ВЕСТНИК ТОГУ. 2012. № 3(26)

УДК 519.248: 62-192

РЕКУРРЕНТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНО-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Цициащцили Г. Ш. – д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. лабораторией вероятностных методов и системного анализа, тел. (423) 231-23-75, e-mail: guram@iam.dvo.ru (ИПМ ДВО РАН); *Осипова М. А.* – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и анализа, тел. (423) 226-04-92, e-mail: mao1975@list.ru (ДВФУ); *Маркова Н. В.* – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, тел. 22-44-23, e-mail: nata_mark@mail.ru (ТОГУ)

В работе рассматривается последовательность параллельно-последовательных соединений, в которой каждое последующее соединение получается подключением нового ребра к уже построенному либо последовательно, либо параллельно. Исследуется распределение числа компонент связности в этих соединениях. Для него доказывается центральная предельная теорема и вычисляются параметры предельного распределения.

In this paper a sequence of parallel-serial connections is considered. In this sequence next connection is obtained by parallel or serial linking of new arc to obtained connection. Distributions of random numbers of connectivity components are analyzed. Central limit theorem is proved for these distributions and parameters (mean and variance) of normal limit distribution are calculated.

Ключевые слова: параллельно-последовательное соединение, распределение числа компонент связности, центральная предельная теорема, вероятностные характеристики.

Введение

В теории надежности важную роль играют параллельно-последовательные соединения [1-6] и др. Эти соединения широко используются в электротехнике, им уделяется серьезное внимание при исследовании надежности компьютерных сетей. Особенностью параллельно-последовательных соединений является возможность вычисления их надежности с линейным временем работы.

Еще одним возможным приложением параллельно-последовательных соединений являются сети интернетовского типа. В последние годы большой интерес вызывает характеристика разреженности сетей, когда степень вершины (число ребер, соединенных с вершиной) ограничена некоторым положительным числом [7]. Вероятностное моделирование и статистическая обработка наблюдений за сетями интернетовского типа свидетельствует о том, что степени вершин в этих сетях имеют распределение Парето с очень тяжелыми хвостами [8]. Последнее обстоятельство делает особо актуальным рассмотрение параллельно-последовательных сетей, которые свободны от подобного недостатка.

В настоящей работе рассматривается последовательность параллельно-последовательных соединений, в которой каждое последующее соединение получается подключением нового ребра к уже построенному либо последовательно, либо параллельно. Исследуется распределение числа компонент связности в этих соединениях. Данное распределение интенсивно исследуется в самое последнее время [9, 10]. Для него доказывается центральная предельная теорема и вычисляются параметры предельного распределения.

Задача вычисления параметров предельного нормального распределения, основанная на центральной предельной теореме для дискретных цепей Маркова [11], оказалась технически весьма сложной. В настоящей работе для преодоления этой сложности сконструирован специальный алгоритм.

Описание модели

Рассмотрим последовательность $\mathcal{A}_n,\ n \ge 1,$ двухполюсников, определенных рекуррентно с помощью параллельного или последовательного соединения нового ребра b_n к двухполюснику $\mathcal{A}_n$. Обозначим способ присоединения || или $\rightarrow$, соответственно. Пусть случайная величина ω_n характеризует способ присоединения к двухполюснику $\mathcal{A}_n$ нового ребра b_n и

$$\pi_{\rightarrow} = P(\omega_n = \rightarrow), \qquad \pi_{||} = P(\omega_n = ||) = 1 - \pi_{\rightarrow}, \qquad 0 < \pi_{\rightarrow} < 1,$$

а случайная величина β_n характеризует работоспособность ребра b_n и

$$P(\beta_n = 1) = P(b_n \text{ работоспособно}) = p, \ \ P(\beta_n = 0) = 1 - p = q, \ \ 0 < p < 1.$$

Последовательности $\{\omega_n,\ n \ge 1\}$, $\{\beta_n,\ n \ge 1\}$ независимы и каждая из них состоит из независимых и одинаково распределенных случайных величин.

Двухполюсник со случайными ребрами $\mathcal{A}_n$ характеризуется случайным вектором (α_n, η_n), где α_n является индикатором связности концов параллельно-последовательного соединения $\mathcal{A}_n$, а η_n – числом компонент связности в $\mathcal{A}_n$. Введем вспомогательные случайные величины

$$\vec{\alpha}_{n+1} = \alpha_n \wedge \beta_n, \ \ \vec{\eta}_{n+1} = \eta_n + 1 - \beta_n, \tag{1}$$

$$\bar{\bar{\alpha}}_{n+1} = \alpha_n \vee \beta_n, \ \bar{\bar{\eta}}_{n+1} = \eta_n - \beta_n + \alpha_n\beta_n, \tag{2}$$

тогда

$$(\alpha_{n+1}, \eta_{n+1}) = I(\omega_n = \rightarrow)(\bar{\alpha}_{n+1}, \bar{\eta}_{n+1}) + I(\omega_n = ||)(\bar{\bar{\alpha}}_{n+1}, \bar{\bar{\eta}}_{n+1}), \tag{3}$$

где $I(C)$ – индикатор события C.

Предельная теорема для цепи Маркова, характеризующей связность соединений

Обозначим $\Delta_{n+1} = \eta_{n+1} - \eta_n$, тогда последовательность $X_k = (\alpha_k, \Delta_k)$, $k \geq 1$, образует марковскую цепочку с множеством состояний $\mathcal{X} = \{(i,j),$ $i = 0,1,\ j = -1,0,1\}$ (содержащем шесть состояний) вида

$$(\alpha_{n+1}, \Delta_{n+1}) = I(\omega_n = \rightarrow)(\alpha_n\beta_n, 1 - \beta_n) + I(\omega_n = ||)(\alpha_n \vee \beta_n, -\beta_n + \alpha_n\beta_n).$$

Из равенств (1) - (3) и условий $0 < p < 1,\ 0 < \pi_{\rightarrow} < 1,$ следует, что состояния марковской цепочки $X_k,\ k \geq 1,$ сообщающиеся и поэтому данная цепочка является эргодической [12, глава XV] с предельным распределением $A(x),\ x \in \mathcal{X}$.

Введем вспомогательные величины $a(x),\ x = (i,j) \in \mathcal{X},$ с помощью равенств: $a(i,0) = 0,\ a(i,1) = 1,\ a(i,-1) = -1,\ i = 0,1.$

Теорема 1. *Существуют числовые пределы*

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{M\eta_n}{n},\ B = \lim_{n\to\infty} \frac{D\eta_n}{n},\ A = \sum_{x\in\mathcal{X}} a(x)A(x), \tag{4}$$

причем для любого вещественного t

$$P\left(\frac{\eta_n - nA}{\sqrt{n}} < t\right) \rightarrow P(N(0,B) < t),\ n \rightarrow \infty, \tag{5}$$

где $N(0,B)$ нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и дисперсией B.

Доказательство. В силу центральной предельной теоремы для дискретных марковских цепей с конечным числом состояний [12, главы IV, V] существует нормально распределенный случайный вектор размерности шесть $N(0,\mathcal{B})$ с нулевым средним и ковариационной матрицей $\mathcal{B}$ такой, что для любых вещественных $t(x),\ x \in \mathcal{X},$ при $n \rightarrow \infty$

$$P\left(\left(\frac{N_n(x) - nA(x)}{\sqrt{n}},\ x \in \mathcal{X}\right) < (t(x),\ x \in \mathcal{X})\right) \rightarrow P(N(0,\mathcal{B}) < (t(x),\ x \in \mathcal{X})). \tag{6}$$

Здесь величина $N_n(x) = \sum_{k=1}^{n} I(X_k = x)$ обозначает число попаданий отрезка цепи $X_k,\ k = 1,\dots,n,$ в состояние x, а неравенства между векторами определяется покомпонентно.

Из формулы (6) несложно получить, что существует нормально распределенная случайная величина $N(0,B)$ с нулевым средним и дисперсией B такая, что для любого вещественного t

$$P\left(\frac{\sum_{x\in X}\alpha(x)(N_n(x)-nA(x))}{\sqrt{n}}<t\right)\to P(N(0,B)<t),\ n\to\infty. \qquad (7)$$

Пользуясь очевидным равенством

$$\sum_{x\in X}\alpha(x)N_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\Delta_k=\eta_n,\qquad n\ge 1,$$

перепишем соотношение (7) в виде (5), в котором коэффициенты A, B удовлетворяют соотношениям (4).

Замечание 1. *Нахождение среднего* A *и дисперсии* B *в формуле (5) является достаточно громоздкой вычислительной процедурой [12, главы V, VI]. Поэтому воспользуемся предельными соотношениями* (4)*, выбирая специальным образом начальное распределение* X_1.

Определение параметров предельного нормального распределения

Выберем случайный вектор $X_1=(\alpha_1,\Delta_1)=(\alpha_1,\eta_1)$ независящим от последовательностей $\{\omega_n,\ n\ge 1\}$, $\{\beta_n,\ n\ge 1\}$ и удовлетворяющим равенствам

$$P((\alpha_1,\eta_1)=(1,1))=P=\frac{\pi_{||}p}{\pi_{||}p+\pi_{\to}q},\ P((\alpha_1,\eta_1)=(0,2))=Q=1-P, \qquad (4)$$

причем $P(\alpha_n=1)\equiv P$, $P(\alpha_n=0)\equiv Q$. Случайная последовательность α_n, $n\ge 1$, является стационарной марковской цепочкой.

Теорема 2. *Справедливы следующие равенства*

$$A=Q\pi_{\to}q, \qquad (9)$$

$$B=\pi_{\to}qQ(1-\pi_{\to}qQ+2PQ)>0. \qquad (10)$$

Доказательство. Для определения констант A, B из (4) построим рекуррентный алгоритм. Обозначим

$$M_n=M\eta_n,\ A_n=M(\eta_n|\alpha_n=1),\ B_n=M(\eta_n|\alpha_n=0),\ M_n=A_nP+B_nQ, \qquad (11)$$

$$M'_n=M\eta_n^2,\ A'_n=M(\eta_n^2|\alpha_n=1),\ B'_n=M(\eta_n^2|\alpha_n=0),\ M'_n=A'_nP+B'_nQ, \qquad (12)$$

где $A_1=1$, $B_1=2$, $A'_1=1$, $B'_1=4$. Используя формулы (1)-(3), (11) и формулу полной вероятности, находим при $n\ge 1$

$$A_{n+1}=\frac{A_nP\pi_{\to}p+A_nP\pi_{||}p+(B_n-1)Q\pi_{||}p+A_nP\pi_{||}q}{P},$$

ВЕСТНИК ТОГУ. 2012. № 3(26)

$$B_{n+1} = \frac{B_n Q\pi_{\to} p + (A_n + 1)P\pi_{\to} q + (B_n + 1)Q\pi_{\to} q + B_n Q\pi_{||} q}{Q},$$

$$M_{n+1} = A_n P + B_n Q - Q\pi_{||} p + P\pi_{\to} q + Q\pi_{\to} q = M_n + Q\pi_{\to} q,$$

следовательно,

$$M_{n+1} = M_1 + nQ\pi_{\to} q = 1 + Q + nQ\pi_{\to} q, \; n \geq 1, \; M_1 = 1 + Q.$$

Тогда в силу (4) справедливо соотношение (9).

В свою очередь,

$$A_{n+1} - B_{n+1} = (A_n - B_n)\lambda - (2\pi_{\to} q + \pi_{||} p), \qquad n \geq 1, \qquad A_1 - B_1 = -1,$$

$$\lambda = \pi_{||} q + \pi_{\to} p < 1. \tag{13}$$

Таким образом,

$$A_{n+1} - B_{n+1} = -\left[\lambda^n + (2\pi_{\to} q + \pi_{||} p)\frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}\right] = \lambda^n Q - 1 - Q,$$

$$A_{n+1} P + B_{n+1} Q = M_{n+1},$$

следовательно,

$$A_{n+1} = M_{n+1} + Q[\lambda^n Q - 1 - Q], \; B_{n+1} = M_{n+1} - P[\lambda^n Q - 1 - Q], \; n \geq 1. \tag{14}$$

Перейдем теперь к вычислению M^r_{n+1}. Используем формулы (1)-(3), (12) и формулу полной вероятности, находим при $n \geq 1$

$$A^r_{n+1} = \frac{A^r_n P\pi_{\to} p + A^r_n P\pi_{||} p + (B^r_n - 2B_n + 1)Q\pi_{||} p + A^r_n P\pi_{||} q}{P},$$

$$B^r_{n+1} = \frac{B^r_n Q\pi_{\to} p + (A^r_n + 2A_n + 1)P\pi_{\to} q + (B^r_n + 2B_n + 1)Q\pi_{\to} q + B^r_n Q\pi_{||} q}{Q},$$

$$M^r_{n+1} = M^r_n + 2A_n Q\pi_{||} p + 2B_n Q(\pi_{\to} q - \pi_{||} p) + \pi_{\to} q(1 + P).$$

Поэтому в силу (14) получим

$$M^r_{n+1} = M^r_1 + 2Q\pi_{||} p\sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1} + 2Q(\pi_{\to} q - \pi_{||} p)\sum_{k=0}^{n-1} B_{k+1} + n\pi_{\to} q(1 + P) =$$

$$= M^r_1 + 2Q\pi_{\to} q\sum_{k=0}^{n-1} M_{k+1} - 2nQP(1 + Q)\pi_{||} p +$$

$$+ n\pi_{\to} q(1 + P) + 2\pi_{\to} q P^2 Q\frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} =$$

$$= M_1' + 2Q\pi_{\rightarrow}q\left(n(1+Q) + \pi_{\rightarrow}qQn(n-1)/2\right) - 2nQP(1+Q)\pi_{||}p +$$

$$+ n\pi_{\rightarrow}q(1+P) + 2P^2Q^2(1-\lambda^n), \qquad M_1' = 1 + 3Q.$$

Следовательно,

$$D\eta_{n+1} = M_{n+1}' - M_{n+1}^2 =$$

$$= n\pi_{\rightarrow}q[1 + P - Q^2\pi_{\rightarrow}q - 2P^2(1+Q)] + 2P^2Q^2(1-\lambda^n) + QP.$$

Тогда в силу (4), (13)

$$B = \pi_{\rightarrow}q\left(1 + P - Q^2\pi_{\rightarrow}q - 2P^2(1+Q)\right) = \pi_{\rightarrow}qQ(1 - \pi_{\rightarrow}qQ + 2PQ) > 0. \quad (15)$$

Замечание 2. *В силу замечания 1 можно вместо условия (8) сделать более естественное для задачи о последовательности параллельно-последовательных соединений предположение* $P((\alpha_1, \eta_1) = (1,1)) = p$, $P((\alpha_1, \eta_1) = (0,2)) = q$ *с сохранением соотношений (5), (9), (10).*

Библиографические ссылки

1. *Barlow R. E., Proschan F.* Mathematical Theory of Reliability. London and New York. Wiley. 1965.
2. *Ушаков И. А. и др.* Надежность технических систем: Справочник. – Москва: Радио и связь. 1985.
3. *Рябинин И. А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета. 2007.
4. *Соложенцев Е. Д.* Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и экономике. – СПб.: Изд. Дом «Бизнес-пресса» . 2006.
5. *Satyanarayana A., Wood R.K.* A linear time algorithm for computing k-terminal reliability in series-parallel networks// SIAM, J. Computing. 1985. Vol. 14. Pp. 818-832.
6. *Ball M. O., Colbourn C.J., Provan J.S.* Network Reliability. Network Models. Handbook of Operations Research and Management Science. Amsterdam: Elsevier, 1995. Vol. 7. Pp. 673-762.
7. *Райгородский А. М.* Модели случайных графов и их применение// Труды МФТИ. 2010. Т. 2. №4. С. 130-140.
8. *Kumar R., Raghavan P., Rajagopalan S., Sivakumar D., Tomkins A., Upfal E.* Stochastic model for the web graph// Proc. 41-st Symposium on Foundation of Computer Science. 2000.
9. *Сукач Е. И.* Подходы к снижению размерности многокомпонентных структурно-сложных систем со многими состояниями при оценке их надежности// Проблемы физики математики и техники. 2011. Вып. 3. С. 99-103.
10. *Тимашев А. Н.* Асимптотические разложения для распределения числа компонент в случайных отображениях и разбиениях// Дискретная математика. 2011. Вып. 2. С. 66-75.
11. *Романовский В. И.* Дискретные цепи Маркова. Москва-Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.
12. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х частях. Т. 1. М.:Мир, 1984.