УДК 519.626

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С ТРЕНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННЫМИ СХЕМАМИ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Вихтенко Э. М. – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (ТОГУ)

Для решения полной контактной задачи с трением построены и обоснованы алгоритмы, основанные на использовании схем двойственности с модифицированными функционалами Лагранжа. Использование модифицированных функционалов Лагранжа позволяет не только получить сходимость как по прямым, так и по двойственным переменным, но и сгладить недифференцируемые слагаемые в минимизируемых функционалах.

For the solution of the complete contact problem with friction algorithms have been built based on duality schemes with modified Lagrangian functionals. The use of modified Lagrangian functionals makes it possible not only to obtain a convergence on both direct and dual variables, but also to smooth the non-differentiable parts in functionals minimized.

Ключевые слова: контактная задача, функционал, схема двойственности, функционал Лагранжа, седловая точка, метод Удзавы.

Рассмотрим полную задачу контакта упругого тела с абсолютно твердой поверхностью (рис. 1). На границе контакта Г в краевой постановке для описания взаимодействия тела с опорой используются условия Синьорини и трения по закону Кулона [1, 2].

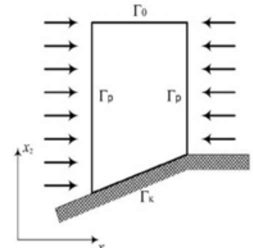

Рис. 1. Контакт тела с опорой

Полная контактная задача может быть сформулирована в виде квазивариационного неравенства [1, 2]

$$\int_{\Omega} c_{ijkm}\varepsilon_{km}(u)\varepsilon_{ij}(v-u)d\Omega + \int_{\Gamma_K} \Im\,|\,\sigma_n(u)\,|\,(|\,v_t\,|-|\,u_t\,|)d\Gamma \ge$$

$$\ge \int_{\Omega} f(v-u)d\Omega + \int_{\Gamma_P} T(v-u)d\Gamma \quad \forall v \in K. \qquad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения: вектор перемещений $v=(v_1,v_2)$, тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

тензор напряжений $\sigma_{ij}(v) = c_{ijkm}\varepsilon_{km}(v)$; $\Omega \in R^2$ – область с достаточно регулярной границей Γ, $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_K \cup \overline{\Gamma}_P$, где Γ_0, Γ_K, Γ_P – открытые попарно непересекающиеся подмножества Γ, $mes(\Gamma_0) > 0$, $mes(\Gamma_K) > 0$; c_{ijkm} – ограниченные, суммируемые в Ω функции, удовлетворяющие условиям симметрии $c_{ijkm} = c_{jikm} = c_{kmij}$; $F = (f_1, f_2) \in [L_2(\Omega)]^2$; $T = (T_1, T_2) \in [L_2(\Gamma_2)]^2$; $\Im$ – коэффициент трения, $\Im \ge 0$ на Γ_K; $n = (n_1, n_2)$ – вектор единичной внешней нормали к Γ; $u_n = u \cdot n$; $\sigma_i = \sigma_{ij} n_j$ $(i = 1,2)$; $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$; $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$; $\sigma_t = \sigma - \sigma_n n$. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Через W и K обозначены множества

$$W = \left\{ v \in [H^1(\Omega)]^2 : v_n \equiv v_2 = 0 \text{ на } \Gamma_0 \right\},$$

$$K = \left\{ v \in W : v_n \le 0 \text{ на } \Gamma_K \right\}.$$

Основной сложностью при исследовании и построении численных алгоритмов решения задачи (1) является зависимость силы трения $\Im\,|\,\sigma_n(u)\,|$ от искомого решения u. В [1, 2] предложен метод последовательных приближений для решения квазивариационного неравенства (1), приводящий на каждом шаге итерации к решению вспомогательного вариационного неравенства. Алгоритм метода последовательных приближений заключается в выполнении следующих шагов:

0. задается начальная сила трения $g^0 \in H^{1/2}(\Gamma_K)$, $g^0 \ge 0$;

1. находится u^s как решение вспомогательного вариационного неравенства

$$\int_{\Omega} c_{ijkm}\varepsilon_{km}(u^s)\varepsilon_{ij}(v-u^s)d\Omega + \int_{\Gamma_K} g^s(|\,v_t\,|-|\,u_t^s\,|)d\Gamma \ge$$

$$\ge \int_{\Omega} f(v-u^s)d\Omega + \int_{\Gamma_P} T(v-u^s)d\Gamma \quad \forall v \in K; \qquad (2)$$

3. вычисляется следующее приближение $g^{s+1} = \Im|\sigma_n(u^s)|$.

Вариационное неравенство (2) называется задачей с заданным трением [1]. Она эквивалентна задаче минимизации недифференцируемого функционала

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} c_{ijpm}\varepsilon_{km}(v)\varepsilon_{ij}(v)d\Omega + \int\limits_{\Gamma_K} g^s|v_t|d\Gamma - \int\limits_{\Omega} f\,v d\Omega - \int\limits_{\Gamma_P} T v d\Gamma \to min, \\ v \in K. \end{cases} \tag{3}$$

При показанной на рисунке 1 геометрии области Ω вспомогательная задача (2) является полукоэрцитивной [1, 2], минимизируемый функционал $J(v)$ в (3) не обладает свойством сильной выпуклости на всем пространстве.

В [3] показано, что из условия

$$\int\limits_{\Omega} f_1 d\Omega + \int\limits_{\Gamma_K} T_1 d\Gamma > 0$$

следует $J(v) \to +\infty$ при $\|v\|_{[H^1(\Omega)]^2} \to \infty$ для всех $v \in K$, что обеспечивает разрешимость задачи (3). В дальнейшем будем считать указанное условие выполненным.

Задача (3) является оптимизационной задачей с ограничениями. Для решения таких классов задач широко используются методы множителей Лагранжа (схемы двойственности). В классической теории двойственности применяются классические функционалы Лагранжа, линейные по двойственным переменным. Для задачи (2) классический функционал Лагранжа имеет вид

$$L(v,l) = J(v) + \int\limits_{\Gamma_K} l v_n d\Gamma \quad (v,l) \in W \times L_2(\Gamma_K).$$

Пара $(v^*, l^*) \in W \times (L_2(\Gamma_K))^+$ называется седловой точкой функционала Лагранжа $L(v,l)$, если выполнено двустороннее неравенство

$$L(v^*, l) \le L(v^*, l^*) \le L(v, l^*) \quad \forall (v,l) \in W \times (L_2(\Gamma_K))^+.$$

Через $(L_2(\Gamma_K))^+$ обозначено множество неотрицательных интегрируемых с квадратом функций из $L_2(\Gamma_K)$.

Известно, что если решение u задачи (3) принадлежит пространству $[H^2(\Omega)]^2$ и $mes\{x \in \Gamma_K : \sigma_n(u) < 0\} > 0$, то u является единственным решением задачи (3), а пара $(u, -\sigma_n(u))$ – единственной седловой точкой функционала Лагранжа $L(v,l)$.

Применение известных алгоритмов поиска седловых точек с классическим функционалом Лагранжа $L(v,l)$ имеет довольно серьезные ограничения. В коэрцитивных задачах сходимость итерационных процессов доказывается только по прямой переменной. Более того, данная сходимость обеспечивается согласованием длины шага сдвига по двойственной переменной с константой положительной определенности квадратичной формы минимизируемого функционала. В полукоэрцитивном случае использование классических функционалов Лагранжа не представляется возможным, так как квадратичная форма лишь неотрицательно определена. Для преодоления указанных сложностей целесообразно использовать модифицированные функционалы Лагранжа.

На множестве функций $W \times L_2(\Gamma_K)$ построим модифицированный функционал Лагранжа

$$M(v,l) = J(v) + \frac{1}{2r}\int_{\Gamma_K}\left(\left((l + rv_n)^+\right)^2 - l^2\right)d\Gamma. \quad (4)$$

Пара (v^*, l^*) называется седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа $M(v,l)$, если выполняются неравенства

$$M(v^*, l) \le M\left(v^*, l^*\right) \le M\left(v, l^*\right) \quad \forall v \in W, \forall l \in L_2(\Gamma_K).$$

Показано [4], что множества седловых точек классического и модифицированного функционалов Лагранжа совпадают. Модифицированные функционалы Лагранжа вида (4) рассмотрены в работах [4-7]. В указанных работах построены и обоснованы методы поиска седловых точек функционала $M(v,l)$ на основе итерационного метода Удзавы следующего видаStep1. на k-ом шаге $(k = 0,1,2,...)$, определим

$$v^{k+1} = arg\min_v M(v, l^k);$$

Step2. скорректируем l^{k+1} по формуле

$$l^{k+1} = (l^k + rv_n^{k+1})^+.$$

Элемент $l^0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ задается произвольно.

При численной реализации предложенных методов возникает дополнительная трудность, связанная с недифференцируемостью функционала $J(v)$. Для исправления ситуации возможно использование иного вида модификации функционала Лагранжа, позволяющего сгладить недифференцируемое слагаемое.

Определим функционал

$$\hat{J}(v,w) = a(v,v) - \int_\Omega f_i v_i \, d\Omega - \int_{\Gamma_P} T_i v_i \, d\Gamma + \int_{\Gamma_K} g^s \, | v \cdot t - w | d\Gamma.$$

Задача $J(v) \to \min$ эквивалентна задаче

$$\begin{cases} \hat{J}(v,w) \to \min, \\ v \in K, \\ w = 0 \text{ на } \Gamma_K, \, w \in L_2(\Gamma_K), \end{cases} \quad (5)$$

где $t = (-n_2, n_1)$ на Γ_K.

Для решения задачи (5) воспользуемся также схемами двойственности. На множестве $(W \times L_2(\Gamma_K)) \times (L_2(\Gamma_K))^2$ введем классический функционал Лагранжа

$$\hat{L}(v, w; l_1, l_2) = \hat{J}(v, w) + \int_{\Gamma_K} l_1 v_n \, d\Gamma + \int_{\Gamma_K} l_2 w d\Gamma,$$

и, аналогично (4), модифицированный функционал Лагранжа

$$\hat{M}(v, w; l_1, l_2) = \hat{J}(v, w) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(\left((l_1 + r v_n)^+ \right)^2 - l_1^2 \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_K} \left(l_2 w + \frac{r}{2} w^2 \right) d\Gamma.$$

Элемент $(v^*, w^*; l_1^*, l_2^*) \in (W \times L_2(\Gamma_K)) \times (L_2(\Gamma_K))^2$ называется седловой точкой функционала $\hat{M}(v, w; l_1, l_2)$, если выполнено двустороннее неравенство

$$\hat{M}(v^*, w^*; l_1, l_2) \le \hat{M}(v^*, w^*; l_1^*, l_2^*) \le \hat{M}(v, w; l_1^*, l_2^*)$$
$$\forall (v, w; l_1, l_2) \in (W \times L_2(\Gamma_K)) \times (L_2(\Gamma_K))^2.$$

Функционал $\hat{M}(v, w; l_1, l_2)$ является выпуклым по $(v, w) \in W \times L_2(\Gamma_K)$ при фиксированных $(l_1, l_2) \in (L_2(\Gamma_K))^2$ и вогнутым по (l_1, l_2) при фиксированных (v, w).

Можно показать, что элемент $(u, 0; -\sigma_n(u), l_2^*)$ является седловой точкой классического $\hat{L}(v, w; l_1, l_2)$ и модифицированного $\hat{M}(v, w; l_1, l_2)$ функционалов Лагранжа.

Для построения и обоснования алгоритма нахождения седловой точки функционала $\hat{M}(v, w; l_1, l_2)$ определим прямой и двойственный функционалы

$$\overline{\hat{M}}(v, w) = \sup_{l_1, l_2} \hat{M}(v, w; l_1, l_2), \quad \underline{\hat{M}}(l_1, l_2) = \inf_{v, w} \hat{M}(v, w; l_1, l_2).$$

Задача (5) может быть переписана как прямая задача

$$\begin{cases} \overline{\hat{M}}(v, w) \to \min, \\ v \in K, \\ w = 0 \text{ на } \Gamma_K, \ w \in L_2(\Gamma_K). \end{cases}$$

Решение прямой задачи при указанных выше условиях существует и равно $(u, 0)$.

Для двойственного функционала записывается двойственная задача

$$\begin{cases} \underline{\hat{M}}(l_1, l_2) - \max, \\ (l_1, l_2) \in (L_2(\Gamma_K))^2, \end{cases} \tag{6}$$

которая разрешима при любых (l_1, l_2), ее решение равно $(-\sigma_n(u), l_2^*)$.

Функционал $\underline{\hat{M}}(l_1,l_2)$ дифференцируем по Гато в $(L_2(\Gamma_K))^2$, его производная удовлетворяет условию Липшица с константой $1/r$; т.е. для любых $(l_{1'},l_{2'})$, $(l_{1''},l_{2''}) \in (L_2(\Gamma_K))^2$ выполняется

$$\left\|\nabla\underline{\hat{M}}(l_{1'},l_{2'}) - \nabla\underline{\hat{M}}(l_{1''},l_{2''})\right\|_{(L_2(\Gamma_K))^2} \le \frac{1}{r}\left\|(l_{1'}-l_{1''},l_{2'}-l_{2''})\right\|_{(L_2(\Gamma_K))^2}.$$

Поэтому для решения задачи (6) может быть использован градиентный метод [8]. Таким образом, решение задачи (5) может быть получено как компонента седловой точки модифицированного функционала Лагранжа $\hat{M}(v,w;l_1,l_2)$ в ходе выполнения следующиего итерационного алгоритма (метод Удзавы):

U-Step1. на k-ом шаге $(k = 0,1,2,...)$, определяем

$$(v^{k+1},w^{k+1}) = arg\min_{v,w}\hat{M}(v,w;l_1^k,l_2^k);$$

U-Step2. корректируем (l_1^{k+1},l_2^{k+1}) по формуле

$$(l_1^{k+1},l_2^{k+1}) = ((l_1^k + rv_n^{k+1})^+, l_2^k + rw^{k+1}).$$

Элемент $(l_1^0,l_2^0) \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ задается произвольно.

Теорема 1. *Пусть элементы* v^k, l_2^k, *k =1,2,…, удовлетворяют следующим условиям:*

1) $v^k \in (H^2(\Omega))^2$;

2) $\left\|v^k\right\|_{(H^2(\Omega))^2} \le C$;

3) $\left\|l_2^k\right\|_{H^{1/2}(\Gamma_K)} \le C$, $C > 0$ *– const.*

Тогда последовательность $\{(v^{k+1},w^{k+1};l_1^{k+1},l_2^{k+1})\}$, *построенная по методу Удзавы U-Step1, U-Step2 сходится в* $(W\times L_2(\Gamma_K))\times(L_2(\Gamma_K))^2$ *к седловой точке* $(u,0;-\sigma_n(u),l_2^*)$ *при любом выборе стартовой точки и любом фиксированном параметре* $r > 0$.

На шаге U-Step2 корректировка двойственных переменных проводится по формулам, которые следуют из градиентного метода решения (6) [5-7].

Идея перехода от задачи (2) к задаче (5) состоит в том, что осуществление шага U-Step1 в методе Удзавы сводится к минимизации дифференцируемого функционала. Действительно,

$$\min_{v,w}\hat{M}(v,w;l_1,l_2) = \min_{v,w}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega c_{ijpm}\varepsilon_{km}(v)\varepsilon_{ij}(v)d\Omega - \int_\Omega f\,v d\Omega - \int_{\Gamma_P} T v d\Gamma + \right.$$

$$\left. + \int_{\Gamma_K}\left(g^s|\,v\cdot t - w| + l_2 w + \frac{r}{2}w^2\right)d\Gamma + \frac{1}{2r}\int_{\Gamma_K}\left(\left((l_1 + rv_n)^+\right)^2 - l_1^2\right)d\Gamma\right\} =$$

$$= \min_v \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega c_{ijpm} \varepsilon_{km}(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_\Omega f\, v d\Omega - \int_{\Gamma_P} T\, v d\Gamma + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(\left((l_1 + r v_n)^+ \right)^2 - l_1^2 \right) d\Gamma + \inf_w \int_{\Gamma_K} \left(g^s |\, v \cdot t - w| + l_2 w + \frac{r}{2} w^2 \right) d\Gamma \right\} =$$

$$= \min_v \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega c_{ijpm} \varepsilon_{km}(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_\Omega f\, v d\Omega - \int_{\Gamma_P} T\, v d\Gamma + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(\left((l_1 + r v_n)^+ \right)^2 - l_1^2 \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_K} \inf_w \left(g^s |\, v \cdot t - w| + l_2 w + \frac{r}{2} w^2 \right) d\Gamma \right\}.$$

Известно, что функция числового аргумента

$$F(v \cdot t) = \inf_w (g^s \,|\, v \cdot t - w| + l_2 w + r w^2 / 2)$$

является непрерывно дифференцируемой выпуклой функцией аргумента ($v \cdot t$). Точки w^{k+1} соответствуют точкам минимума и непосредственно вычисляются по формулам

$$w^{k+1} = \begin{cases} \dfrac{g - l_2^k}{r}, & \text{если } \ v^{k+1} \cdot t > \dfrac{g - l_2^k}{r}, \\ v^{k+1} \cdot t, & \text{если } \ -\dfrac{g + l_2^k}{r} \le v^{k+1} \cdot t \le \dfrac{g - l_2^k}{r}, \\ -\dfrac{g + l_2^k}{r}, & \text{если } \ v^{k+1} \cdot t < -\dfrac{g + l_2^k}{r}. \end{cases}$$

Таким образом, первый шаг метода Удзавы сводится к минимизации дифференцируемого по v функционала.

Для нахождения элемента (v^{k+1}, w^{k+1}) на шаге U-Step1 метода Удзавы, необходимо решать задачу минимизации функционала $\hat{M}(v, w; l_1^k, l_2^k)$, который не является сильно выпуклым по (v, w). Для преодоления этого затруднения используем комбинацию метода Удзавы с методом проксимальной регуляризации.

Зададим начальное приближение $(v^0; l_1^0, l_2^0) \in (H^1(\Omega))^2 \times (H^{1/2}(\Gamma_K))^2$. Последовательность $(v^{k+1}, w^{k+1}; l_1^{k+1}, l_2^{k+1})$ будет строиться в результате выполнения следующих шагов:

W-Step1: найдем $z^{k+1} = (v^{k+1}, w^{k+1})$, такое, что

$$\left\| z^{k+1} - \bar{z}^{k+1} \right\|_{W \times L_2(\Gamma_K)} \le \delta_k, \quad \left(\|z\|^2_{W \times L_2(\Gamma_K)} = \|v\|^2_W + \|w\|^2_{L_2(\Gamma_K)} \right),$$

где $\bar{z}^{k+1} = (\bar{v}^{k+1}, \bar{w}^{k+1}) = arg\min\limits_{v,w} M_k(v,w)$, $\delta_k > 0, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta_k < \infty;$

$$M_k(v,w) = \hat{M}(v,w;l_1^k,l_2^k) + \frac{1}{2}\left\|v - v^k\right\|^2_{(L_2(\Omega))^2};$$

W-Step2: скорректируем двойственные переменные по формуле

$$(l_1^{k+1}, l_2^{k+1}) = ((l_1^k + rv_n^{k+1})^+, l_2^k + rw^{k+1}).$$

Регуляризационная добавка $1/2\left\|v - v^k\right\|^2_{(L_2(\Omega))^2}$ обеспечивает сильную выпуклость по v минимизируемого функционала $M_k(v,w)$. В этом случае вспомогательная задача $\min\limits_{v\in H} M_k(v,w)$ на каждом шаге k =1,2,… однозначно разрешима, и ее решение может быть найдено с помощью эффективных методов выпуклой оптимизации.

Теорема 2. *Пусть элементы* $\bar{v}^k$, γ_2^k, *k =1,2,…, удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\bar{v}^k \in (H^2(\Omega))^2$*;*

2) $\left\|\bar{v}^k\right\|_{(H^2(\Omega))^2} \le C$*;*

3) $\left\|\gamma_2^k\right\|_{H^{1/2}(\Gamma_K)} \le C$, $C > 0$ *– const.*

Тогда последовательность $\{(v^{k+1}, w^{k+1}; l_1^{k+1}, l_2^{k+1})\}$, *построенная по методу Удзавы W-Step1, W-Step2 сходится в* $(W \times L_2(\Gamma_K)) \times (L_2(\Gamma_K))^2$ *к седловой точке* $(u, 0; -\sigma_n(u), l_2^*)$ *при любом выборе стартовой точки и любом фиксированном параметре* $r > 0$.

Здесь $(\gamma_1^{k+1}, \gamma_2^{k+1}) = ((l_1^k + r\bar{v}_n^{k+1})^+, l_2^k + r\bar{w}^{k+1})$.

Таким образом, соединяя метод последовательных приближений и метод Удзавы с проксимальной регуляризацией, для решения контактной задачи с трением имеем следующий алгоритм:

0. задаем начальную силу трения $g^0 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $g^0 \ge 0$;

1.0. задаем начальное приближение

$$(v^0; l_1^0, l_2^0) \in (H^1(\Omega))^2 \times (H^{1/2}(\Gamma_K))^2;$$

1.1. находим $z^{k+1} = (v^{k+1}, w^{k+1})$, k=1,2,…, такое, что

$$\left\|z^{k+1} - \bar{z}^{k+1}\right\|_{W\times L_2(\Gamma_K)} \le \delta_k, \quad \left(\left\|z\right\|^2_{W\times L_2(\Gamma_K)} = \left\|v\right\|^2_W + \left\|w\right\|^2_{L_2(\Gamma_K)}\right),$$

где

$$\bar{z}^{k+1} = (\bar{v}^{k+1}, \bar{w}^{k+1}) = arg\min_{v,w} M_k(v,w), \tag{7}$$

$$\delta_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty;$$

1.2. корректируем двойственные переменные по формуле

$$(l_1^{k+1}, l_2^{k+1}) = ((l_1^k + r v_n^{k+1})^+, l_2^k + r w^{k+1}).$$

2. вычисляем следующее приближение $g^{s+1} = \Im | \sigma_n(u^s) | = \Im l_1^s$, s=1,2,…, $u^s = v^{k+1}$ – решения вспомогательной задачи (2).

При численной реализации полученного алгоритма для осуществления шага 1.1 необходимо решить задачу $\min\limits_{v,w} M_k(v,w)$. Причем практический интерес представляет не точное ее решение, а приближенное решение с погрешностью δ_k. Для этой цели используется метод конечных элементов, погрешность которого согласовывается с δ_k. Вопросы конечноэлементного решения контактной полукоэрцитивной задачи с применением модифицированных функционалов Лагранжа вида (4) рассматривались в [9].

Связь между тензором деформаций и тензором напряжений задается законом Гука для однородного изотропного тела

$$c_{ijkm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}),$$

где λ, μ – коэффициенты Ламе, δ_{ij} – единичный тензор. В таком случае

$$\sigma_{ij}(v) = \lambda \varepsilon_{kk}(v) \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ij}(v).$$

Коэффициенты Ламе выражаются через модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Для нахождения приближенного решения (7) используем метод конечных элементов на последовательности триангуляций области Ω. Введем следующие обозначения: F_h – триангуляция области Ω – конечная система замкнутых треугольников $\{T_i\}_{i \in N_h}$, удовлетворяющих стандартным требованиям [10, с. 23]; N_h – множество узлов F_h; $M_h = \Gamma \cap N_h$ – множество узлов границы области Ω; V_h – линейная оболочка соответствующих кусочно-аффинных базисных функций; $K_h = \{v_h \in V_h : \ (v_h)_n(s) \le 0 \ \text{ для } \ s \in M_h\}$. Отметим, что имеет место включение $K_h \subset K$.

Каждая триангуляция характеризуется наибольшей стороной h и наименьшим углом θ всех ее треугольников. Последовательность триангуляций называется регулярной, если существует постоянная $\theta_0 > 0$, не зависящая от h и такая, что $\theta \ge \theta_0$. Иными словами, треугольники триангуляций при $h \to 0$ не вырождаются в отрезки. Регулярная триангуляция F_h характеризуется только одним параметром h. Рассмотрим $\{F_{h_i}\}$ – регулярную систему триангуляций области Ω, $h_i \to 0$, i=1,2,… Система $\{F_{h_i}\}$ строится таким образом, что все вершины триангуляции $F_{h_{i-1}}$ входят в множество вершин F_{h_i}, i=2,3,… Следовательно, $K_{h_{i-1}} \subset K_{h_i} \subset \ldots \subset K$. В вычислительном алгоритме решения полной контактной задачи используем систему триангуляций с характерными параметрами $h_i = h_{i-1}/2$

Обозначим через $v_{h_i}^{k+1}$ решение конечномерной задачи

$$M_k(v_{h_i}, w_{h_i}) \to \min, \quad v_{h_i} \in K_{h_i}.$$

Алгоритма Удзавы с проксимальной регуляризацией на основе конечноэлементного решения в таком случае имеет вид:

W-Step1: найдем $z_{h_i}^{k+1} = (v_{h_i}{}^{k+1}, w_{h_i}{}^{k+1})$, такое, что

$$z_{h_i}^{k+1} = \arg\min M_k(v_{h_i}, w_{h_i}),$$

$$M_k(v_{h_i}, w_{h_i}) = \hat{M}(v_{h_i}, w_{h_i}; l_{1,h_i}^k, l_{2,h_i}^k) + \frac{1}{2}\left\| v_{h_i} - v_{h_i}{}^k \right\|_{(L_2(\Omega))^2}^2;$$

W-Step2: скорректируем двойственные переменные по формуле

$$(l_{1,h_i}^{k+1}, l_{2,h_i}^{k+1}) = ((l_{1,h_i}^k + r(v_{h_i}^{k+1})_n)^+, l_{2,h_i}^k + r w_{h_i}{}^{k+1}).$$

Библиографические ссылки

1. *Решение* вариационных неравенств в механике / И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек. М.: Мир, 1986.
2. *Kikuchi N., Oden T.* Contact problem in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods. Philadelphia: SIAM, 1988.
3. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
4. *Вихтенко Э.М., Намм Р.В.* Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 12. С. 2023-2036.
5. *Вихтенко Э.М., Намм Р.В.* Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа для решения квазивариационного неравенства Синьорини // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 9. С. 1571-1579.
6. *Вихтенко Э.М., Ву Г., Намм Р.В.* О сходимости метода Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа в вариационных неравенствах механики // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 8. С. 1357-1366.
7. *Namm R.V., Vikhtenko E.M.* Modified Lagrangian Functional for Solving the Signorini Problem with Friction // Advances in Mechanics Research. V. 1. New-York: Nova Science Publishers, 2010. P. 435-446.
8. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983.
9. *Намм Р.В., Сачков С.А.* Решение квазивариационного неравенства Синьорини методом последовательных приближений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 5. С. 805-814.
10. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981.