



УДК 519.642

© А. А. Каширин, 2012

ОБ УСЛОВНО-КОРРЕКТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ И ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

Каширин А. А. – канд. физ.-мат. наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории «Вычислительных методов в механике», тел.: 75-72-31, e-mail: elomer@mail.ru (ВЦ ДВО РАН)

Рассматриваются особенности численного решения стационарных задач дифракции методом граничных интегральных уравнений на спектре интегральных операторов. В этом случае дифференциальная и интегральная постановки задач неэквивалентны. Предлагается такая модификация численного метода, которая обеспечивает нахождение решений задач дифракции в интегральных постановках. Приводятся результаты численных экспериментов, позволяющие составить представление о возможностях предлагаемого подхода.

We consider the features of the numerical solution the stationary diffraction problems with using the boundary integral equations method on the spectrum of integral operators. The differential and integral statements of the problems are not equivalent in this case. We propose a modification of the numerical method, which provides a solution of diffraction problems in integral statements. We give the results of the numerical experiments, which illustrate the possibilities of this approach.

Ключевые слова: задача дифракции, уравнение Гельмгольца, граница, интегральное уравнение, спектр, численное решение.

Исходная задача и интегральные уравнения.

Рассмотрим трёхмерное евклидово пространство R^3 с ортогональной системой координат $ox_1x_2x_3$, заполненное однородной изотропной средой с плотностью ρ_e , скоростью распространения акустических колебаний c_e и коэффициентом поглощения γ_e , в котором имеется ограниченное произвольной замкнутой липшицевой поверхностью Γ однородное изотропное включение с плотностью ρ_i , скоростью звука c_i и коэффициентом поглощения γ_i . Области R^3 , занятые включением и вмещающей средой, обозначим через Ω_i и Ω_e ($\Omega_e = R^3 \setminus \bar{\Omega}_i$).

Задача 1.1 (обобщённая постановка задачи дифракции). Найти функции $u_{i(e)} \in H^1(\Omega_{i(e)})$, удовлетворяющие интегральным тождествам

$$\int_{\Omega_{i(e)}} \nabla u_{i(e)} \nabla v_{i(e)}^* dx - k_{i(e)}^2 \int_{\Omega_{i(e)}} u_{i(e)} v_{i(e)}^* dx = 0 \quad \forall v_{i(e)} \in H_0^1(\Omega_{i(e)}), \quad (1.1)$$

условиям сопряжения на границе раздела сред из Ω_i и Ω_e

$$\langle u_i - u_e, \mu \rangle_\Gamma = \langle u_0, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (1.2)$$

$$\langle \eta, p_i Nu_i - p_e Nu_e \rangle_\Gamma = \langle \eta, p_e u_1 \rangle_\Gamma \quad \forall \eta \in H^{1/2}(\Gamma),$$

и условию излучения на бесконечности

$$\partial u_e / \partial |x| - ik_e u_e = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

если на границе включения Γ заданы функции $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $u_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Здесь v^* – функция, комплексно-сопряжённая к функции v , $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ – отношение двойственности на $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, обобщающее скалярное произведение в $H^0(\Gamma)$, $Nu \in H^{-1/2}(\Gamma)$ – нормальная производная u , понимаемая в смысле распределений [1], ω – круговая частота колебаний,

$$p_{i(e)} = \left[\rho_{i(e)} \omega (\omega + i\gamma_{i(e)}) \right]^{-1}, \quad k_{i(e)}^2 = \omega (\omega + i\gamma_{i(e)}) / c_{i(e)}^2, \quad \text{Im}(k_{i(e)}) \geq 0.$$

Замечание 1.1. Если $\text{Im}(k_e) = 0$, то $u_e \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_e)$.

Определения используемых здесь и далее функциональных пространств имеются в работе [1].

Теорема 1.1 [2]. Задача 1.1 имеет не более одного решения.

Введём следующие обозначения

$$\begin{aligned} (A_{i(e)} q)(x) &\equiv \langle G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\mathbb{R}}, & (B_{i(e)} q)(x) &\equiv \langle N_x G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_\Gamma, \\ (B'_{i(e)} q)(x) &\equiv \langle N_{(\cdot)} G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_\Gamma, & G_{i(e)}(x, y) &= \exp(ik_{i(e)}|x-y|) / (4\pi|x-y|). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Решение задачи 1.1 будем искать в виде потенциалов

$$u_e(x) = (A_e q)(x), \quad x \in \Omega_e, \quad (1.5)$$

$$u_i(x) = p_{ei} \left(A_i (Nu_e + u_1)^+ \right)(x) - \left(B'_i (u_e + u_0)^+ \right)(x), \quad x \in \Omega_i,$$

где $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ – неизвестная плотность, $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $u_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $p_{ei} = p_e / p_i$, а знаком "+" отмечаются предельные значения соответствующих выражений на Γ , когда точка приближается к поверхности из области Ω_e .

Ядрами интегральных операторов здесь являются фундаментальные решения уравнений Гельмгольца и их нормальные производные, поэтому $u_{i(e)}$ удовлетворяют тождествам (1.1) и условию излучения (1.3) для u_e . Кроме того, выполнение для них первого из условий сопряжения (1.2) автоматически влечёт за собой выполнение второго условия сопряжения. Подставляя потенциалы (1.5) в условия сопряжения (1.2), получаем слабо сингулярное интегральное уравнение Фредгольма первого рода для определения неизвестной плотности q :

$$\langle (Cq), \mu \rangle_\Gamma = \langle v_0, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (1.6)$$



$$(Cq)(x) \equiv \left((0.5(A_e + p_{ei}A_i) + (B'_iA_e - p_{ei}A_iB_e))q \right)(x),$$

$$v_0(x) = -0.5u_0(x) + p_{ei}(A_iu_1)(x) - (B'_iu_0)(x). \quad (1.7)$$

Теорема 1.2 [2]. Пусть $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $u_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\gamma_e > 0$ или ω не является собственной частотой задачи

$$\Delta u + k_e^2 u = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad u = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (1.8)$$

Тогда уравнение (1.6) корректно разрешимо в классе плотностей $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и формулы (1.5) дают решение задачи 1.1.

Потенциалы (1.5) предпочтительней использовать, когда необходимо рассчитать отражённое волновое поле в области Ω_e , поскольку в этом случае расчёты проводятся по достаточно простой формуле. Если же необходимо вычислить проходящее волновое поле в области Ω_i , предпочтительнее использовать потенциалы следующего вида:

$$u_i(x) = (A_i q)(x), \quad x \in \Omega_i, \quad (1.9)$$

$$u_e(x) = \left(A_e(u_1 - p_{ie}Nu_i)^- \right)(x) - \left(B'_e(u_0 - u_i)^- \right)(x), \quad x \in \Omega_e,$$

где $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ – неизвестная плотность, $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $u_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $p_{ie} = p_i/p_e$, а знаком "-" отмечаются предельные значения соответствующих выражений на Γ , когда точка приближается к поверхности из области Ω_i .

И в этом случае задача 1.1 сводится к слабо сингулярному интегральному уравнению Фредгольма первого рода:

$$\langle (Dq), \mu \rangle_\Gamma = \langle u_0, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (1.10)$$

$$(Dq)(x) \equiv \left((0.5(A_i + p_{ie}A_e) + (p_{ie}A_eB_i - B'_eA_i))q \right)(x).$$

Теорема 1.3 [2]. Пусть $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $u_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\gamma_e > 0$ или ω не является собственной частотой задачи (1.8). Тогда уравнение (1.10) корректно разрешимо в классе плотностей $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и формулы (1.9) дают решение задачи 1.1.

Целью данной работы является рассмотрение наиболее трудных с вычислительной точки зрения случаев, когда решение задачи дифракции ищется на собственных частотах задачи (1.8).

Численный метод

Применяемый метод численного решения представляет собой развитие методики, предложенной и впервые апробированной в работе [3]. Кратко опишем схему его реализации.

Построим покрытие поверхности Γ системой $\{\Gamma_m\}_{m=1}^M$ окрестностей узловых точек $x'_m \in \Gamma$, лежащих внутри сфер радиусов h_m с центрами в x'_m , и обозначим через $\{\varphi_m\}$ подчинённое ему разбиение единицы. Тогда

$$\sum_{m=1}^M \varphi_m(x) = 1 \quad \forall x \in \Gamma, \quad 0 \leq \varphi_m \leq 1, \quad \text{supp } \varphi_m \subset \Gamma_m.$$

В качестве φ_m будем использовать функции



$$\varphi_m(x) = \varphi'_m(x) \left(\sum_{n=1}^M \varphi'_n(x) \right)^{-1}, \quad \varphi'_n(x) = \varphi'(r_n/h_n), \quad \varphi'(t) = \begin{cases} (1-t^2)^3, & t < 1, \\ 0, & t \geq 1, \end{cases}$$

где $r_n = |x - x'_n|$.

Приближённые решения интегральных уравнений будем искать на сетке $\{x_m\}$,

$$x_m = (\bar{\varphi}_m)^{-1} \int_{\Gamma} x \varphi_m d\Gamma, \quad \bar{\varphi}_m = \int_{\Gamma} \varphi_m d\Gamma,$$

узлами которой являются центры тяжести функций φ_m . В дальнейшем будем предполагать, что для всех $m, n=1, 2, \dots, M$ выполняются неравенства

$$0 < h' \leq r_{mn}, \quad m \neq n, \quad h' \leq h_n \leq h, \quad h/h' \leq q_0 < \infty.$$

Здесь $r_{mn} = |x_m - x_n|$, h', h – положительные числа, зависящие от M, q_0 не зависит от M .

Вместо заданной на Γ неизвестной функции q будем рассматривать обобщённую функцию $q\delta_{\Gamma}$, действующую по правилу

$$(q\delta_{\Gamma}, \psi)_{R^3} = \langle q, \psi \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \psi \in H^1(R^3).$$

Эту функцию будем приближать выражением

$$q(x)\delta_{\Gamma}(x) \approx \sum_{n=1}^M q_n \bar{\varphi}_n \psi_n(x), \quad \psi_n(x) = (\pi\sigma_n^2)^{-3/2} \exp(-r_n^2/\sigma_n^2), \quad x \in R^3,$$

где q_n – неизвестные коэффициенты, $\sigma_n^2 = 0.5\bar{\varphi}_n$.

Интегральный оператор Фредгольма первого рода из (1.4) аппроксимируем по формулам [4]:

$$\int_{\Gamma} (A_{i(e)}q)\varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m \sum_{n=1}^M A_{i(e)}^{mn} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2.1)$$

$$A_{i(e)}^{mn} \equiv A_{mn}(k_{i(e)}), \quad A_{mn} = 0.5\beta_{mn} \exp(-\gamma_{mn}^2) (w(z_{mn}^+) - w(z_{mn}^-)) / r_{mn}, \quad n \neq m,$$

$$A_{mm} = \beta_{mm} \left(2(\pi\sigma_{mm}^2)^{-1/2} + ikw(\mu_{mm}) + 2\pi^{1/2} (1 - \mu_{mm}^2/3) \sigma_{mm} / \bar{\varphi}_m \right),$$

$$\beta_{mn} = \bar{\varphi}_n \left(4\pi(1 - \mu_{mn}^2 + 0.5\mu_{mn}^4) \right)^{-1}, \quad \sigma_{mn}^2 = \sigma_m^2 + \sigma_n^2, \quad \mu_{mn} = 0.5k\sigma_{mn},$$

$$z_{mn}^{\pm} = \pm\gamma_{mn} + i\mu_{mn}, \quad \gamma_{mn} = r_{mn}/\sigma_{mn}, \quad i^2 = -1,$$

$$w(z) = \exp(z^2)(1 + \operatorname{erf}(z)), \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt.$$

Интегральный оператор Фредгольма второго рода из (1.4) аппроксимируем по формулам [4]:

$$\int_{\Gamma} (aq + B_{i(e)}q)\varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m \sum_{n=1}^M B_{i(e)}^{mn} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2.2)$$



$$B_{i(e)}^{mn} = (4\pi r_{mn}^3)^{-1} n_{mn}^* \exp(ik_{i(e)} r_{mn}) (ik_{i(e)} r_{mn} - 1) \bar{\varphi}_n, \quad n_{mn}^* = \sum_{l=1}^3 n_{lm} (x_{lm} - x_m),$$

$$B_{i(e)}^{mn} = -Gs(x_m) \text{ при } a = 0.5, \quad B_{i(e)}^{mn} = -1 - Gs(x_m) \text{ при } a = -0.5,$$

$$Gs(x_m) = \sum_{n \neq m} \frac{n_{mn}^* \bar{\varphi}_n}{4\pi r_{mn}^3} \approx \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} N_y \frac{1}{|x_m - y|} d\Gamma_y = -\frac{1}{2}.$$

Интегральные операторы в левых частях уравнений (1.6) и (1.10) являются композицией интегральных операторов (2.1) и (2.2), поэтому аппроксимируем их по формулам [4]:

$$\int_{\Gamma} (Cq) \varphi_m d\Gamma \approx \sum_{n=1}^M (A_e^{mn} B_i^{mn} - p_{ei} A_i^{mn} B_e^{mn}) q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2.3)$$

$$\int_{\Gamma} (Dq) \varphi_m d\Gamma \approx \sum_{n=1}^M (p_{ie} A_e^{mn} B_i^{mn} - A_i^{mn} B_e^{mn}) q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2.4)$$

а правые части уравнений (1.6) и (1.10) – по формулам

$$\int_{\Gamma} v_0 \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m \left(Gs(x_m) u_0(x_m) + \sum_{n=1}^M \bar{\varphi}_n \left[p_{ei} A_i^{mn} u_1(x_n) - u_0(x_n) B_i^{nm} \right] \right),$$

$$\int_{\Gamma} u_0 \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m u_0(x_m), \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Модификация метода численного решения

Данная модификация впервые была предложена в работе [5] для численного решения задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом граничных интегральных уравнений на спектре интегральных операторов. Основная её идея заключается в том, что приближённые решения интегральных уравнений находятся в виде линейной комбинации решений вспомогательных корректно разрешимых уравнений с «близкими» волновыми числами.

Обозначим через $k_e > 0$ некоторое собственное волновое число задачи (1.8), а через $q(k_e)$ – зависящее от него частное решение неоднородного уравнения (1.6) или (1.10). Выберем некоторое значение $\delta > 0$. Тогда для искомого частного решения имеет место равенство

$$q(k_e) = 4q(k_e + i\delta) - q(k_e - \delta + i\delta) - q(k_e + \delta + i\delta) - q(k_e + 2i\delta) + O(\delta^4), \quad (3.1)$$

все плотности в правой части которого являются решениями корректно разрешимых интегральных уравнений. Назовём такую модификацию методом интерполяции решения.

Результаты численных экспериментов

Пример 4.1. Рассматривается задача 1.1, Γ – единичная сфера с центром в начале координат. Граничное условие: $u_0(x) = \exp(ik_e x_3)$, $u_1(x) = ik_e \exp(ik_e x_3) n_3$. Параметры сред: $k_i = 12.5$, $\rho_i = 4$,



$k_e=7.725251836937$, $\rho_e=3$ (I); $k_i=7$, $\rho_i=2$, $k_e=16.9236212852138$, $\rho_e=5$ (II); $k_i=21$, $\rho_i=7$, $k_e=13.6980231532492$, $\rho_e=4.5$ (III).

В качестве k_e во всех случаях выбирались собственные волновые числа задачи (1.8). Точные решения задач из примера 4.1 имеются в работе [6].

Исследование интегральных уравнений (1.6) и (1.10) из примера 4.1 показало, что эти уравнения обладают разными свойствами. Для уравнения (1.6) не существует решения, которое при подстановке в формулы (1.5), даёт решение задачи дифракции. Поэтому формула (3.1) в данном случае не даст результата. Напротив, для уравнения (1.10) существует бесчисленное множество решений, которые, в силу теории Фредгольма, являются суммой частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения (1.10). Частное решение уравнения (1.10), подставленное в формулы (1.9), даёт решение задачи дифракции. Оно может быть приближённо найдено при помощи формулы (3.1).

Основной целью численных экспериментов являлась демонстрация возможностей метода интерполяции решения. В связи с этим, задачи из примера 4.1 решались дважды: без интерполяции решения и с интерполяцией решения (формулы (3.1)). В последнем случае $\delta=0.01$. Результаты расчётов представлены в виде графиков зависимости переменных $\lg \varepsilon$ от $\lg M$, где ε – относительная погрешность вычисления. При точном степенном законе убывания погрешности эти графики будут асимптотически переходить в прямые линии с наклоном $\operatorname{tg} \alpha = -p/2$, где p – порядок аппроксимации относительно «шага» $h \sim M^{-1/2}$ заданной на граничной поверхности сетки.

Графики погрешностей для первого набора параметров помечены квадратами, для второго – треугольниками, для третьего – кругами, погрешности решений во внутренней области изображены сплошной линией, во внешней области – пунктиром.

Численные эксперименты проводились на кластере ВЦ ДВО РАН. Количество точек дискретизации M варьировалось от 500 до 128000, решения СЛАУ находились численно при помощи GMRES [7] с точностью до 10^{-9} .

На рис. 4.1 и 4.2 приведены погрешности решений задач дифракции, полученных в результате подстановки решений уравнений (1.6) и (1.10) в формулы (1.5) и (1.9) соответственно. Погрешности вычислены в норме пространств сеточных функций $H_h^0(\Omega_{i(e)})$. Видно, что уравнение (1.6) не может быть использовано для нахождения приближённых решений задач дифракции, т.к. погрешность, начиная с некоторого момента, не уменьшается. Интерполяция решения не даёт в данном случае результата, в силу изложенных выше свойств уравнения (1.6).

Для решений задач дифракции, полученных по формулам (1.9) с интерполяцией решения, при достаточно больших M погрешность решений имеет порядок не хуже $h^2 \sim M^{-1}$. Расчёты без интерполяции в этом случае дают неудовлетворительные результаты. Сравнение погрешностей, представленных на рис. 4.2 а) и б), показывает эффективность метода интерполяции решения.

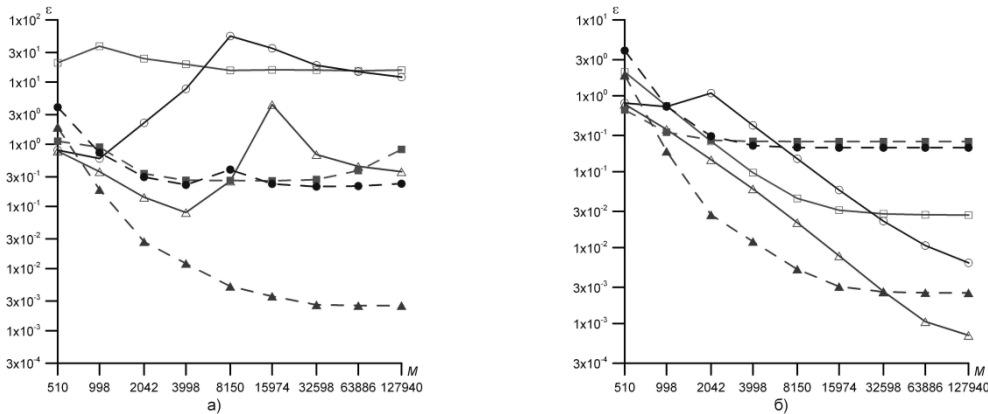


Рис. 4.1. Погрешности вычисления решений задач дифракции из примера 4.1, найденных по формулам (1.5), а) без интерполяции; б) с интерполяцией (сплошная линия – во внутренней области, пунктир – во внешней области)

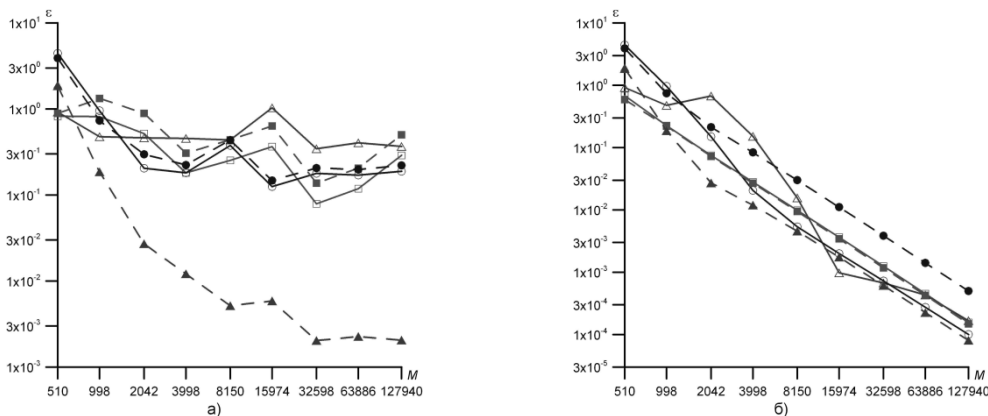


Рис. 4.2. Погрешности вычисления решений задач дифракции из примера 4.1, найденных по формулам (1.9), а) без интерполяции; б) с интерполяцией (сплошная линия – во внутренней области, пунктир – во внешней области)

Пример 4.2. Поиск частных решений уравнений (1.10) из примера 4.1.

На рис. 4.3 а) изображены погрешности частных решений интегральных уравнений (1.10) из примера 4.2, найденные без интерполяции (пунктир) и с интерполяцией решения (сплошная линия). Погрешность вычислена в норме пространств сеточных функций $H_h^{-1/2}(\Gamma)$ [4].

Пример 4.3. Поиск нетривиальных решений однородных уравнений (1.10) из примера 4.1.

Нетривиальные решения однородных уравнений (1.10) найдём приближённо, как разность между двумя плотностями – вычисленными без интерполяции решения и с интерполяцией решения. Нормируем полученные решения и подставим их в потенциал простого слоя (1.5) при $x \in \Gamma$. На рис. 4.3 б) приведены графики норм невязки искомых решений в пространстве $H_h^{-1/2}(\Gamma)$.

Видно, что метод интерполяции решения позволяет вычислять нетривиальные решения однородных уравнений (1.10).

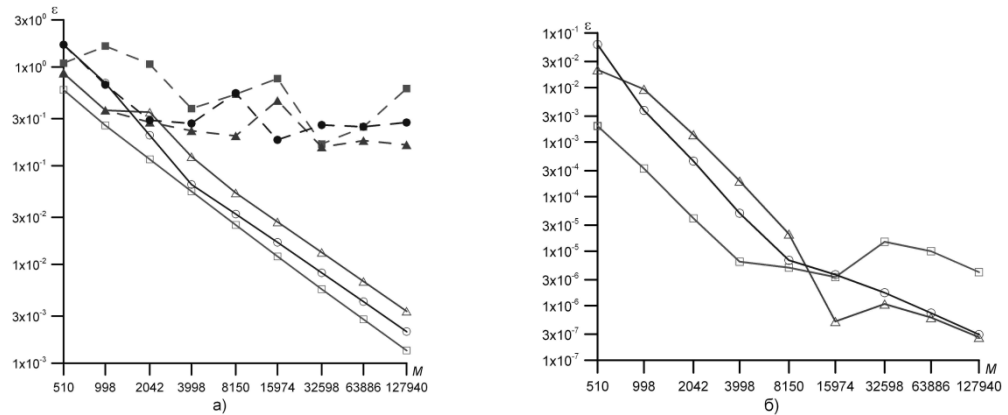


Рис. 4.3. а) Погрешности вычисления частных решений уравнения (1.10) (с интерполяцией – сплошная линия, без интерполяции – пунктир); б) нормы невязки для нетривиальных решений однородных уравнений (1.10)

Эксперименты показали, что метод интерполяции решения эффективен для приближённого решения задач дифракции в интегральных постановках на спектре интегральных операторов, если решения этих задач отыскиваются в виде потенциалов (1.9). Расчёты без интерполяции и в этом случае, и при поиске решений исходных задач в виде потенциалов (1.5) дают неудовлетворительные результаты. Предлагаемый метод прост, не требует знания спектра, не привязан к конкретной реализации приближённого решения вспомогательных задач и потому может быть легко использован для тех же целей в связке с другими схемами численного решения интегральных уравнений.

Библиографические ссылки

1. McLean W. Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 372 p.
2. Каширин А. А., Смагин С.И. Обобщённые решения интегральных уравнений скалярной задачи дифракции // Диф. уравнения, 2006. Т. 42. № 1. С. 79-90.
3. Смагин С. И. Численное решение интегрального уравнения I рода со слабой особенностью для плотности потенциала простого слоя // ЖВМ и МФ. 1988. Т. 28, № 11. С. 1663-1673.
4. Каширин А. А. Исследование и численное решение интегральных уравнений трёхмерных стационарных задач дифракции акустических волн: Диссертация ... канд. физ.-мат. наук. Хабаровск, 2006. 118 с.
5. Каширин А. А. О численном решении задач Дирихле потенциалами простого слоя. Препринт 2010/157. Хабаровск: ВЦ ДВО РАН, 2010, 16 с.
6. Тихонов А. Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Издательство Московского университета, 1999. 799 с.
7. Saad Y., Schultz M. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Statist. Comput., 7 (1986). P. 856–869.