координаты: расстояние вдоль оси ξ , радиус η , и угол поворота φ , однако ось канала в данном случае является искривленной (см. рис. 3).

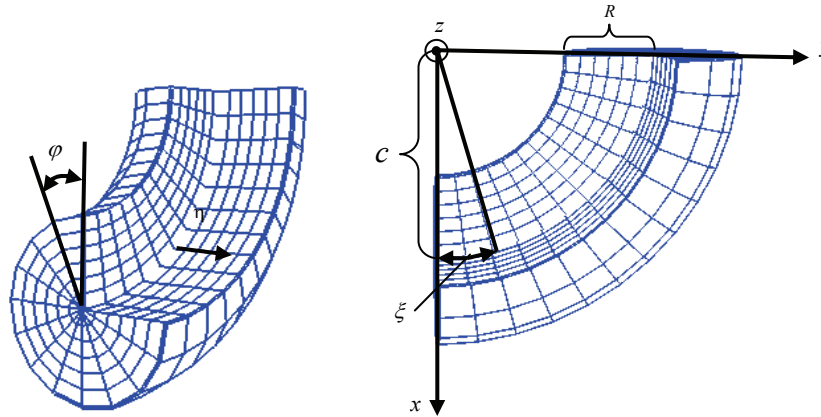


Рис. 3. Система координат на криволинейном участке канала

Если поместить начало декартовых координат в центр кривизны оси канала, то возможно получить достаточно простые отношения для введенной системы:

$$\xi = c \cdot \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \quad \eta = \sqrt{(c - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{z}{c - \sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

$$x = \cos\left(\frac{\xi}{c}\right)(c - \eta \cdot \cos\varphi), \quad y = \sin\left(\frac{\xi}{c}\right)(c - \eta \cdot \cos\varphi), \quad z = \eta \sin\varphi,$$

$$0 \leq \xi \leq L = \pi c / 2, \quad 0 \leq \eta \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Подробное описание введенной системы координат, доказательство ортогональности конечно-разностной сетки и особенности расчета при чередовании прямолинейных и криволинейных блоков приведены в [1].

Система уравнений, описывающих изотермическое стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в произвольной ортогональной системе координат, имеет вид:

- уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(J\rho U) + \frac{\partial}{\partial \eta}(J\rho V) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(J\rho W) = 0, \quad (1)$$

- уравнения сохранения импульсов в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi} = \mathbf{B}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{E} = J \begin{bmatrix} \rho U u - \mu \left[(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] \\ \rho U v - \mu \left[(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] \\ \rho U w - \mu \left[(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = J \begin{bmatrix} \rho V u - \mu \left[(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \\ \rho V v - \mu \left[(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \\ \rho V w - \mu \left[(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = J \begin{bmatrix} \rho W u - \mu \left[(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] \\ \rho W v - \mu \left[(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \\ \rho W w - \mu \left[(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = -J \begin{bmatrix} p_\xi \xi_x + p_\eta \eta_x + p_\varphi \varphi_x \\ p_\xi \xi_y + p_\eta \eta_y + p_\varphi \varphi_y \\ p_\xi \xi_z + p_\eta \eta_z + p_\varphi \varphi_z \end{bmatrix},$$

где ρ – плотность жидкости; μ – динамическая вязкость жидкости;

p – давление жидкости; $J = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \varphi)}$ – якобиан преобразования координат,

u, v, w – ковариантные составляющие вектора скорости в декартовой системе координат, U, V, W – контравариантные составляющие вектора скорости в системе координат (ξ, η, φ) :

$$\begin{aligned} U &= u \xi_x + v \xi_y + w \xi_z, \\ V &= u \eta_x + v \eta_y + w \eta_z, \\ W &= u \varphi_x + v \varphi_y + w \varphi_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (1)–(2) записаны в консервативной форме, полученной из уравнений в декартовых координатах с помощью преобразования Вивьена-Винокура. [1–3].

Рассматривается течение на криволинейном участке канала (рис. 4).

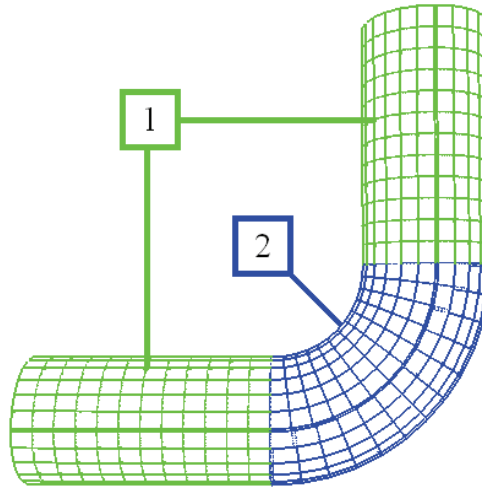


Рис. 4. Криволинейная область канала

На входе в канал, в качестве граничного условия, задается массовый расход. На твердой стенке канала выставляются условия прилипания для скорости:

$$\eta = \pm R \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi : V = 0.$$

Чтобы получить граничные условия для давления уравнения движения (2) с учетом условия прилипания на стенке преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ J\mu \left[(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \right\} &= J(p_\xi \xi_x + p_\eta \eta_x + p_\varphi \varphi_x) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ J\mu \left[(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \right\} &= J(p_\xi \xi_y + p_\eta \eta_y + p_\varphi \varphi_y) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ J\mu \left[(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \right\} &= J(p_\xi \xi_z + p_\eta \eta_z + p_\varphi \varphi_z) \end{aligned}$$

Перемножив полученные уравнения на производные η_x , η_y , η_z соответственно и сложив их, с учетом ортогональности сетки переходим к выражению:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ J\mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\} \eta_x + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ J\mu \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} \eta_y + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ J\mu \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\} \eta_z = J \frac{\partial p}{\partial \eta}.$$

Последовательные преобразования данного выражения позволяют получить значение производной давления в направлении, перпендикулярном стенке

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \mu \frac{\partial V}{\partial \eta} \right).$$

Данное уравнение используется в качестве граничного условия для давления на твердой стенке.

На выходе канала (в последнем блоке) фиксируется давление и выставляются мягкие граничные условия линейной экстраполяции для искомых величин:

$$0 \leq \eta \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi: p = p_0, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0.$$

Численное интегрирование уравнений (1)–(2) производится на разнесенной конечно-разностной сетке, элемент которой представлен на рис. 5.

Рис. 5 наглядно иллюстрирует превосходство ортогональной сетки. В случае, если разностная сетка ортогональна, в разностный шаблон включены только узлы, изображенные темным цветом. Если расчет проводится на неортогональной сетке, то необходимо учитывать значение искомых величин так же и в узлах, помеченных светлым цветом.

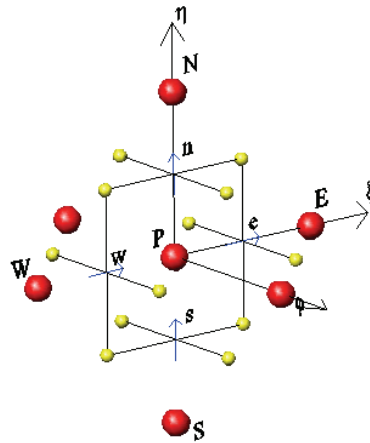


Рис. 5. Элемент конечно-разностной сетки

Разностные аналоги уравнений импульсов представлены формулами (4)–(6).

$$a_p u_p = \sum a_L u_L - J(p_\xi \xi_x + p_\eta \eta_x + p_\varphi \varphi_x) \Delta V, \quad (4)$$



$$a_p v_p = \sum a_L v_L - J(p_\xi \xi_y + p_\eta \eta_y + p_\varphi \varphi_y) \Delta V, \quad (5)$$

$$a_p w_p = \sum a_L w_L - J(p_\xi \xi_z + p_\eta \eta_z + p_\varphi \varphi_z) \Delta V. \quad (6)$$

Разностный аналог уравнения неразрывности записывается в виде (7) относительно поправок давления в соответствии с (8).

$$A_p p'_p = A_E p'_E + A_W p'_W + A_N p'_N + A_T p'_T + A_B p'_B + B, \quad (7)$$

где

$$A_E = \frac{[J^2 \rho (\Delta \eta \Delta \varphi)^2 (\nabla \xi)^2]_e}{a_{pe}}; \quad A_W = \frac{[J^2 \rho (\Delta \eta \Delta \varphi)^2 (\nabla \xi)^2]_w}{a_{pw}};$$

$$A_S = \frac{[J^2 \rho (\Delta \xi \Delta \varphi)^2 (\nabla \eta)^2]_s}{a_{ps}}; \quad A_N = \frac{[J^2 \rho (\Delta \xi \Delta \varphi)^2 (\nabla \eta)^2]_n}{a_{pn}};$$

$$A_B = \frac{[J^2 \rho (\Delta \xi \Delta \eta)^2 (\nabla \varphi)^2]_b}{a_{pb}}; \quad A_T = \frac{[J^2 \rho (\Delta \xi \Delta \eta)^2 (\nabla \varphi)^2]_t}{a_{pt}};$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B;$$

$$B = [(J\rho U)_w - (J\rho U)_e] \Delta \eta \Delta \varphi + [(J\rho V)_s - (J\rho V)_n] \Delta \xi \Delta \varphi +$$

$$+ [(J\rho W)_b - (J\rho W)_t] \Delta \xi \Delta \eta.$$

$$U'_w = \frac{[J \cdot \Delta \eta \cdot \Delta \varphi \cdot (\nabla \xi)^2]_w}{a_{pw}} (p'_w - p'_p),$$

$$U'_e = \frac{[J \cdot \Delta \eta \cdot \Delta \varphi \cdot (\nabla \xi)^2]_e}{a_{pe}} (p'_p - p'_E),$$

$$V'_s = \frac{[J \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \varphi \cdot (\nabla \eta)^2]_s}{a_{ps}} (p'_s - p'_p),$$

$$V'_n = \frac{[J \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \varphi \cdot (\nabla \eta)^2]_n}{a_{pn}} (p'_p - p'_N),$$

$$W'_b = \frac{[J \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \eta \cdot (\nabla \varphi)^2]_b}{a_{pb}} (p'_B - p'_p),$$

$$W'_t = \frac{[J \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \eta \cdot (\nabla \varphi)^2]_t}{a_{pt}} (p'_p - p'_T), \quad (8)$$

где U' , V' , W' , p' – поправки соответствующих величин, обусловленные применением итерационного алгоритма SIMPLE, описанного в [4].

Наличие границы области численного интегрирования на оси канала и отсутствие физически обоснованных граничных условий в дан-

ной области приводит к необходимости разработки особого итерационного алгоритма расчета параметров на оси, который состоит из следующих этапов:

1. Расчет проекции скорости $\Phi = \{u, v, w\}$ в плоскостях γ^k (с учетом пространственного характера течения) вплоть до осевой ячейки.

2. Задание нового значения проекции скорости в осевой ячейке как среднего среди всех расчетных $\Phi_0 = \frac{1}{K} \sum_k \Phi_0^k$, $k = 1..K$. Наличие массива значений скорости в осевой ячейке обусловлено тем, что осевая ячейка лежит на пересечении всех расчетных плоскостей γ_k .

3. Проверка выполнения условия сходимости $\left| \max_{k \in K} \{\Phi_0^k\} - \min_{k \in K} \{\Phi_0^k\} \right| < \varepsilon$

(рис. 6). В случае, если условие сходимости не выполняется – вернуться к п.1 (рис. 7).

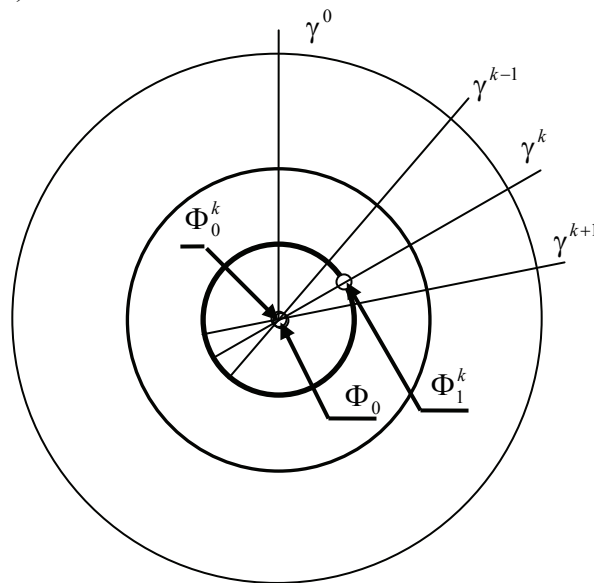


Рис. 6. Поперечное сечение канала

Результаты расчетов свидетельствуют о сложности течения в искривленном канале, связанной с образованием крупномасштабных вихревых структур в области искривления (рис. 8, 9) и последующей диссипацией вихрей при возвращении потока на прямолинейный участок (рис. 10), что наглядно показывает линии тока, представленные на рис. 11, 12.

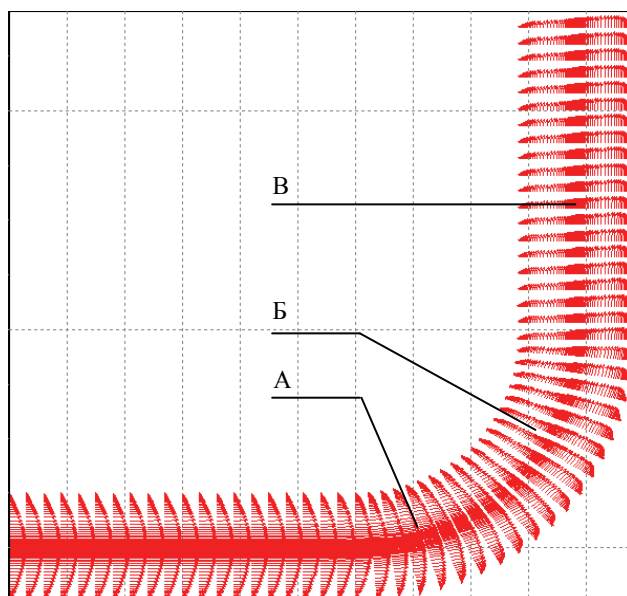


Рис. 7. Поле скоростей на срезе канала при $Re=1500$

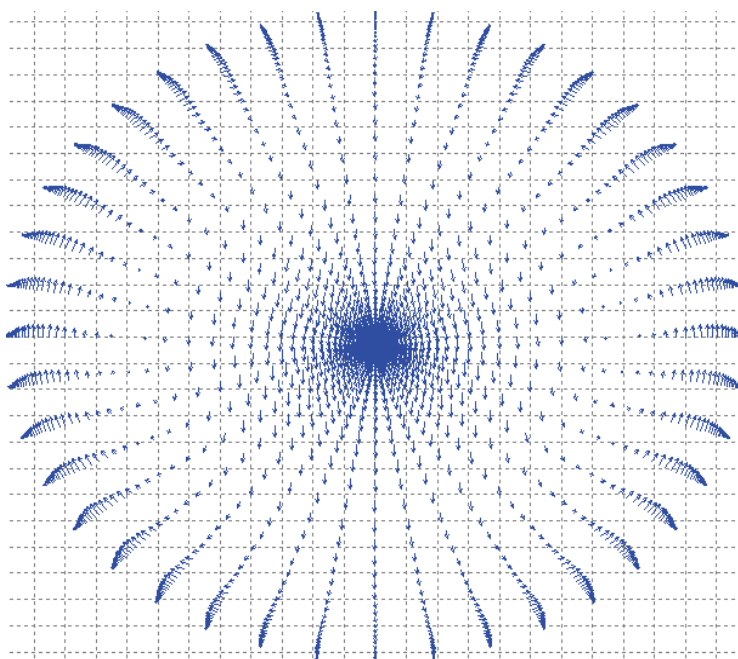


Рис. 8. Поле скоростей в сечении А

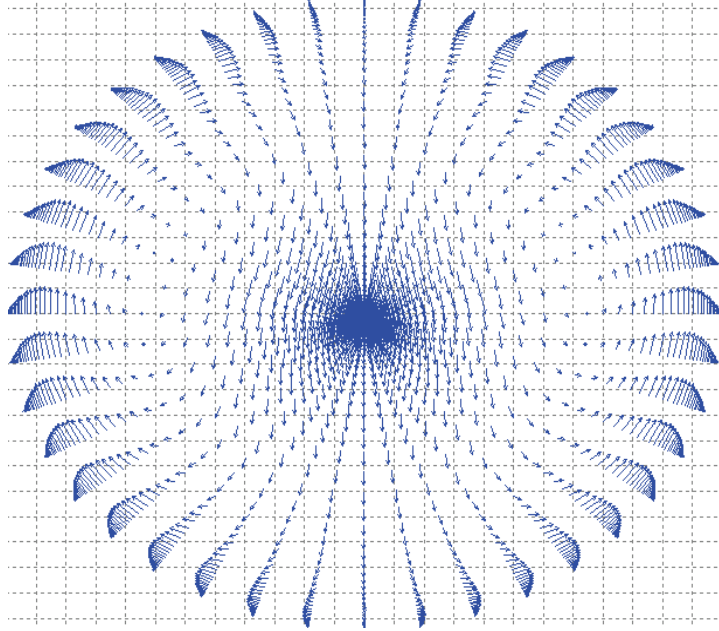


Рис. 9. Поле скоростей в сечении Б

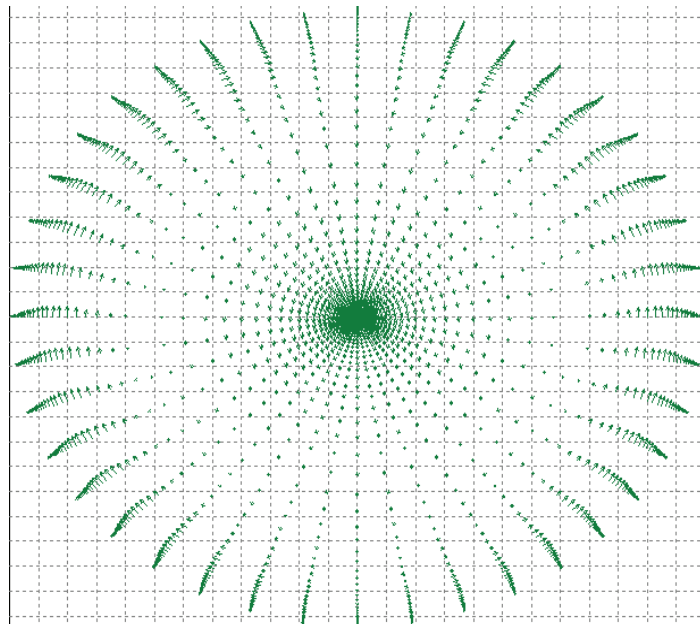


Рис. 10. Поле скоростей в сечении В

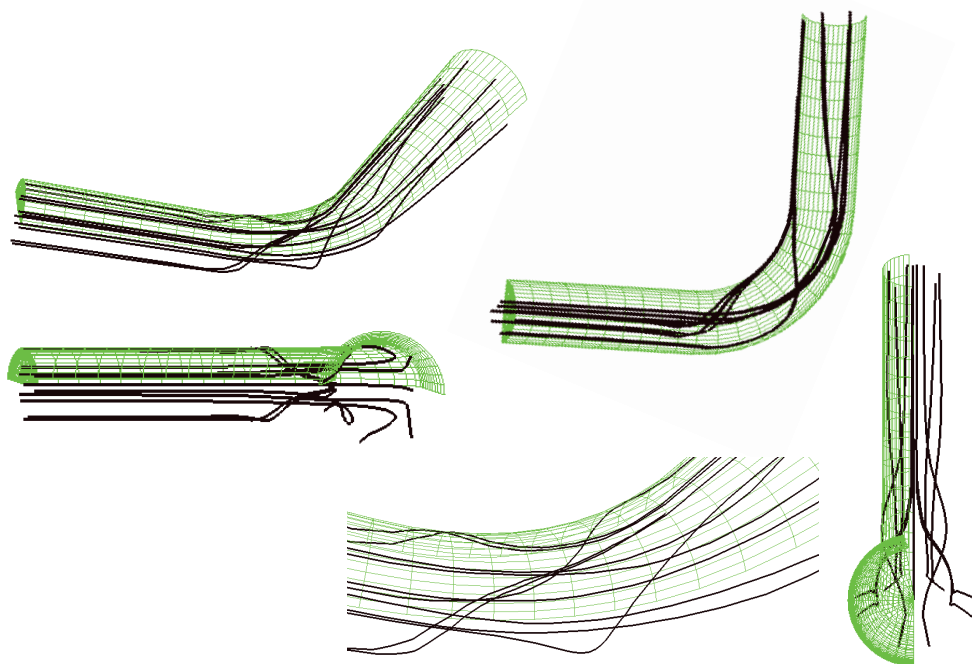


Рис. 11. Линии тока при $Re=1500$

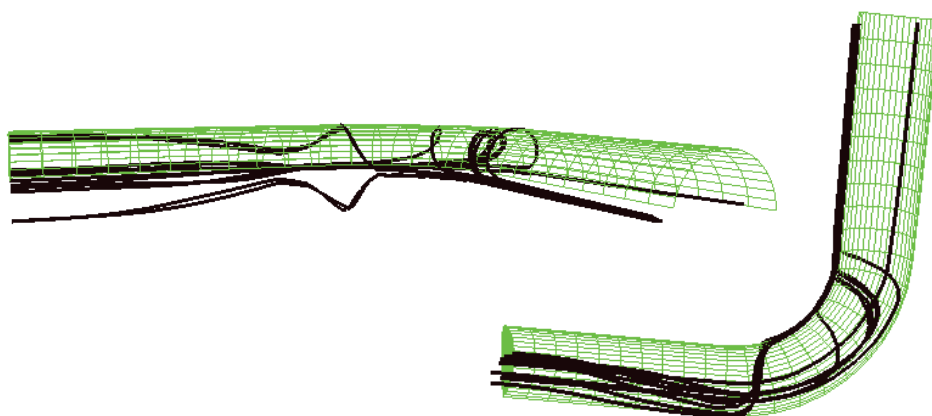


Рис. 12. Линии тока при $Re = 150$

Сложная структура течения в искривленном канале оказывает влияние на распределение давления и сопротивление канала. Давление в канале, усредненное по сечению, приведено на рис. 13.

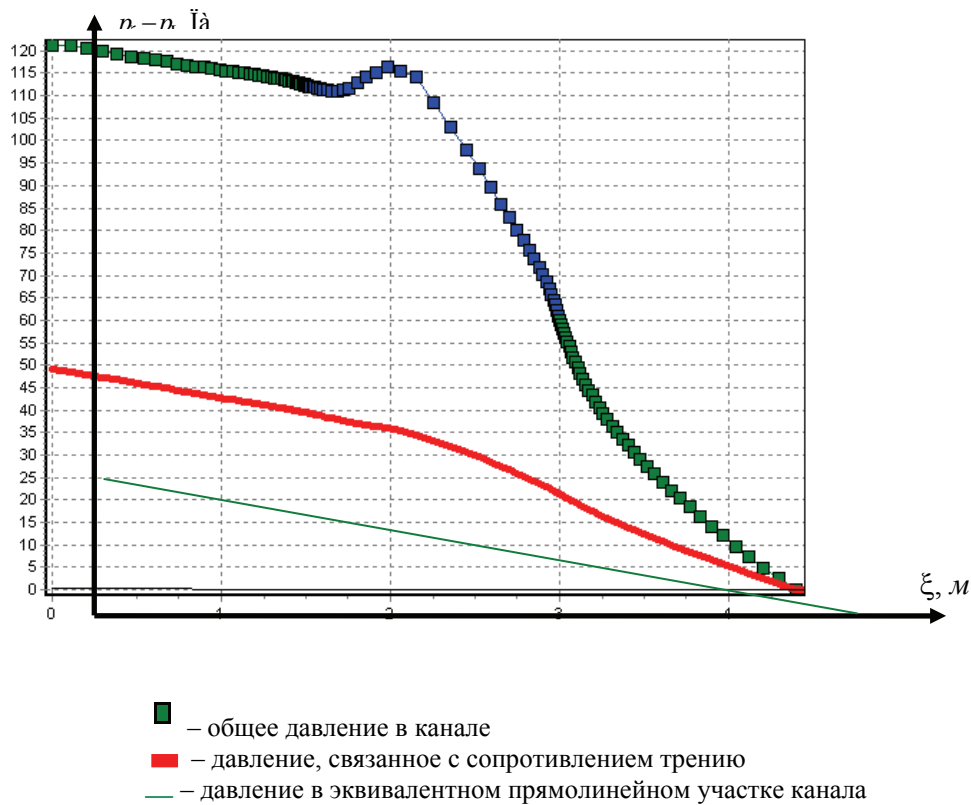


Рис. 13. Графики давления, усредненного по сечению канала при $Re = 1500$:

Анализ приведенных графиков, показывает, что перепад давления, необходимого для обеспечения заданного расхода на криволинейном участке канала значительно выше аналогичного перепада на эквивалентном прямолинейном участке. Это вызвано, с одной стороны, уве-

личением потерь давления на трение $\Delta P_w = \frac{\oint \tau_w R d\varphi}{\pi R^2}$, где

$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{\eta=R}$ – напряжение трения, R – радиус канала, а с другой -

лобовым сопротивлением канала в криволинейной области. Графики соответствующих перепадов давления представлены на рис. 14.

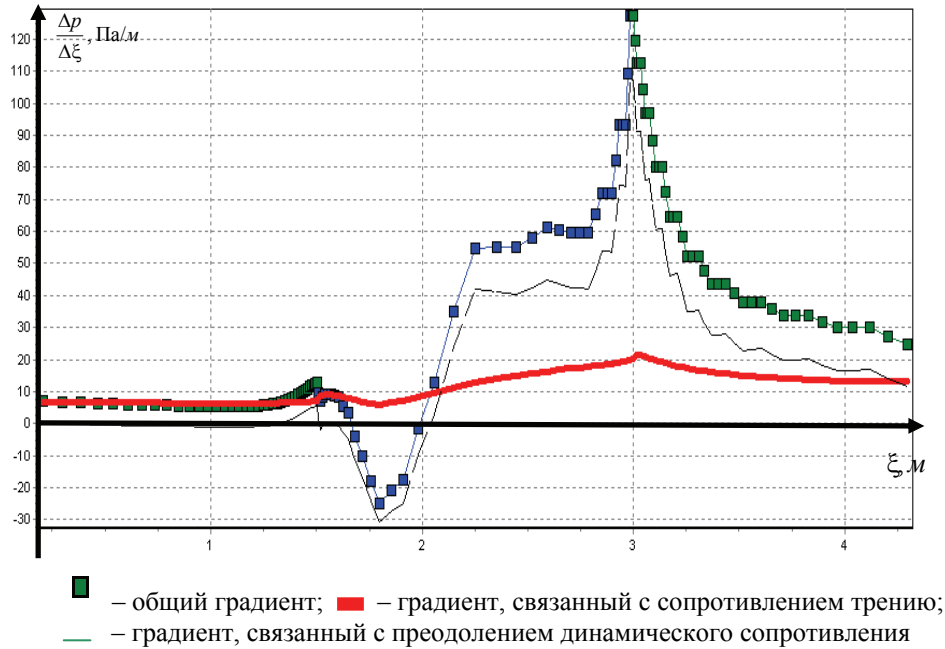


Рис. 14. Потери давления в канале

Отрицательный градиент давления на входе в криволинейную область канала вызван лобовым сопротивлением на нижней стенке канала и приводит к замедлению потока в этой области. В подтверждение приведем расчетные графики давления на различных линиях в пристеночной области (рис. 15).

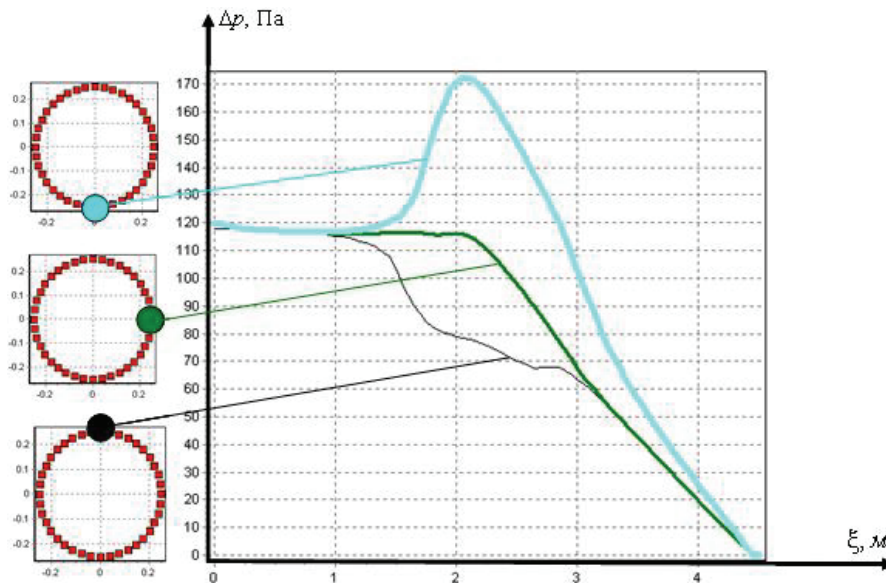


Рис. 15. Давление на различных линиях в пристеночной области



Таким образом, в статье дана математическая модель пространственного течения вязкой несжимаемой жидкости в областях сложной геометрии, приведены результаты численных расчетов на ЭВМ ламинарного течения в искривленной части трубопровода.

Библиографические ссылки

1. *Колосов С. М., Русяк И. Г.* Течение вязкой теплопроводной жидкости в канале с криволинейной образующей // Вестник ИжГТУ. Ижевск. 2006. № 4.
2. *Anderson J. D.* Computational Fluid Dynamics: the basics applications, 1995.
3. *Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М., 1990. Т. 1.
4. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М., 1984.