УДК 517.983

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ХАРДИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ[1]

Ломакина Е. Н. – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры МиММЭ, e-mail: lomakina.as@mail.ru (ХГАЭП)

Получены критерии ограниченности обобщенного оператора Харди с переменными пределами интегрирования, действующего в пространствах Лебега в случае $0 < q < 1 < p < \infty$.

Characterization of the mapping property such as $L^p \to L^q$ boundedness of the Hardy-type integral operator with variable limits of integration acting in the case $0 < q < 1 < p < \infty$ is established.

Ключевые слова: интегральный оператор Харди, ограниченность оператора, пространство Лебега.

Рассмотрим обобщенный оператор Харди

$$Kf(x) = v(x) \int_{a(x)}^{b(x)} k(x, y) u(y) f(y) dy, \tag{1}$$

с неотрицательным измеримым ядром $k(x, y)$, удовлетворяющим условию: существует константа $D > 1$, не зависящая от x, y, z такая, что

$$D^{-1}(k(x, b(z)) + k(z, y)) \le k(x, y) \le D(k(x, b(z)) + k(z, y)),$$
$$x > z \quad \text{и} \quad a(x) < y < b(z). \tag{2}$$

Пределы интегрирования $a(x)$ и $b(x)$ – возрастающие дифференцируемые функции, причем $a(0) = b(0) = 0$, $a(x) < b(x)$ для $x \in (0, \infty)$ и $a(\infty) = b(\infty) = \infty$. Изучение операторов (1) было инициировано в работе Э. Н. Батуева и В. Д. Степанова [1], где оператор (1) рассматривался с ядром $k(x, y) = 1$, а пределы интегрирования – линейные функции. Авторами полу-

[1] Данное исследование поддержано грантом РФФИ 08-01-98500-Р-восток и частично РФФИ 07-01-00054, НШ-2810.2008.1.

чен критерий ограниченности оператора, действующего в пространствах Лебега, при условии $1 < p,\ q < \infty$. Эта тема получила свое дальнейшее развитие в статье Х. Р. Хайнига и Г. Синамона [3], когда пределы интегрирования $a(x)$ и $b(x)$ - возрастающие дифференцируемые функции. Позднее для оператора (1) с ядром удовлетворяющим условию (2) и дополнительном условии $D^{-1}k(x,y) \le k(x,\omega) \le Dk(x,y)$, если $y \le \omega \le b(x)$, критерий $L^p \to L^q$ ограниченности получен в работе Т. Чена и Г. Синамона [8]. Для оператора Римана-Лиувилля с ядром $k(x,y) = (x-y)^{\alpha}$, $\alpha \ge 0$ и пределами интегрирования $a(x) = 0$, $b(x) = x$, критерий ограниченности найден В. Д. Степановым [7], когда $1 < p,\ q < \infty$. А. Гогатишвилли и Ж.. Лэнг [5] обобщили случай пространств Лебега $1 < p \le q < \infty$ в банаховых функциональных пространствах.

В данной статье характеризуется неравенство

$$\left(\int_0^{\infty} (Kf(x))^q v(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_0^{\infty} f^p(y)u(y)dy\right)^{1/p},\quad f \ge 0,$$

для оператора K, заданного формулой (1) в случае $0 < q < 1 < p < \infty$, с неотрицательными интегрируемыми функциями $u(y), v(x)$, который ранее не исследовался для данного оператора. Полученные результаты являются новыми и дополняют исследования в данной области.

Во всей статье неравенство $A << B$ означает $A \le cB$, где c – положительная константа; соотношение $A \approx B$ понимается как $A << B << A$ или $A = cB$. χ_E означает характеристическую функцию множества $E \subset R^+ = (0,\infty)$.

Пусть $1 < p < \infty$. Обозначим $L_u^p(R^+)$ конус всех неотрицательных измеримых функций с конечной нормой $\| f \|_{L_u^p(R^+)} = \left(\int_0^{\infty} f(x)^p u(x)dx\right)^{1/p}$, l_+^p – конус всех неотрицательных последовательностей $\alpha = \{\alpha_n\}$, для которых $\| \alpha \|_{l_+^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Пусть $0 < q < 1$. Обозначим $L_v^q(R^+)$ конус всех неотрицательных измеримых функций с конечной q-нормой $\| f \|_{L_v^q(R^+)} = \left(\int_0^{\infty} f(x)^q v(x)dx\right)^{1/q}$. В данном случае $L_v^q(R^+)$ является q-нормированным пространством, т. е. в аксиомах нормы неравенство треугольника выполняется со степенью $\|f+g\|^q_{L^q} \le \|f\|^q_{L^q} + \|g\|^q_{L^q}$ для всех $f,g \in L^q$.

Первым шагом в работе получен критерий ограниченности оператора $K_b : L^p_u(R^+) \to L^q_v(R^+)$ с одним переменным пределом интегрирования

$$K_b f(x) = \int_0^{b(x)} k(x,y) f(y)dy, \qquad (3)$$

где неотрицательное измеримое ядро $k(x,y)$ удовлетворяет условию (2), если $x \ge z \ge b^{-1}(y)$.

Лемма 1. Пусть $0<q<p<\infty,\ p>1,\ \frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p},\ (0,\infty)=\bigcup_k \Delta_k = \bigcup_k \delta_k$, где $...x_{k-1}<x_k<x_{k+1}...,\quad \Delta_k=[x_{k-1},x_k)$, $\delta_k=[b(x_{k-1}),b(x_k))$. Тогда $N=L$, где

$$N=\sup_{\substack{f\in L^p_u\\ f\ne 0}} \left(\sum_k \left(\int_{\Delta_{k+1}} v \right) \left(\int_{\delta_k} k(x_k,y) f(y)dy \right)^q \right)^{1/q} \|f\|^{-1}_{L^p_u} \quad \text{и}$$

$$L=\left(\sum_k \left(\int_{\Delta_{k+1}} v \right)^{r/q} \left(\int_{\delta_k} k^{p'}(x_k,y) u^{1-p'}(y)dy \right)^{r/p'} \right)^{1/r}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $N \le L$. Применяя неравенство Гельдера с показателями p и p', находим

$$\left(\sum_k \left(\int_{\Delta_{k+1}} v \right) \left(\int_{\delta_k} k(x_k,y) f(y)dy \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|^{-1}_{L^p_u} \le$$

$$\le \left(\sum_k \left(\int_{\Delta_{k+1}} v \right) \left(\int_{\delta_k} k^{p'}(x_k,y) u^{1-p'}(y)dy \right)^{\frac{q}{p'}} \left(\int_{\delta_k} f^p(y)u(y)dy \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|^{-1}_{L^p_u} \le [2]$$

$$\le \left(\sum_k \left(\int_{\Delta_{k+1}} v \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{\delta_k} k^{p'}(x_k,y) u^{1-p'}(y)dy \right)^{\frac{r}{p'}} \right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_k \int_{\delta_k} f^p(y)u(y)dy \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|^{-1}_{L^p_u} =$$

[2] используя неравенство Гельдера с показателями p/q и r/q

$$=\left(\sum_k\left(\int\limits_{\Delta_{k+1}} v\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int\limits_{\delta_k} k^{p'}(x_k,y)u^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{r}{p'}}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Покажем, что $N \ge L$. Предположим, что

$$\left(\sum_k\left(\int\limits_{\Delta_{k+1}} v\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int\limits_{\delta_k} k^{p'}(x_k,y)u^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{r}{p'}}\right)^{\frac{1}{r}}<\infty .$$

Выбирая функцию $f(y)\in L_u^p$ вида $f(y)=\sum\limits_k \chi_{\delta_k}(y)k^{p'-1}(x_k,y)u^{1-p'}(y)\times$

$$\times\left(\int\limits_{\Delta_{k+1}} v\right)^{\frac{1}{(p-q)}}\left(\int\limits_{\delta_k} k^{p'}(x_k,y)\,u^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{(q-1)}{(p-q)}},$$ получаем

$$N\ge\frac{\left(\sum\limits_k\left(\int\limits_{\Delta_{k+1}} v\right)\left(\int\limits_{\delta_k} k(x_k,y)f(y)dy\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{L_u^p}}=L.$$ Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $0<q<p<\infty,\ \ p>1,\ \ (0,\infty)=\bigcup\limits_k\Delta_k=\bigcup\limits_k\delta_k,$

$$\Delta_k=[x_{k-1},x_k),\ \ \delta_k=[b(x_{k-1}),b(x_k)),\ \ \ldots\ x_{k-1}<x_k<x_{k+1}\ \ldots .$$

Тогда $M=K,$ где

$$M=\sup_{\substack{f\in L_u^p\\ f\neq 0}}\frac{\left(\sum\limits_k a_k\left(\sum\limits_{n\le k}\int\limits_{\delta_n} f\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{L_u^p}},\qquad K=\sup_{\substack{\{\alpha_n\}\in l_+^p\\ \alpha_n\neq 0}}\frac{\left(\sum\limits_k a_k\left[\sum\limits_{n\le k}\alpha_n\sigma_n\right]^{q}\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum\limits_n\alpha_n^p\right)^{\frac{1}{p}}},$$

$\sigma_n=\left(\int\limits_{\delta_n} u^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{1}{p'}}$, $\{a_k\}$ – последовательность положительных чисел.

Доказательство. В силу неравенства Гельдера

$$\left(\sum_k a_k\left(\sum_{n\le k}\int_{\delta_n} f\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|^{-1}_{L^p_u}\le$$

$$\le\left(\sum_k a_k\left(\sum_{n\le k}\left(\int_{\delta_n} f^p u\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\delta_n} u^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_n\int_{\delta_n} f^p u\right)^{\frac{-1}{p}}\le$$

$$\le\left(\sum_k a_k\left[\sum_{n\le k}\alpha_n\sigma_n\right]^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_n \alpha_n^p\right)^{\frac{-1}{p}},\ \text{где } \alpha_n=\left(\int_{\delta_n} f^p u\right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда следует $M\le K.$ Докажем противоположное неравенство. Пусть $\{\alpha_n\}\in l^p_+$ и $f(y)=\sum_n \chi_{\delta_n}(y)u^{1-p'}(y)\alpha_n\sigma_n^{\frac{-p'}{p}}$, тогда $\|f\|_{L^p_u}=\left(\sum_n \alpha_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

$$M\ge\frac{\left(\sum_k a_k\left(\sum_{n\le k}\int_{\delta_n} f\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{L^p_u}}=\frac{\left(\sum_k a_k\left(\sum_{n\le k}\int_{\delta_n}\sum_n \chi_{\delta_n}(y)u^{1-p'}(y)\alpha_n\sigma_n^{\frac{-p'}{p}}dy\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int_0^\infty\left(\sum_n \chi_{\delta_n}(y)u^{1-p'}(y)\alpha_n\sigma_n^{\frac{-p'}{p}}\right)^p u(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}}=$$

$$=\left(\sum_k a_k\left(\sum_{n\le k}\alpha_n\sigma_n\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_n\left(\int_{\delta_n} u^{p(1-p')+1}(y)dy\right)\alpha_n^p\ \sigma_n^{-p'}\right)^{\frac{-1}{p}}=$$

$$=\left(\sum_k a_k\left(\sum_{n\le k}\alpha_n\sigma_n\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_n \alpha_n^p\right)^{\frac{-1}{p}}.$$

Имеем

$$M\ge\sup_{\substack{\{\alpha_n\}\in l^p\\ \alpha_n\ne 0}}\frac{\left(\sum_k a_k\left[\sum_{n\le k}\alpha_n\sigma_n\right]^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum_n \alpha_n^p\right)^{\frac{1}{p}}}=K,$$ и Лемма 2 доказана.

В работе М. Л. Гольдмана [2] в случае $0 < q < p < \infty$ доказана следующая эквивалентность

$$M{=}K{=}\sup_{\substack{\{\alpha_n\}\in l^p\\ \alpha_n\neq 0}} \frac{\left(\sum_k a_k\left[\sum_{n\le k}\alpha_n\sigma_n\right]^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum_n \alpha_n^p\right)^{\frac{1}{p}}} \approx \left(\sum_n\left(\sum_{k\ge n}a_k\right)^{\frac{r}{q}}\left(\sum_{k\le n}\sigma_k^{p'}\right)^{\frac{r}{q'}}\sigma_n^{p'}\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть $0 < q < 1 < p < \infty,\ \dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}$, интегральный оператор K определен формулой (3) с ядром, удовлетворяющим условию (2), при $x \ge z \ge b^{-1}(y)$, кроме того, ядро $k(x,y)$ непрерывно и возрастает по x. Тогда неравенство

$$\|K_b f\|_{L_v^q(R^+)} \le C\|f\|_{L_u^p(R^+)},\qquad f\ge 0$$

выполнено с конечной константой C, независящей от функции f в том и только в том случае, если $E=\max(E_1,E_2)<\infty$, где

$$E_1=\sup_{\{x_n\}}\left(\sum_n\left(\int_{x_n}^{x_{n+1}}v(x)dx\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_{b(x_{n-1})}^{b(x_n)}k^{p'}(x_n,y)u^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{r}{p'}}\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$E_2=\sup_{\{x_n\}}\left\{\sum_n\left[\sum_{k\ge n}k^q(x_{k+1},b(x_k))\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}}v\right]^{\frac{r}{q}}\left(\int_0^{b(x_n)}u^{1-p'}\right)^{\frac{r}{q'}}\left(\int_{b(x_{n-1})}^{b(x_n)}u^{1-p'}\right)\right\}^{\frac{1}{r}},$$

и точная верхняя грань берется по всем возрастающим последовательностям $\{x_n\}$ положительных чисел. Более того, $\|K_b\|\approx E$.

Доказательство. Из условия (2) мы находим

$$D^{-1}k(x_{k+1},y)\le k(x,y),\quad z=x_{k+1},\quad y<b(x_{k+1})\quad \text{и}$$

$$D^{-1}k(x_{k+1},b(x_k))\le k(x_{k+1},y),\quad z=x_k<x_{k+1},\quad y<b(x_k).$$

Тогда

$$\|K_b f\|_{L_v^q}^q \ge D^{-q}\sum_k\left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}}v(x)dx\right)\left(\int_0^{b(x_k)}k(x_{k+1},y)f(y)dy\right)^q \ge$$

$$\ge D^{-q}\sum_k\left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}}v\right)D^{-q}k^q(x_{k+1},b(x_k))\left(\int_0^{b(x_k)}f(y)dy\right)^q =$$

$$= D^{-2q}\sum_k\left(\int_{\Delta_{k+1}} v\right)k^q(x_{k+1},b(x_k))\left[\sum_{n\le k}\int_{\delta_n} f\right]^q.$$

Так как $\|K_b f\|_{L_v^q}\le\|K_b\|\cdot\|f\|_{L_u^p}$, получаем

$$D^{-2}\left(\sum_k\left(\int_{\Delta_{k+2}} v\right)k^q(x_{k+1},b(x_k))\left[\sum_{n\le k}\int_{\delta_n} f\right]^q\right)^{1/q}\|f\|_{L_u^p}^{-1}\le\|K_b\|.$$

Полагая $a_k=\left(\int_{\Delta_{k+1}} v\right)k^q(x_{k+1},b(x_k))$ и используя Лемму 2, мы имеем

$$\|K_b\|\ge D^{-2}\sup_{\substack{f\in L_u^p\\ f\ne 0}}\frac{\left(\sum_k a_k\left(\sum_{n\le k}\int_{\delta_n} f\right)^q\right)^{\frac1q}}{\|f\|_{L_u^p}}=D^{-2}\sup_{\substack{\{\alpha_n\}\in l^p\\ \alpha_n\ne 0}}\frac{\left(\sum_k a_k\left[\sum_{n\le k}\alpha_n\sigma_n\right]^q\right)^{\frac1q}}{\left(\sum_n \alpha_n^p\right)^{\frac1p}},$$

где $\sigma_n=\left(\int_{\delta_n} u^{1-p'}(y)dy\right)^{1/p'}$ и в силу формулы (4)

$$\|K_b\|>>D^{-2}\sup\left\{\sum_n\left(\sum_{k\ge n}k^q(x_{k+1},b(x_k))\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} v\right)^{\frac rq}\left(\int_0^{b(x_n)} u^{1-p'}\right)^{\frac r{q'}}\left(\int_{b(x_{n-1})}^{b(x_n)} u^{1-p'}\right)\right\}^{\frac1r}.$$

Следовательно, $E_2<<\|K_b\|$. Далее, используя (2) и Лемму 1, получаем

$$\|K_b f\|_{L_v^q}^q=\int_0^\infty (K_b f(x))^q v(x)dx=\sum_n\int_{x_n}^{x_{n+1}}\left(\int_0^{b(x)} k(x,y)f(y)dy\right)^q v(x)dx\ge$$

$$\ge D^{-q}\sum_n\left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v\right)\left(\int_0^{b(x_n)} k(x_n,y)f(y)dy\right)^q\ge D^{-q}\sum_n\left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v\right)\left(\int_{b(x_{n-1})}^{b(x_n)} k(x_n,y)f(y)dy\right)^q,$$

тогда

$$D^{-1}\sup_{\substack{f\in L_u^p\\ f\ne 0}}\left(\sum_n\left(\int_{\Delta_{n+1}} v\right)\left(\int_{\delta_n} k(x_n,y)f(y)dy\right)^q\right)^{\frac1q}\|f\|_{L_u^p}^{-1}\le\|K_b\|.$$

Следовательно,

$$D^{-1}\left(\sum_n\left(\int_{x_n}^{x_{n+1}}v(x)dx\right)^{r/q}\left(\int_{b(x_{n-1})}^{b(x_n)}k^{p'}(x_n,y)u^{1-p'}(y)dy\right)^{r/p'}\right)^{1/r}\le\|K_b\|,$$

переходя к супремуму по всем возрастающим последовательностям $\{x_n\}$, мы получаем $E_1 << \|K_b\|$, и оценка снизу доказана.

Для получения оценки сверху мы используем, что ядро $k(x,y)$ непрерывно и возрастает по x. Тогда найдется последовательность $\{b(x_n)\}$ такая, что $(D+1)^n = \int_0^{b(x_n)}k(x_n,y)f(y)dy$, с константой $D>1$ из условия (2). Так как $k(x_n,y)\le D(k(x_n,b(x_{n-1})+k(x_{n-1},y))$, где $x_n\ge x_{n-1}\ge b^{-1}(y)$, мы видим, что $k(x_n,y)-Dk(x_n,b(x_{n-1}))\le Dk(x_{n-1},y)$

и $\quad (D+1)^{n-1}\le\int_{b(x_{n-1})}^{b(x_n)}k(x_n,y)f(y)dy+Dk(x_n,b(x_{n-1}))\int_0^{b(x_{n-1})}f(y)dy.$

Положим $n-1=k$, тогда

$$(D+1)^k\le\int_{b(x_k)}^{b(x_{k+1})}k(x_{k+1},y)f(y)dy+Dk(x_{k+1},b(x_k))\int_0^{b(x_k)}f(y)dy.$$

Для $x\in\Delta_{k+2}=[x_{k+1},x_{k+2}]$ мы имеем $(D+1)^{k+1}\le Kf(x)\le(D+1)^{k+2}$.
Используя неравенство Йенсена и Леммы 1 и 2, получаем

$$\|Kf\|^q_{L^q_v}=\sum_k\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}}(Kf(x))^q v(x)dx\le(D+1)^{2q}\sum_k(D+1)^{kq}\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}}vdx\le$$

$$\le(D+1)^{2q}\sum_k\left(\int_{b(x_k)}^{b(x_{k+1})}k(x_{k+1},y)f(y)dy+Dk(x_{k+1},b(x_k))\int_0^{b(x_k)}f(y)dy\right)^q\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}}vdx\le$$

$$\le(D+1)^{2q}\sum_k\left(\int_{b(x_k)}^{b(x_{k+1})}k(x_{k+1},y)f(y)dy\right)^q\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}}vdx+$$

$$+(D+1)^{2q}D^q\sum_k k^q(x_{k+1},b(x_k))\left(\int_0^{b(x_k)}f\right)^q\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}}vdx\le$$

$$\le (D+1)^{2q} N^q \|f\|^q_{L^p_u} + (D+1)^{2q} D^q M^q \|f\|^q_{L^p_u} <<$$

$$<< (D+1)^{2q} E_1^q \|f\|^q_{L^p_u} + (D+1)^{2q} D^q E_2^q \|f\|^q_{L^p_u} << E_1\|f\|_{L^p_u} + E_2\|f\|_{L^p_u}.$$

Таким образом, $\|K_b\|_{L^p_u \to L^q_v} \approx \max(E_1, E_2)$ и Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Выполняются очевидные аналоги Теоремы 1 для конечного интервала. Аналогичные оценки справедливы и для двойственного оператора $K_a : L^p_u(R^+) \to L^q_v(R^+)$

$$K_a f = \int_{a(x)}^{\infty} k(y,x) f(y) dy, \tag{5}$$

где неотрицательное измеримое ядро удовлетворяет условию

$$k(y,x) \approx (k(y,z) + k(a(z),x)), \quad a^{-1}(y) \ge z \ge x. \tag{6}$$

Теорема 2. Пусть $0 < q < 1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$, интегральный оператор задан формулой (5) с ядром, удовлетворяющим условию (6), кроме того, ядро $k(y,x)$ непрерывно и убывает по y. Тогда неравенство

$$\|K_a\|_{L^q_v(R^+)} \le C\|f\|_{L^p_u(R^+)}, \quad f \ge 0$$

выполнено с конечной константой C, независящей от функции f в том и только в том случае, если $E^* = \max(E_1^*, E_2^*) < \infty$, где

$$E_1^* = \sup_{\{x_n\}} \left(\sum_n \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x)dx \right)^{r/q} \left(\int_{a(x_{n+1})}^{a(x_{n+2})} k^{p'}(y, x_{n+1}) u^{1-p'}(y) dy \right)^{r/p'} \right)^{1/r},$$

$$E_2^* = \sup_{\{x_n\}} \left\{ \sum_n \left(\sum_{k \le n} k^q(a(x_{k+1}), x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} v \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{a(x_{n+1})}^{\infty} u^{1-p'}(y)dy \right)^{\frac{r}{q}} \int_{a(x_{n+1})}^{a(x_{n+2})} u^{1-p'}(y)dy \right\}^{\frac{1}{r}},$$

точная верхняя грань берется по всем возрастающим последовательностям $\{x_n\}$ положительных чисел. Причём $\|K_a\| \approx E^*$.

Замечание 2. Пусть $k(y,x) = 1$ и оператор $H_1 : L^p_u(a(c); a(d)) \to L^q_v(c; d)$ определен по формуле $H_1 f(x) = w(x) \int_{a(x)}^{a(d)} f(y) dy$, а оператор

$H_2 : L_u^p(a(c);a(d)) \to L_v^q(c;d)$ вида $H_2 f(x) = \int\limits_{a(x)}^{a(d)} \phi(y) f(y)dy.$

Тогда $$\|H_1\| \approx \sup_{c<\{x_n\}<d} \left(\sum_n \left(\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} w^q(x)v(x)dx \right)^{r/q} \left(\int\limits_{a(x_{n+1})}^{a(x_{n+2})} u^{1-p'}(y)dy \right)^{r/p'} \right)^{1/r},$$

$$\|H_2\| \approx \sup_{c<\{x_n\}<d} \left(\sum_n \left(\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} v(x)dx \right)^{r/q} \left(\int\limits_{a(x_{n+1})}^{a(x_{n+2})} \phi^{p'}(y)u^{1-p'}(y)dy \right)^{r/p'} \right)^{1/r},$$

где точная верхняя грань берется так же по всем возрастающим последовательностям $\{x_n\}$ положительных чисел.

Далее, для получения критерия ограниченности оператора $K : L_u^p(R^+) \to L_v^q(R^+)$ с двумя переменными пределами интегрирования мы строим специальное разбиение полуоси $R^+ = \bigcup\limits_m \tau_m$, где $\tau_m = [\xi_m, \xi_{m+1})$ и $\sigma_m = [\eta_m, \eta_{m+1})$ определяются для $m \in Z$ следующим образом:

$$\xi_0 = 1,\ \eta_0 = a(\xi_0),\ \eta_1 = b(\xi_0),\ \eta_m = b(\xi_{m-1}),\ \ \xi_m = a^{-1}(\eta_m),$$
$$a(\xi_m) = b(\xi_{m-1}) = \eta_m,\ \ \xi_m = (a^{-1} \circ b)^m(1)\ . \tag{7}$$

Помимо этого, введём дополнительное разбиение. Пусть
$\tau_m = [\xi_m, \xi_{m+1}) = \bigcup\limits_k \lambda_k^m$, $\lambda_k^m = [x_{k-1}^m, x_k^m)$, где $\{x_k^m\}$ – возрастающая последовательность положительных чисел, $R^+ = \bigcup\limits_{m \in Z} \tau_m = \bigcup\limits_{m\in Z} \bigcup\limits_k [x_{k-1}^m, x_k^m)$

и $\sigma_m = [\eta_m, \eta_{m+1}) = \bigcup\limits_k \omega_k^m$, $\omega_k^m = [b(x_{k-1}^m), b(x_k^m))$, $\omega^{*m}_{k+1} = [a(x_k^m), a(x_{k+1}^m))$.

Теорема 3. Пусть $0 < q < 1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$, интегральный оператор K задан формулой (1) с ядром, удовлетворяющим условию (2). Тогда неравенство

$$\|Kf\|_{L_v^q(R^+)} \le C\|f\|_{L_u^p(R^+)}, \quad f \ge 0$$

выполнено с конечной константой C, не зависящей от функции f в том и только в том случае, если

$$\left(\sum_m ((E_{m,1})^r + (E_{m,2})^r + (E_{m,3})^r + (E_{m,4})^r) \right)^{1/r} < \infty, \text{ где}$$

$$E_{m,1}=\sup_{\xi_m<\{x_k^m\}<\xi_{m+1}}\left(\sum_k\left(\int_{x_k^m}^{x_{k+1}^m}v(x)dx\right)^{r/q}\left(\int_{b(x_{k-1}^m)}^{b(x_k^m)}k^{p'}(x_k^m,y)u^{1-p'}(y)dy\right)^{r/p'}\right)^{1/r},$$

$$E_{m,2}=\sup_{\xi_m<\{x_k^m\}<\xi_{m+1}}\left\{\sum_k\left[\sum_{n\ge k}k^q(x_{n+1}^m,b(x_n^m))\int_{x_{n+1}^m}^{x_{n+2}^m}v\right]^{\frac{r}{q}}\left(\int_0^{b(x_k^m)}u^{1-p'}\right)^{\frac{r}{q'}}\left(\int_{b(x_{k-1}^m)}^{b(x_k^m)}u^{1-p'}\right)\right\}^{\frac{1}{r}},$$

$$E_{m,3}=\sup_{\xi_m<\{x_k^m\}<\xi_{m+1}}\left(\sum_k\left(\int_{x_{k-1}^m}^{x_k^m}k^q(x,b(\xi_m))v(x)dx\right)^{r/q}\left(\int_{a(x_k^m)}^{a(x_{k+1}^m)}u^{1-p'}(y)dy\right)^{r/p'}\right)^{1/r},$$

$$E_{m,4}=\sup_{\xi_m<\{x_k^m\}<\xi_{m+1}}\left(\sum_k\left(\int_{x_{k-1}^m}^{x_k^m}v(x)dx\right)^{r/q}\left(\int_{a(x_k^m)}^{a(x_{k+1}^m)}k^{p'}(\xi_m,y)u^{1-p'}(y)dy\right)^{r/p'}\right)^{1/r},$$

точная верхняя грань берется по всем возрастающим последовательностям $\{x_k^m\}$ положительных чисел, а $\{\xi_m\}$ из разбиения (7).

Более того, $\|K\|\approx\left(\sum_m((E_{m,1})^r+(E_{m,2})^r+(E_{m,3})^r+(E_{m,4})^r)\right)^{1/r}<\infty.$

Доказательство. При специальном разбиении (7), если $x\in\tau_m=[\xi_m,\xi_{m+1})$, то $Kf(x)=T_mf(x)+S_mf(x)$, где

$$T_mf(x)=\int_{a(x)}^{b(\xi_m)}k(x,y)f(y)dy;\qquad S_mf(x)=\int_{b(\xi_m)}^{b(x)}k(x,y)f(y)dy.$$

Для оператора $T_mf(x)=\int_{a(x)}^{b(\xi_m)}k(x,y)f(y)dy$,

используя условия $a(x)<y<b(\xi_m)$, $\xi_m<x<\xi_{m+1}$, $b^{-1}(y)<\xi_m<x$ и $k(x,y)\approx(k(x,b(\xi_m))+k(\xi_m,y))$, мы находим

$$T_mf(x)\approx\left(k(x,b(\xi_m))\int_{a(x)}^{b(\xi_m)}f(y)dy+\int_{a(x)}^{b(\xi_m)}k(\xi_m,y)f(y)dy\right).$$

Применяя Замечания 1 и 2, получаем оценки на нормы операторов с переменным нижним пределом

$$\|T_m\| \approx \sup_{\xi_m < \{x_k^m\} < \xi_{m+1}} \left(\sum_k \left(\int_{x_{k-1}^m}^{x_k^m} k^q(x, b(\xi_m)) v(x) dx \right)^{r/q} \left(\int_{a(x_k^m)}^{a(x_{k+1}^m)} u^{1-p'}(y) dy \right)^{r/p'} \right)^{1/r} +$$

$$+ \sup_{\xi_m < \{x_k^m\} < \xi_{m+1}} \left(\sum_k \left(\int_{x_{k-1}^m}^{x_k^m} v(x) dx \right)^{r/q} \left(\int_{a(x_k^m)}^{a(x_{k+1}^m)} k^{p'}(\xi_m, y) u^{1-p'}(y) dy \right)^{r/p'} \right)^{1/r}$$

и переменным верхним пределом

$$\|S_m\| \approx \sup_{\xi_m < \{x_k^m\} < \xi_{m+1}} \left(\sum_k \left(\int_{x_k^m}^{x_{k+1}^m} v(x) dx \right)^{r/q} \left(\int_{b(x_{k-1}^m)}^{b(x_k^m)} k^{p'}(x_k^m, y) u^{1-p'}(y) dy \right)^{r/p'} \right)^{1/r} +$$

$$+ \sup_{\xi_m < \{x_k^m\} < \xi_{m+1}} \left\{ \sum_k \left[\sum_{n \ge k} k^q(x_{n+1}^m, b(x_n^m)) \int_{x_{n+1}^m}^{x_{n+2}^m} v \right]^{\frac{r}{q}} \left(\int_0^{b(x_k^m)} u^{1-p'}(y) dy \right)^{\frac{r}{q'}} \left(\int_{b(x_{k-1}^m)}^{b(x_k^m)} u^{1-p'}(y) dy \right) \right\}^{\frac{1}{r}}.$$

В результате $\|T_m\| \approx (E_{m,3} + E_{m,4})$, $\|S_m\| \approx (E_{m,1} + E_{m,2})$.

Переходим к оценке нормы оператора с двумя переменными пределами интегрирования.

$$\|Kf\|_{L_v^q}^q = \sum_m \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \left(\int_{a(x)}^{b(\xi_m)} k(x,y) f(y) dy + \int_{b(\xi_m)}^{b(x)} k(x,y) f(y) dy \right)^q v(x) dx \le$$

$$\le \sum_m \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \left(\int_{a(x)}^{b(\xi_m)} k(x,y) f(y) dy \right)^q v(x) dx + \sum_m \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \left(\int_{b(\xi_m)}^{b(x)} k(x,y) f(y) dy \right)^q v(x) dx =$$

$$= \sum_m \|T_m f\|_{L_v^q}^q + \sum_m \|S_m f\|_{L_v^q}^q \le \sum_m \|T_m\|^q \|\chi_{\sigma_m} f\|_p^q + \sum_m \|S_m\|^q \|\chi_{\sigma_{m+1}} f\|_p^q <<$$

$$<< \sum_m (E_{m,3} + E_{m,4})^q \|\chi_{\sigma_m} f\|_p^q + \sum_m (E_{m,1} + E_{m,2})^q \|\chi_{\sigma_{m+1}} f\|_p^q \le$$

$$\le \sum_m (E_{m,3})^q \|\chi_{\sigma_m} f\|_p^q + \sum_m (E_{m,4})^q \|\chi_{\sigma_m} f\|_p^q +$$

$$+ \sum_m (E_{m,1})^q \|\chi_{\sigma_{m+1}} f\|_p^q + \sum_m (E_{m,2})^q \|\chi_{\sigma_{m+1}} f\|_p^q \le \left(\sum_m (E_{m,3})^r \right)^{q/r} \left(\sum_m \|\chi_{\sigma_m} f\|_p^p \right)^{q/p} +$$

$$+\left(\sum_m (E_{m,4})^r\right)^{q/r}\left(\sum_m \left\|\chi_{\sigma_m} f\right\|_p^p\right)^{q/p}+\left(\sum_m (E_{m,1})^r\right)^{q/r}\left(\sum_m \left\|\chi_{\sigma_{m+1}} f\right\|_p^p\right)^{q/p}+$$

$$+\left(\sum_m (E_{m,2})^r\right)^{q/r}\left(\sum_m \left\|\chi_{\sigma_{m+1}} f\right\|_p^p\right)^{q/p}\le$$

$$\le 4^{q/p}\left(\sum_m \left((E_{m,3})^r+(E_{m,4})^r+(E_{m,1})^r+(E_{m,2})^r\right)\right)^{q/r}\|f\|_p^q.$$

Таким образом, мы получили верхнюю оценку нормы оператора

$$\|K\|_{L_u^p\to L_v^q} << \left(\sum_m ((E_{m,1})^r+(E_{m,2})^r+(E_{m,3})^r+(E_{m,4})^r)\right)^{1/r}.$$

Для доказательства нижней оценки нормы оператора K мы, используя специальное разбиение (7), введём следующие обозначения:

$\tau_m=[\xi_m,\xi_{m+1})=\bigcup_k \lambda_k^m$, $\lambda_k^m=[x_{k-1}^m,x_k^m)$, $\sigma_m=[\eta_m,\eta_{m+1})=\bigcup_k \omega_k^m$

$\omega_k^m=[b(x_{k-1}^m),b(x_k^m))$, $\omega^{*m}_{k+1}=[a(x_k^m),a(x_{k+1}^m))$. Тогда

$$\|Kf\|_{L_v^q}^q=\sum_m \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}}\left(\int_{a(x)}^{a(\xi_{m+1})}k(x,y)f(y)dy+\int_{a(\xi_{m+1})}^{b(x)}k(x,y)f(y)dy\right)^q v(x)dx\ge$$

$$\ge\sum_m\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}}\left(\int_{b(\xi_m)}^{b(x)}k(x,y)f(y)dy\right)^q v(x)dx\ge\sum_m\sum_k\int_{\lambda_{k+1}^m}\left(\int_{b(\xi_m)}^{b(x)}k(x,y)f(y)dy\right)^q v(x)dx\ge$$

$$\ge D^{-q}\sum_m\sum_k\left(\int_{\lambda_{k+1}^m}v(x)dx\right)\left(\int_{b(x_{k-1}^m)}^{b(x_k^m)}k(x_k^m,y)f(y)dy\right)^q\ge$$

$$\ge D^{-q}\sum_m\sum_k\left(\int_{\lambda_{k+1}^m}v(x)dx\right)\left(\int_{\omega_k^m}k(x_k^m,y)f(y)dy\right)^q.$$

Таким образом, используя Лемму 1, мы имеем

$$\|K\|_{L_u^p\to L_v^q}\ge D^{-1}\sup_{\substack{f\in L_u^p\\ f\ne 0}}\left(\sum_m\sum_k\left(\int_{\lambda_{k+1}^m}v(x)dx\right)\left(\int_{\omega_k^m}k(x_k^m,y)f(y)dy\right)^q\right)^{1/q}\|f\|_{L_u^p}^{-1}=$$

$$= D^{-1} \sup_{\substack{f\in L_u^p \\ f\neq 0}} \|f\|_{L_u^p}^{-1} \left(\sum_m \left(\int_{\sigma_m} f^p u \right)^{\frac{q}{p}} \left[\frac{\sum_k \left(\int_{\lambda_{k+1}^m} v(x)dx \right) \left(\int_{\omega_k^m} k(x_k^m, y) f(y) dy \right)^q}{\left(\int_{\sigma_m} f^p u \right)^{q/p}} \right] \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= D^{-1} \sup_{\{\alpha_m\}\in l_+^p} \left(\sum_m \alpha_m^p \right)^{-1/p} \left(\sum_m E_{m,1}^q \alpha_m^q \right)^{1/q} = D^{-1} \left(\sum_m E_{m,1}^r \right)^{1/r}.$$

Условие $k(x,y) \geq D^{-1}(k(x,b(\xi_m)) + k(\xi_m, y))$ для $x > \xi_m > b^{-1}(y)$ будет следующим: $k(x,y) \geq D^{-1}k(x,b(\xi_m))$. Итак,

$$\|Kf\|_{L_v^q}^q = \int_0^\infty (Kf(x))^q v(x)dx \geq \sum_m \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \left(\int_{a(x)}^{b(\xi_m)} k(x,y) f(y) dy \right)^q v(x)dx \geq$$

$$\geq D^{-q} \sum_m \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} k^q(x, b(\xi_m)) \left(\int_{a(x)}^{a(\xi_{m+1})} f(y)dy \right)^q v(x)dx \geq$$

$$\geq D^{-q} \sum_m \sum_k \int_{\lambda_k^m} k^q(x, b(\xi_m)) \left(\int_{a(x)}^{a(\xi_{m+1})} f(y)dy \right)^q v(x)dx \geq$$

$$\geq D^{-q} \sum_m \sum_k \int_{\lambda_k^m} k^q(x, b(\xi_m)) \left(\int_{a(x_k^m)}^{a(\xi_{m+1})} f(y)dy \right)^q v(x)dx \geq$$

$$\geq D^{-q} \sum_m \sum_k \left(\int_{\lambda_k^m} k^q(x, b(\xi_m)) v(x)dx \right) \left(\int_{{\omega^*}_{k+1}^m} f(y)dy \right)^q.$$

Отсюда

$$D^{-1} \left(\sum_m \sum_k \left(\int_{\lambda_k^m} k^q(x, b(\xi_m)) v(x)dx \right) \left(\int_{{\omega^*}_{k+1}^m} f(y)dy \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L_u^p}^{-1} \leq$$

$$\leq \|Kf\|_{L_v^q} \cdot \|f\|_{L_u^p}^{-1} \leq \|K\|_{L_u^p \to L_v^q},$$

и мы заключаем, что

$$D^{-1}\sup_{\substack{f\in L_u^p\\ f\neq 0}}\left(\sum_m\sum_k\left(\int_{\lambda_k^m}k^q(x,b(\xi_m))v(x)dx\right)\left(\int_{\omega_{k+1}^{*m}}f\right)^q\right)^{1/q}\|f\|_{L_u^p}^{-1}\le\|K\|_{L_u^p\to L_v^q}.$$

Снова, применяя Лемму 1, получим $D^{-1}\left(\sum_m(E_{m,3})^r\right)^{1/r}\le\|K\|_{L_u^p\to L_v^q}$.

Аналогичными аргументами с условием $k(x,y)\ge D^{-1}k(\xi_m,y)$ для $x>\xi_m>b^{-1}(y)$ получаем

$$D^{-1}\left(\sum_m(E_{m,4})^r\right)^{1/r}\le\|K\|_{L_u^p\to L_v^q}.$$

Пусть $x_{k+1}^m\ge x_k^m\ge b^{-1}(y)$. Тогда $k(x_{k+1}^m,y)\ge D^{-1}(k(x_{k+1}^m,b(x_k^m))+k(x_k^m,y))$ и $k(x_{k+1}^m,y)\ge D^{-1}k(x_{k+1}^m,b(x_k^m))$.

$$\|Kf\|_{L_v^q}^q\ge\sum_m\sum_k\int_{\lambda_{k+2}^m}\left(\int_{b(\xi_m)}^{b(x)}k(x,y)f(y)dy\right)^q v(x)dx\ge$$

$$\ge D^{-2q}\sum_m\sum_k\left(\int_{\lambda_{k+2}^m}v(x)dx\right)k^q(x_{k+1}^m,b(x_k^m))\left(\int_{b(\xi_m)}^{b(x_k)}f(y)dy\right)^q=$$

$$=D^{-2q}\sum_m\sum_k\left(\int_{\lambda_{k+2}^m}v(x)dx\right)k^q(x_{k+1}^m,b(x_k^m))\left(\sum_{n\le k}\int_{\omega_n^m}f(y)dy\right)^q.$$

Следовательно,

$$D^{-2}\left(\sum_m\sum_k\left(\int_{\lambda_{k+2}^m}v\right)k^q(x_{k+1}^m,b(x_k^m))\left(\sum_{n\le k}\int_{\omega_n^m}f(y)dy\right)^q\right)^{\frac1q}\|f\|_{L_u^p}^{-1}\le\|K\|_{L_u^p\to L_v^q}.$$

Полагая $a_k=\left(\int_{\lambda_{k+2}^m}v(x)dx\right)k^q(x_{k+1}^m,b(x_k^m))$ и используя Лемму 2, получам

$$\|K\|_{L_u^p\to L_v^q}\ge D^{-2}\sup_{\substack{f\in L_u^p\\ f\neq 0}}\|f\|_{L_u^p}^{-1}\left(\sum_m\sum_k a_k\left(\sum_{n\le k}\int_{\omega_n^m}f(y)dy\right)^q\right)^{\frac1q}\ge$$

$$\ge D^{-2}\sup_{\substack{f\in L_u^p\\ f\ne 0}}\|f\|_{L_u^p}^{-1}\left(\sum_m\left(\int_{\sigma_m} f^p u\right)^{\frac{q}{p}}\left(\sum_k a_k\left(\sum_{n\le k}\int_{\omega_k^m} f(y)dy\right)^q\left(\int_{\sigma_m} f^p u\right)^{-\frac{q}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= D^{-2}\sup_{\alpha_m\in l_+^p}\left(\sum_m \alpha_m^p\right)^{\frac{-1}{p}}\left(\sum_m E_{m,2}^q\alpha_m^q\right)^{\frac{1}{q}} = D^{-2}\left(\sum_m E_{m,2}^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Теорема 3 доказана.

Библиографические ссылки

1. *Батуев Э. Н., Степанов В. Д.* Весовые неравенства для оператора Харди // Сиб. матем. журнал. 1989. № 30.
2. *Гольдман М. Л.* Неравенства типа Харди на конусе квазимонотонных функций: Препринт ВЦ ДВО РАН. Хабаровск, 1998.
3. *Heining H. P., Sinnamon G.* Mapping properties of integral averaging operators // Studia Math. 1998. № 129.
4. *Sawyer E. T.* Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. № 281.
5. *Gogatishvili, J. Lang* The generalized Hardy operator with ker- nel and variable integral limits in Banach function spaces // J. Ineq. Appl. 1999. № 4.
6. *Lai Q.* Weighted modular inequalities for Hardy type operators // Proc. LMS 1999. № 79.
7. *Stepanov V. D.* Two weighted estimates for Riemann – Liouville integrals // Math. Inst. 1988. № 39.
8. *Chen T., Sinnamon G.* Generalized Hardy operators and normal izing measures // J.Ineq. Appl. 2002. № 7.