УДК 517.988.8

МЕТОД ФАЭДО-ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МОНОТОННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Виноградова П. В. – канд. физ. - мат. наук, доц. кафедры «Прикладная математика», e-mail: vpolina17@hotmail.com; *Зарубин А. Г.* – д - р физ. - мат. наук, проф. завкафедрой «Прикладная математика», тел. (4212) 37-51-88 (ТОГУ)

Исследуется проекционный метод для нелинейного параболического уравнения с монотонным оператором. Устанавливаются оценки скорости сходимости приближенных решений, а также их производных в сильной норме.

The projection method for a nonlinear parabolic equation with a monotonic operator is investigated. The estimates of the convergence rate for approximate solutions and their derivatives in the strong norm are obtained.

Ключевые слова: метод Фаэдо–Галеркина, параболическое уравнение, монотонный оператор, скорость сходимости, ортопроектор.

1. Постановка задачи и вспомогательные утверждения

Пусть Ω – ограниченная односвязная область с гладкой границей $\partial\Omega$ в R^m. Введем следующие обозначения:

$$Q = \Omega\times(0,T),\ x\in\Omega,\ T<\infty,\ t\in(0,T);\ \ S=\partial\Omega\times[0,T],\ z'(x,t)=\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}.$$

В цилиндре Q исследуем начально-краевую задачу

$$u'(x,t)-\Delta u(x,t)+K[u(x,t)]=h(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$u(x,t)=0,\quad (x,t)\in S, \tag{2}$$

$$u(x,0)=0,\quad x\in\overline{\Omega}. \tag{3}$$

В дальнейшем будем использовать стандартные обозначения пространств Лебега и Соболева (см., напр., [1, 2]). Норму в пространстве $L_2(\Omega)$ обозначим через $\|\cdot\|$, в пространстве $L_2(Q)$ – через $\|\cdot\|_{0,2}$, в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ – через $\|\cdot\|_{1,2}$.

Будем предполагать, что оператор K является монотонным [3], т. е. для любых элементов $u(x)$, $v(x)$ из $W_2^2(\Omega)\bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\left(K\left[u\right]-K\left[v\right],u-v\right)\geq 0, \tag{4}$$

оператор $K:W_2^{2,1}\left(Q\right)\to L_2\left(Q\right)$ вполне непрерывен ([4]) и подчинен оператору $-\Delta$ с порядком меньше единицы [5]

$$\|K[u]\|\leq\|-\Delta u\|^{\alpha}\varphi(\|u\|), \tag{5}$$

где $\varphi(\xi)$ – непрерывная функция на $[0,+\infty)$.

Далее через C будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от n и t.

Лемма 1. *Пусть функция $h(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$, оператор K монотонен, и выполнено неравенство (5). Тогда задача (1)-(3) имеет решение $u(x,t)$ из $W_2^{2,1}(Q)$ и оно единственное.*

Доказательство. Единственность решения следует из монотонности оператора K. Известно (см., напр., [2]), что задача

$$v'-\Delta v=g(x,t),\quad (x,t)\in Q,$$
$$v(x,t)=0,\quad (x,t)\in S,$$
$$v(x,0)=0,\quad x\in\overline{\Omega}$$

при $g(x,t)\in L_2(Q)$ имеет решение $v(x,t)$ из $W_2^{2,1}(Q)$, и оно единственно. Поэтому существует линейный ограниченный оператор $\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)^{-1}$, действующий из $L_2(Q)$ в $W_2^{2,1}(Q)$.

В уравнении (1) сделаем замену $v(x,t)=\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)u(x,t)$. Тогда получим в $L_2(Q)$ функциональное уравнение

$$v(x,t)+K\left[\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)^{-1}v(x,t)\right]=h(x,t) \tag{6}$$

с вполне непрерывным оператором $K\left[\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)^{-1}\right]$. Для доказательства разрешимости уравнения (6) воспользуемся принципом Лерэ-Шаудера [6].

Рассмотрим уравнение

$$v(x,t)+\lambda K\left[\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)^{-1}v(x,t)\right]=\lambda h(x,t), \qquad (7)$$

где $0\le\lambda\le 1$, и покажем, что все возможные решения уравнения (7) лежат в шаре конечного радиуса. Если v_λ – решение уравнения (7), то функция $u_\lambda(x,t)=\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)^{-1}v_\lambda$ будет решением начально-краевой задачи

$$u'_\lambda-\Delta u_\lambda+\lambda K[u_\lambda]=\lambda h(x,t),\quad (x,t)\in Q, \qquad (8)$$

$$u_\lambda(x,t)=0,\quad (x,t)\in S,\quad u_\lambda(x,0)=0,\quad x\in\overline{\Omega}. \qquad (9)$$

Умножим тождество (8) на u_λ скалярно в $L_2(\Omega)$ и проинтегрируем по t от 0 до $s\le T$, тогда, используя (4), (9) и ε-неравенство, получаем

$$\frac{1}{2}\|u_\lambda(x,s)\|^2+\int_0^s\|\nabla u_\lambda(x,t)\|^2\,dt\le\frac{1}{2\varepsilon}\|h(x,t)\|_{0,2}^2+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^s\|u_\lambda(x,t)\|^2dt.$$

Применяя неравенство Фридрихса [7] и выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим

$$\|u_\lambda(x,t)\|\le C_0, \qquad (10)$$

где постоянная C_0 не зависит от λ. Далее, из неравенства коэрцитивности и (5) вытекает оценка

$$\|u_\lambda\|_{1,2}\le C\left(\|h\|_{0,2}+\|K[u_\lambda]\|_{0,2}\right)\le C\left(\|h\|_{0,2}+\left(\int_0^T\left(\|-\Delta u_\lambda\|^{2\alpha}\varphi^2\left(\|u_\lambda\|\right)\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Отсюда, в силу (10), следует

$$\|u_\lambda(x,t)\|_{1,2}\le C\left(\|h\|_{0,2}+\|-\Delta u_\lambda\|_{0,2}^\alpha\right).$$

Таким образом,

$$\|u_\lambda(x,t)\|_{1,2}\le C_1, \qquad (11)$$

где $C_1>0$ – постоянная, не зависящая от λ и $u_\lambda(x,t)$. Лемма доказана.

Обозначим через $e_i(x)$ собственные функции оператора $-\Delta$ при нулевых граничных условиях, здесь $i=(i_1,\dots,i_m)$ – мультииндекс. Собственные функции принадлежат пространству $W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и образуют полную ортогональную систему в $L_2(\Omega)$. Пусть P_n – ортопроектор в $L_2(\Omega)$ на линейную оболочку функций $e_1(x),\dots,e_n(x)$.

2. Сходимость метода Фаэдо-Галеркина

Исследуем метод Фаэдо-Галеркина для решения задачи (1)–(3). Для приближенного решения $u_n(x,t)$ рассмотрим задачу Коши

$$u_n' - \Delta u_n + P_n K[u_n] = P_n h(x,t), \tag{12}$$

$$u_n(x,0) = 0. \tag{13}$$

Теорема 1. *Пусть* $h(x,t) \in L_2(Q)$, K *– монотонный, вполне непрерывный оператор, дифференцируемый по Фреше, для которого выполнено неравенство (5) и*

$$\left\| K'[z]v \right\| \le \gamma(R) \left\| -\Delta v \right\|^{\beta} \left\| v \right\|^{1-\beta}, \tag{14}$$

где $0 \le \beta < 1$, $z(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $\left\| z(x,t) \right\|_{1,2} \le R$, $v(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Тогда задача (12)-(13) при любом n *имеет решение* $u_n(x,t)$ *из* $W_2^{2,1}(Q)$ *и оно единственно. Приближенные решения* $u_n(x,t)$ *сходятся к решению* $u(x,t)$ *задачи (1)-(3) по норме пространства* $W_2^{2,1}(Q)$, *и верна оценка*

$$\sup_{0 \le t \le T} \left\| u_n(x,t) - u(x,t) \right\| \le C \lambda_{n+1}^{-1/2}. \tag{15}$$

Доказательство. Однозначная разрешимость задачи (12)-(13) доказывается аналогично лемме 1. Для разности $u(x,t) - u_n(x,t)$ верно тождество

$$\left(u - u_n\right)' - \Delta\left(u - u_n\right) + K[u] - K[u_n] = \left(I - P_n\right)\left(h(x,t) - K[u_n]\right). \tag{16}$$

Умножим (16) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $u(x,t) - u_n(x,t)$ и проинтегрируем по t от 0 до $s \le T$. Тогда

$$\frac{1}{2}\left\| u(x,s) - u_n(x,s) \right\|^2 + \int_0^s \left\| \nabla\left(u(x,t) - u_n(x,t)\right) \right\|^2 dt \le$$

$$\le \int_0^s \left(h(x,t) - K[u_n(x,t)], \left(I - P_n\right)\left(u(x,t) - u_n(x,t)\right)\right) dt.$$

Так как $u(x,t) - u_n(x,t)$ почти при каждом $t \in [0,T]$ принадлежит пространству $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то

$$\frac{1}{2}\|u(x,s)-u_n(x,s)\|^2+\int_0^s\left\|\nabla\left(u(x,t)-u_n(x,t)\right)\right\|^2 dt\le$$

$$\le\lambda_{n+1}^{-1/2}\int_0^s\left(\|h(x,t)\|+\|K[u_n(x,t)]\|\right)\left\|-\Delta^{1/2}\left(u(x,t)-u_n(x,t)\right)\right\|dt\le$$

$$\le C\varepsilon^{-1}\lambda_{n+1}^{-1}\left(\|h(x,t)\|_{0,2}^2+\|K[u_n(x,t)]\|_{0,2}^2\right)+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^s\left\|\nabla\left(u(x,t)-u_n(x,t)\right)\right\|^2 dt.$$

Выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым, получаем

$$\|u(x,s)-u_n(x,s)\|^2\le C\lambda_{n+1}^{-1}\left(\|h\|_{0,2}^2+\|K[u_n]\|_{0,2}^2\right). \qquad (17)$$

По аналогии с выводом оценки (11) нетрудно показать, что $\|u_n(x,t)\|_{1,2}\le C$. Отсюда из неравенств (5) и (17) приходим к соотношению

$$\|u(x,s)-u_n(x,s)\|^2\le C\lambda_{n+1}^{-1}\left(\|h\|_{0,2}^2+\|-\Delta u_n\|_{0,2}^{\alpha}\left(\int_0^T\varphi^{\frac{2}{1-\alpha}}\left(\|u_n\|\right)dt\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right).$$

Далее, для любого n имеем

$$\sup_{0\le t\le T}\|u_n\|\le C\|h\|_{0,2}.$$

Поэтому из предыдущего неравенства получаем оценку (15).

Из неравенства коэрцитивности для линейных параболических уравнений имеем

$$\|u-u_n\|_{1,2}\le C\left(\left\|\left(I-P_n\right)h\right\|_{0,2}+\left\|\left(I-P_n\right)K[u_n]\right\|_{0,2}+\|K[u_n]-K[u]\|_{0,2}\right). \qquad (18)$$

Первое слагаемое правой части (18) стремится к нулю. Второе слагаемое также стремится к нулю, так как множество $\{K[u_n]\}$ является компактом в $L_2(Q)$, а как известно [8], множество линейных ограниченных операторов сходится на компакте равномерно.

Для разности $K[u]-K[u_n]$ (см., напр., [4]) верно неравенство

$$\|K[u]-K[u_n]\|\le\left\|K'\left[u+\theta\left(u-u_n\right)\right]\left(u-u_n\right)\right\|_{0,2}.$$

Отсюда и из (14) получаем

$$\|K[u]-K[u_n]\|_{0,2}\le\gamma(R)\left\|-\Delta\left(u-u_n\right)\right\|^{\beta}\|u-u_n\|_{0,2}^{1-\beta}.$$

Таким образом, в силу оценки (15), третье слагаемое правой части (18) стремится к нулю при $n\to\infty$. Теорема доказана.

В Теореме 1 показано, что $u_n(x,t)$ сходятся к решению $u(x,t)$ задачи (1)-(3) по норме пространства $W_2^{2,1}(Q)$. Установим связь между решениями следующих задач:

$$v' - \Delta v + K'[u_n]v = h'(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{19}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S, \tag{20}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega} \tag{21}$$

и

$$w' - \Delta w + K'[u]w = h'(t), \quad (x,t) \in Q, \tag{22}$$

$$w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S, \tag{23}$$

$$w(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{24}$$

Теорема 2. *Пусть функция* $h(x,t) \in L_2(Q)$ *имеет производную* $h'(x,t) \in L_2(Q)$, *выполнены условия теоремы 1 и*

$$\|K'[z_1]w - K'[z_2]w\|_{0,2} \le \gamma_1(R) \|-\Delta(z_1 - z_2)\|_{0,2}^{\gamma} \|z_1 - z_2\|_{0,2}^{1-\gamma} \|w\|_{1,2}, \tag{25}$$

где $0 \le \gamma < 1, \quad \|z\|_{1,2} \le R, \quad w \in W_2^{2,1}(Q)$.

Тогда задачи (19)-(21) и (22)-(24) имеют решения $v(n)$ *и* $w(x,t)$, *и эти решения единственны. Функции* $v(n)$ *сходятся к* $w(x,t)$ *по норме пространства* $W_2^{2,1}(Q)$, *причем*

$$\sup_{0 \le t \le T} \|v(n) - w(x,t)\| \le C \lambda_{n+1}^{\frac{\gamma-1}{2}}. \tag{26}$$

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$y'(x,t) - \Delta y(x,t) + K'[z]y(x,t) = g(x,t), \tag{27}$$

$$y(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S, \tag{28}$$

$$y(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{29}$$

где $g(x,t) \in L_2(Q), \quad z(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$.

Задача (27)–(29) эквивалентна уравнению

$$Y(x,t) + K'[z]\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)^{-1} Y(x,t) = g(x,t) \tag{30}$$

с линейным вполне непрерывным оператором $K'[z]\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)^{-1}$ в пространстве $L_2(Q)$. Однородное уравнение (30) равносильно однородной задаче (27)–(29). Умножим однородное уравнение (27) скалярно на $y(x,t)$ и проинтегрируем по t от 0 до $\xi \le T$. Тогда

$$\frac{1}{2}\|y(x,\xi)\|^2+\int_0^{\xi}\|\nabla y(x,t)\|^2\,dt+\int_0^{\xi}\big(K'[z]y(x,t),y(x,t)\big)\,dt=0.$$

В силу монотонности оператора K третье слагаемое последнего равенства неотрицательно, следовательно, это равенство возможно только при $y\equiv 0$. Тогда, согласно альтернативе Фредгольма, уравнение (30) имеет решение $Y(x,t)$ из $L_2(Q)$, и оно единственно.

Полагая $z(x,t)=u(x,t)$ и $g(x,t)=h'(x,t)$, получаем, что задача (22)–(24) имеет решение $w(x,t)$ из $W_2^{2,1}(Q)$, и оно единственно. Если взять $g(x,t)=h'(x,t)$ и $z(x,t)=u_n(x,t)$, то при фиксированном n задача (19)–(21) имеет единственное решение $v(n)$ из $W_2^{2,1}(Q)$.

Для разности $w(x,t)-v(n)$ верно тождество

$$\big(w-v(n)\big)'-\Delta\big(w-v(n)\big)+K'[u_n]\big(w-v(n)\big)=\big(K'[u_n]-K'[u]\big)w. \qquad (31)$$

Тогда из монотонности оператора K и (31) следует

$$\frac{1}{2}\big\|w(x,\xi)-v(n)\big\|^2+\int_0^{\xi}\big\|\nabla\big(w(x,t)-v(n)\big)\big\|^2\,dt\le$$

$$\le\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{\xi}\big\|\big(K'[u_n]-K'[u]\big)w(x,t)\big\|^2\,dt+\frac{\varepsilon}{2}C\int_0^{\xi}\big\|\nabla\big(w(x,t)-v(n)\big)\big\|^2\,dt.$$

Выберем $\varepsilon>0$ достаточно малым. Тогда

$$\big\|w(x,\xi)-v(n)\big\|^2\le C\big\|\big(K'[u_n]-K'[u]\big)w(x,t)\big\|_{0,2}^2.$$

В силу (25) из последнего неравенства вытекает оценка

$$\big\|w(x,\xi)-v(n)\big\|^2\le C\|-\Delta(u_n-u)\|_{0,2}^{2\gamma}\|u_n-u\|_{0,2}^{2(1-\gamma)}.$$

Из сходимости $u_n(x,t)$ к $u(x,t)$ по норме пространства $W_2^{2,1}(Q)$ и оценки (15) следует неравенство (26).

Из неравенства коэрцитивности для линейных параболических уравнений [2] и условий теоремы следует, что

$$\|w-v(n)\|_{1,2}\le C\Big(\big\|K'[u_n]\big(w-v(n)\big)\big\|_{0,2}+\big\|\big(K'[u_n]-K'[u]\big)w\big\|_{0,2}\Big)\le$$

$$\le C\Big(\big\|-\Delta\big(w-v(n)\big)\big\|_{0,2}^{\beta}\big\|w-v(n)\big\|_{0,2}^{1-\beta}+\big\|\big(K'[u_n]-K'[u]\big)w\big\|_{0,2}\Big).$$

Применяя неравенство Юнга к первому слагаемому правой части последнего соотношения, получим

$$\|w-v(n)\|_{1,2}\le C\Big(\|w-v(n)\|_{0,2}+\|-\Delta(u_n-u)\|_{0,2}^{\gamma}\|u_n-u\|_{0,2}^{1-\gamma}\|w\|_{1,2}\Big).$$

Отсюда из оценки (26) и теоремы 1 следует сходимость $v(n)$ к $w(x,t)$ по норме пространства $W_2^{2,1}(Q)$. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть функция* $v(x,t)$ *имеет производную* $v'(x,t)$ *из пространства* $L_2(Q)$, *оператор* K *дифференцируем по Фреше. Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial t}K\left[v(x,t)\right]=K'\left[v(x,t)\right]\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{32}$$

Утверждение данной леммы нетрудно получить, используя определение частной производной и дифференцируемость по Фреше оператора K.

Вернемся к задаче (12)-(13). Пусть $h(x,t)\in C(\bar{Q})$ и имеет производную $h'(x,t)\in C(\bar{Q})$. Положим $h(x,0)=0$, тогда из уравнения (12) следует $u_n'(x,0)=0$ при любом n. Продифференцируем по t уравнение (12), полагая $v_n(x,t)=u_n'(x,t)$ и используя (32), получим

$$v_n'-\Delta v_n+P_nK'[u_n]v_n=P_nh'(x,t), \tag{33}$$

$$v_n(x,0)=0. \tag{34}$$

Теорема 3. *Пусть* $h(x,t)\in C(\bar{Q})$, $h(x,0)=0$, $h'(x,t)\in C(\bar{Q})$, *выполнены условия теоремы 2. Тогда*

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|u_n'-u'\right\|\le C\lambda_{n+1}^{\frac{\gamma-1}{2}}, \tag{35}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\nabla(u_n-u)\right\|\le C\lambda_{n+1}^{\frac{\gamma-2}{4}}. \tag{36}$$

Доказательство. Для решений задач (19)-(21) и (33)-(34) верно тождество

$$\left(v(n)-v_n\right)'-\Delta\left(v(n)-v_n\right)+K'[u_n]\left(v(n)-v_n\right)=$$
$$=\left(I-P_n\right)\left(h'(x,t)-K'[u_n]v_n\right).$$

Умножим скалярно последнее равенство на $\left(v(n)-v_n\right)$ и проинтегрируем по t от 0 до $s\le T$. Тогда

$$\frac{1}{2}\left\|v(n)-v_n\right\|^2+\int_0^s\left\|\nabla\left(v(n)-v_n\right)\right\|^2dt\le$$
$$\le\int_0^s\left|\left(h'(x,t)-K'[u_n]v_n,(I-P_n)\right)\left(v(n)-v_n\right)\right|dt.$$

ВЕСТНИК ТОГУ. 2008. № 4 (11)

Так как $\left(v(n)-v_n\right)\in W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при всех $t\in[0,T]$, то

$$\frac{1}{2}\left\|v(n)-v_n\right\|^2+\int_0^s\left\|\nabla\left(v(n)-v_n\right)\right\|^2dt\le$$
$$\le\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}\int_0^s\left(\left\|h'(x,t)\right\|+\left\|K'[u_n]v_n\right\|\right)\left\|\nabla\left(v(n)-v_n\right)\right\|dt.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\left\|v(n)-v_n\right\|^2+\int_0^s\left\|\nabla\left(v(n)-v_n\right)\right\|^2dt\le$$
$$\le\lambda_{n+1}^{-1}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T\left(\left\|h'(x,t)\right\|^2+\left\|K'[u_n]v_n\right\|^2\right)dt+$$
$$+\frac{C\varepsilon}{2}\int_0^s\left\|\nabla\left(v(n)-v_n\right)\right\|^2dt.$$

Выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым и применяя оценку (14), получаем

$$\left\|v(n)-v_n\right\|^2\le C\lambda_{n+1}^{-1}\left(\left\|h'(x,t)\right\|_{0,2}^2+\gamma^2(R)\int_0^T\left\|-\Delta v_n\right\|^{\beta}\left\|v_n\right\|^{1-\beta}dt\right).$$

Так как v_n находятся в шаре конечного радиуса, то

$$\left\|v(n)-v_n\right\|\le C\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Далее

$$\left\|w-u'\right\|_{0,2}\le\left\|w-v(n)\right\|_{0,2}+\left\|v(n)-v_n\right\|_{0,2}+\left\|v_n-u'\right\|_{0,2}.$$

Отсюда и из неравенств (26), (37), а также из теоремы 1 следует, что $w=u'$ почти всюду.

Так как $\left\|u_n{}'-u'\right\|\le\left\|u'-v(n)\right\|+\left\|v(n)-v_n\right\|$, то из оценок (26) и (37) следует (35).

Для разности $u-u_n$ справедливо тождество

$$-\Delta\left(u-u_n\right)+K[u]-K[u_n]=\left(u_n-u\right)'+\left(I-P_n\right)\left(h(x,t)-K[u_n]\right). \tag{38}$$

Умножим (38) на $u-u_n$ скалярно в $L_2(\Omega)$ и, учитывая (4), получаем

$$\left\|\nabla\left(u_n-u\right)\right\|^2\le\left\|u_n{}'-u'\right\|\left\|u_n-u\right\|+\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}\left(\left\|h(x,t)\right\|+\left\|K[u_n]\right\|\right)\left\|\nabla\left(u_n-u\right)\right\|.$$

Используя оценки (35) и (15), приходим к неравенству

$$\left\|\nabla\left(u_n-u\right)\right\|^2 \le C\left(\lambda_{n+1}^{\frac{\gamma-2}{2}}+\frac{\lambda_{n+1}^{-1}}{\varepsilon}\left(\left\|h\left(x,t\right)\right\|^2+\left\|K\left[u_n\right]\right\|^2\right)\right)+\frac{\varepsilon}{2}\left\|\nabla\left(u_n-u\right)\right\|^2.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ достаточно малым, тогда

$$\left\|\nabla\left(u_n-u\right)\right\|^2 \le C\left(\lambda_{n+1}^{\frac{\gamma-2}{2}}+\lambda_{n+1}^{-1}\left(\left\|h\left(x,t\right)\right\|^2+\left\|K\left[u_n\right]\right\|^2\right)\right). \quad (39)$$

Так как u_n – решение задачи (12), (13), то

$$\left\|-\Delta u_n\right\| \le \left\|u_n'\right\|+\left\|K\left[u_n\right]\right\|+\left\|h\left(x,t\right)\right\|.$$

Отсюда и из неравенств (5), (35) следует

$$\left\|-\Delta u_n\right\| \le C+\left\|-\Delta u_n\right\|^{\alpha}\varphi\left(\left\|u_n\right\|\right).$$

Поэтому, применяя (15) и учитывая, что $0 \le \alpha < 1$, приходим к оценке

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|-\Delta u_n\right\| \le C. \quad (40)$$

Из (39) и (40) получаем (36). Теорема доказана.

Замечание. Результаты данной работы можно распространить на случай параболического уравнения высшего порядка.

Библиографические ссылки

1. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1964.

2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.

3. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., 1972.

4. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., 1959.

5. *Зарубин А. Г.* О скорости сходимости метода Фаэдо-Галеркина для квазилинейных нестационарных операторных уравнений // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. №12.

6. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975.

7. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., 1970.

8. Приближенное решение операторных уравнений. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* М., 1969.