ВЕСТНИК ТОГУ. 2008. № 4 (11)

УДК 517.946

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ ПО ВНУТРЕННЕМУ ПОТЕНЦИАЛУ

Суляндзига П. Б. – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., тел. (4212) 64-73-79, e-mail: peterb@as.khb.ru (ВЦ ДВО РАН)

Рассматривается задача определения области по ее внутреннему комплексному магнитному потенциалу. Доказана разрешимость задачи для области, близкой к заданной. Разрешимость «в малом» доказана по сопряженной задаче. Обратные задачи теории потенциала рассматривались в работах [1–5].

The problem of definition of an area in its interior complex magnetic potential is considered. Resolvability of a problem for the area close to the set is proved. Resolvability « in small » is proved on the interfaced problem.

Ключевые слова: потенциал, обратная задача, индекс задачи

Постановка задачи и ее редукция к краевой задаче

Пусть $U^-(z)$, $U^+(z,\bar{z}) \equiv U^+(z,\bar{z},D^+,\nu,\mu)$ есть внешний и внутренний комплексные магнитные потенциалы области D^+ с границей $S \in C^{1,\alpha}$ действительнозначных плотностей $\nu(z,\bar{z})$ на S и $\mu(z,\bar{z})$ в D^+. Известно, что $U^-(z)$ аналитична в D^-, а $U^{\pm}_{\bar{z}}(z,\bar{z}) = \mu$ в D^+. Отсюда имеем

$$U^+(z,\bar{z}) = \mathrm{M}(z,\bar{z}) + g(z),\, z \in D^+, \tag{1}$$

где функция $\mathrm{M}(z,\bar{z})$ для данной области D^+ можно считать зафиксированной, а $g(z) \equiv g(z,D^+)$ аналитическая функция.

Пусть зафиксирована односвязная область T^+ и определена плотность $\mu \in C^{0,\alpha}(T^+)$, то можно всегда считать определенной функцию $\mathrm{M}(z,\bar{z})$, $\mathrm{M}_{\bar{z}}(z,\bar{z}) = \mu$ в T^+.

Задача. По действительным функциям $\nu, \mu \in C^{0,\alpha}(T^+)$ и функции $h(z)$ – аналитическая в T^+ требуется отыскать такую область D^+ с гладкой границей

S в T^+, что

$$U^+\left(z,\bar{z},D^+,\nu,\mu\right)=\mathrm{M}\left(z,\bar{z}\right)+h(z),\ z\in D^+.$$

Пусть задача имеет решение, т. е. найдется такая область D^+, что $g(z)=h(z)$, $z\in D^+$. Тогда в силу свойств потенциала масс и простого слоя, имеем:

$$U^-(z)-U^+\left(z,\bar{z}\right)=2\nu\cdot\left(Cos\,\hat{nx}-iSin\,\hat{nx}\right),z\in S \tag{2}$$

где $\hat{nx}$ – угол между внешней нормалью и положительным направлением оси Ox, а единичный вектор касательной $\vec{s}$ направлен так, что поворот от $\vec{n}$ к $\vec{s}$ совершается против часовой стрелки. Далее введем функцию, $z=z(t)$, отображающую конформно внешность единичного круга $|t|>1$ на D^- с нормировкой

$$z(\infty)=\infty,\ z'(\infty)>0, \tag{3}$$

причем в окрестности $t=\infty$ имеет разложение:

$$z(t)=at+\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^{-k}. \tag{4}$$

Тогда равенство (2), учитывая (1), примет вид

$$\varphi_0^-(t)=\mathrm{M}\left(z(t),\overline{z(t)}\right)+2\nu\left(z(t),\overline{z(t)}\right)\cdot\frac{\overline{tz'(t)}}{|z'(t)|}+g(z(t)),\ |t|=1,\ \varphi_0^-(\infty)=0, \tag{5}$$

где $\varphi_0^-(t)=U^-(z(t))\in A(|t|>1)\cap C(|t|\geq 1)$.

О разрешимости задачи «в малом»

Пусть зафиксированы односвязные области D^+, T^+, $D^+\subset T^+$, а границей D^+ является $S\in C^{2,\alpha}$ и определены действительнозначные функции $\nu,\mu\in C^{2,\alpha}\left(T^+\right)$, тогда $U^-(z)$, $U^+\left(z,\bar{z}\right)\in C^{2,\alpha}(S)$. Причем плотности ν, μ и граница S таковы, что выполняется следующее требование:

$$a=\mu+\nu k+\frac{\partial\nu}{\partial n}\not\equiv 0,\ a\cdot\nu\geq 0,\ |a+\nu|>0,\ |t|=1, \tag{6}$$

где $k=\dfrac{\mathrm{Re}\left(\overline{z'}(tz')'\right)}{|z'|^3}$ есть кривизна кривой S, $z=z(t)$ – функция, отображающая конформно внешность единичного круга $|t|>1$ на D^- с нормировкой (3).

Введем два класса областей:

$$D_w^- = \{z : z = z(t) + w(t), |t| > 1, w(\infty) = \infty, \operatorname{Im} w'(\infty) = 0\},$$

$$\widetilde{D}_w^- = \{z : z = z(t) + w(t), |t| > 1, w(\infty) = Const\}$$

причем функции $w(t)$ выбираются настолько малыми в норме пространства $C^{1,\alpha}(|t| = 1)$, $\|w\|^{1,\alpha} < \delta_1$, чтобы функции $z = z(t) + w(t)$ были однолистными и области D_w^+, $\widetilde{D}_w^+$, лежали в T^+ и содержали бы точку $z = 0$. Далее, введем класс функций:

$$\gamma(K) = \left\{h(z) : h \in A\left(T^+\right), |h(z)| \le K, z \in \overline{T^+}\right\}.$$

Теорема. Найдутся положительные числа ε, δ_* такие, что если $h(z) \in \gamma(K)$, $\left\|h - g\left(z, D^+, \nu, \mu\right)\right\|^{2,\alpha} \le \varepsilon$ на S и выполнено условие (6), то при $\|w\|^{1,\alpha} \le \delta_* < \delta_1$ существуют: а) однопараметрическое семейство решений задачи из D_w^-, б) единственное решение из $\widetilde{D}_w^-$ такие, что

$$U^+\left(z, \bar{z}, D_{w_*}^+, \nu, \mu\right) = \mathrm{M}(z, \bar{z}) + h(z), \ z \in D_{w_*}^+ .$$

Доказательство. Задача редуцирована и области из класса D_w^-, $\widetilde{D}_w^-$, то приходим к нахождению пары аналитических функций $\left(\varphi_1^-, w\right)$ вне единичного круга $|t| > 1$ по следующему краевому условию:

$$\begin{aligned}\varphi_1^-(t) &= h\big(z(t) + w(t)\big) + \mathrm{M}\Big(z(t) + w(t), \overline{z(t) + w(t)}\Big) + \\ &+ 2\nu\Big(z(t) + w(t), \overline{z(t) + w(t)}\Big) \cdot \frac{\overline{t(z' + w')}}{|z' + w'|}, \qquad |t| = 1, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\varphi_1^-(\infty) = 0, \ w(\infty) = Const \text{ ; или } w(\infty) = \infty, \ \operatorname{Im} w'(\infty) = 0 .$$

Линеаризация краевого условия. Из (7) вычтем равенство

$$\varphi_0^-(t) = g\big(z(t)\big) + \mathrm{M}\Big(z(t), \overline{z(t)}\Big) + 2\nu\Big(z(t), \overline{z(t)}\Big) \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}, \ |t| = 1. \tag{8}$$

При малых w в норме $C^{1,\alpha}$ функции $h\big(z(t) + w(t)\big)$, $\dfrac{\sqrt{\overline{z'} + \overline{w'}}}{\sqrt{z' + w'}}$ разложим в ряд Тейлора, а $\mathrm{M}\Big(z(t) + w(t), \overline{z(t) + w(t)}\Big)$, $\nu\Big(z(t) + w(t), \overline{z(t) + w(t)}\Big)$ представимы формулой Тейлора, так как $\nu, \mathrm{M} \in C^{2,\alpha}\left(T^+\right)$. Теперь, выделяя линейную часть, будем иметь

$$\varphi_2^- - \frac{\nu \overline{tz'}}{|z'|}\left(\frac{\overline{w'}}{\overline{z'}} - \frac{w'}{z'}\right) - \left(\mu + 2\nu_{\bar{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right)\overline{w} - \left(\mathrm{M}'_z + g'_z \cdot w + 2\nu_{\bar{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right) w = R(w,h),$$

где $R(w,h) = (h-g) + (h-g)'_z \cdot w + B(w,h)$, $\varphi_2^- = \varphi_1^- - \varphi_0^-$, $\varphi_2^-(\infty) = 0$, $B(w,h)$ – нелинейная часть оператора R. Используя равенство (8), вычислим $g'_z\big|_{z=z(t)}$ и, подставив в предыдущее условие, получим

$$\varphi_3^- - \frac{\nu \overline{tz'}}{|z'|}\left(\frac{\overline{w'}}{\overline{z'}} - \frac{w'}{z'}\right) - \left(\mu + 2\nu_{\bar{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right) w - \frac{1}{t^2} \cdot \frac{\overline{z'}}{z'}\left(\mu + 2\nu k + 2\nu_{\bar{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right)\overline{w} = \overline{R(w,h)}, \ \varphi^+(0) = 0. \quad (9)$$

Изучение линейной задачи

Приступим к рассмотрению линейной однородной задачи (9):

$$L(\varphi^+, w) \equiv \varphi^+ + \frac{\nu \overline{tz'}}{|z'|}\left(\frac{\overline{w'}}{\overline{z'}} - \frac{w'}{z'}\right) - \left(\mu + 2\nu_{\bar{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right) w - \\ - \frac{t^2 z'}{\overline{z'}}\left(\mu + 2\nu k + 2\nu_{\bar{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right)\overline{w} = 0. \quad (10)$$

Решение задачи (10) рассмотрим в двух случаях:

а) Отыскание области из $D_\text{и}$. Отыскивается пара аналитических функций $\varphi^+ \in A(|t|<1)$ и $w \in A(|t|>1)$ по краевому условию (10), причем

$$w(\infty) = \infty, \quad (11)$$

$$\operatorname{Im} w'(\infty) = 0. \quad (12)$$

Сначала рассмотрим задачу (12) и условие (13).

Произведя замену $w/t^2 = \varphi^-$, $\varphi^-(\infty) = 0$, краевое условие (10) примет

$$\tilde{\varphi}^+ + A_{30}\varphi^- + \overline{A}_{40}\overline{\varphi^-} + A_{31}\frac{d\varphi^-}{dt} + \overline{A}_{41}\overline{\frac{d\varphi^-}{dt}} = 0, \ \varphi^-(\infty) = 0, \quad (13)$$

где

$$A_{30} = -t\left(\mu + \frac{2\nu}{|z'|} + 2\nu_{\bar{z}} \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right), \ \overline{A}_{40} = -\frac{z'}{t\overline{z'}}\left(\mu + 2\nu k - \frac{2\nu}{|z'|} + 2\nu_{\bar{z}} \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right),$$

$$A_{31} = -\frac{\nu t^2}{|z'|}, \ \overline{A}_{41} = -\frac{\nu z'}{t^2 \cdot \overline{z'}|z'|}, \ \tilde{\varphi}^+ = \frac{\varphi^+}{t}, \text{ так как } \varphi^+(0) = 0.$$

Эта задача называется обобщенной задачей Гильберта или общей задачей линейного сопряжения, содержащей производную [5, 6]. Известно, что задача (13) является нётеровой, так как $A_{31} \neq 0$ при $|t| = 1$. Воспользовавшись результатами исследования Н. П. Векуа [1, с. 349], можно подсчитать индекс нашей задачи: $l-l'=2$, где l, l' – соответственно число линейных независимых решений, исчезающих на бесконечности задаче (13) и ей союзной.

Покажем, что $l'=0$, т. е. союзная к (13) имеет только тривиальное решение. С этой целью выпишем союзную задачу:

$$\Omega^- = -t\left(\mu+\frac{2\nu}{|z'|}+2\nu_z\cdot\frac{tz'}{|z'|}\right)\Omega^+ + \frac{\overline{tz'}}{z'}\left(\mu+2\nu k-\frac{2\nu}{|z'|}+2\nu_{\bar z}\cdot\frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right)\Omega^+ +,$$

$$+\frac{d}{dt}\left\{\frac{\nu t^2}{|z'|}\Omega^+ + \frac{\nu\overline{z'}}{z'|z'|}\overline{\Omega}^+\right\}$$

$$\Omega^-(\infty)=0. \tag{14}$$

Обозначая $\dfrac{\Omega^+}{\overline{z'}}=\Phi$, приходим к следующему условию:

$$\Omega^- = -t\overline{z'}\left(\mu+\frac{2\nu}{|z'|}+2\nu_z\cdot\frac{tz'}{|z'|}\right)\Phi + \overline{tz'}\left(\mu+2\nu k-\frac{2\nu}{|z'|}+2\nu_{\bar z}\cdot\frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right)\overline{\Phi}+$$

$$+\frac{d}{dt}\left\{\nu\cdot\frac{\overline{tz'}}{|z'|}\left(t^3\Phi+t\overline{\Phi}\right)\right\}$$

$$\Omega^-(\infty)=0.$$

Вычислим

$$\frac{d}{dt}\left\{\nu\cdot\frac{\overline{tz'}}{|z'|}\left(t^3\Phi+t\overline{\Phi}\right)\right\} = t\overline{z'}\left(\nu_z\cdot\frac{tz'}{|z'|}-\nu_{\bar z}\cdot\frac{\overline{tz'}}{|z'|}-\nu k+\frac{3\nu}{|z'|}\right)\Phi+$$

$$+\overline{tz'}\left(\nu_z\cdot\frac{tz'}{|z'|}-\nu_{\bar z}\cdot\frac{\overline{tz'}}{|z'|}-\nu k+\frac{\nu}{|z'|}\right)\overline{\Phi}+\frac{\nu\overline{z'}}{|z'|}\left(t^2\Phi'_t-\overline{t^2\Phi'_t}\right).$$

Подставляя вычисленное в вышенаписанное краевое условие, получим

$$\Omega^- = -t\overline{z'}\left(\mu+\nu k+\frac{\partial\nu}{\partial n}-\frac{\nu}{|z'|}\right)\Phi + \overline{tz'}\left(\mu+\nu k+\frac{\partial\nu}{\partial n}-\frac{\nu}{|z'|}\right)\overline{\Phi}+\frac{\nu\overline{z'}}{|z'|}\left(t^2\Phi'_t-\overline{t^2\Phi'_t}\right)$$

,

$$\Omega^-(\infty)=0 \text{, где } \frac{\partial\nu}{\partial n}=\nu_z\cdot\frac{tz'}{|z'|}+\nu_{\bar z}\cdot\frac{\overline{tz'}}{|z'|}.$$

Умножая предыдущее краевое условие на $\dfrac{z'}{|z'|}$, получим

$$\frac{z'}{|z'|}\Omega^- = \nu\left(t^2\Phi'_t-\overline{t^2\Phi'_t}\right)-\tilde a|z'|\left(t\Phi-\overline{t\Phi}\right), \Omega^-(\infty)=0,\ \tilde a=\mu+\nu k-\frac{\nu}{|z'|}+\frac{\partial\nu}{\partial n}. \tag{15}$$

Далее, если заменить $t\Phi=\psi$, $\psi(0)=0$, то (15) примет вид

$$\frac{z'}{|z'|}\Omega^{-}=\nu\left(t\psi_t'-\overline{t\psi_t'}\right)-a|z'|\left(\psi-\overline{\psi}\right), \qquad (16)$$

где $\Omega^{-}(\infty)=0$, $\psi(0)=0$, $\quad a=\mu+\nu k+\dfrac{\partial\nu}{\partial n}$.

Из (16) видно, что $\operatorname{Re}\dfrac{z'}{|z'|}\Omega^{-}=0$. Отсюда следует, что $\Omega^{-}\equiv 0$, так как $\Omega^{-}(\infty)=0$, а $z'(\infty)>0$.

Теперь остается исследовать задачу

$$\nu\left(t\psi_t'-\overline{t\psi_t'}\right)-a|z'|\left(\psi-\overline{\psi}\right)=0,\ \psi(0)=0. \qquad (17)$$

Произведя замену $\psi=u(\theta)+i\upsilon(\theta)$, $|t|=1$, $t=e^{i\theta}$ и вычисляя $t\psi_t'=\upsilon_\theta'-iu_\theta'$, краевое условие (17) примет вид

$\nu\cdot u_s+a|z'|\upsilon=0$, $|t|=1$.

Так как единичный вектор касательной $\vec{s}$ и $\vec{n}$ расположены как оси OX и OY, то условия Коши-Римана выглядят следующим образом:

$$u_s'=\upsilon_n',\ u_n'=-\upsilon_s'.$$

Итак, приходим к нахождению гармонической функции υ в единичном круге по краевому условию:

$$\nu\upsilon_n'+a|z'|\upsilon=0,\ |t|=1.$$

В силу условия (6) заключаем, что $\upsilon=0$. Отсюда следует, что $u=0$ в силу условия $\psi(0)=0$.

Нами доказано, что союзная задача (14) имеет только тривиальное решение, а отсюда сразу вытекает, что $l=2$, т. е. два линейно независимые решения однородной задачи (10) с условием (11).

Нетрудно проверить, что одним из решений (10) является

$$\varphi_1^{+}=0,\ w_1=c_1itz', \qquad (18)$$

где c_1 – произвольная действительная константа.

Далее, заметим, что второе решение $w(t)$ линейной задачи (10) с условием (11) должно иметь разложение в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$w_2(t)=bt+\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^{-k},\ \operatorname{Im}b=0. \qquad (19)$$

Этого можно добиться за счет подбора c_1 из (18) и исходя из записи общего решения однородной задачи. Коэффициент b в (19) чисто мнимым быть не может, так как решение $w_2(t)$ оказалось бы линейно зависимым с $w_1(t)$.

Итак, второе решение (10), (11) имеет вид (19).

Исследование нелинейной задачи. Запишем нелинейное краевое условие (10) в операторном виде:

$$L(\varphi^+, w) = \overline{R(w,h)},\ |t| = 1. \tag{20}$$

Теперь рассмотрим задачу (20) с условием (11), (12). Приходим к следующему уравнению:

$$w(t) = A\overline{R(w,h)} + \lambda w_2(t),\ \operatorname{Im}\lambda = 0, \tag{21}$$

где $A\overline{R(w,h)}$ есть частное решение задачи (20), (11), (12). Далее, согласно исследованиям по теории нелинейных уравнений и согласно условиям теоремы, найдутся положительные числа ε, δ_* и λ_* такие, что правая часть (21) будет сжимающим и переводит шар $\|w\|^{1,\alpha} \le \delta_*$ в себя. На основании теоремы Банаха существует решение уравнения (21) $w(t) = w_\lambda(t)$ при $|\lambda| < \lambda_*$.

Таким образом, мы отыскали однопараметрическое семейство областей $D^-_{w_\lambda} = \{z : z = z(t) + w(t), |t| > 1\} \in D^-_w$ такие, что

$$U^+\left(z, \bar{z}, D^+_{w_\lambda}, \nu, \mu\right) = \mathrm{M}(z, \bar{z}) + h(z),\ z \in D^+_{w_\lambda}.$$

На этом доказательство пункта а) теоремы закончено. Теперь более кратко разберем пункт б) Отыскание области из $\widetilde{D}_w$. Отыскивается пара аналитических функций $\varphi^+ \in A(|t| < 1)$ и $w(t) \in A(|t| > 1) \cap C^1(|t| \ge 1)$ по краевому условию (10), причем

$$w(\infty) = Const. \tag{22}$$

Сначала изучим линейную однородную задачу (10) с условием (22). Произведя замену $\frac{w}{t} = \varphi^-$, $\frac{\varphi^+}{t} = \widetilde{\varphi}^+$, краевое условие (10) примет вид:

$$\widetilde{\varphi}^+ - \left(\mu + \frac{\nu}{|z'|} + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right)\varphi^- - \frac{z'}{\overline{z'}}\left(\mu + 2\nu k - \frac{\nu}{|z'|} + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right)\overline{\varphi^-} -$$

$$-\frac{\nu t}{|z'|} \cdot \frac{d\varphi^-}{dt} + \frac{\nu z'}{t\overline{z'}|z'|}\overline{\frac{d\varphi^-}{dt}} = 0, \quad \varphi^-(\infty) = 0.$$

Далее заметим, что задача оказалась фредгольмовой.

$$\Omega^- = -\left(\mu + \frac{\nu}{|z'|} + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right)\Omega^+ - \frac{\overline{z'}}{t^2\overline{z'}}\left(\mu + 2\nu k - \frac{\nu}{|z'|} + 2\nu_{\bar{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right)\overline{\Omega}^+ +$$

$$+\frac{d}{dt}\left\{\frac{\nu t}{|z'|}\Omega^+ + \frac{\nu\overline{z'}}{tz'|z'|}\overline{\Omega}^+\right\}, \quad \Omega^-(\infty) = 0.$$

Введя обозначения $\frac{t\Omega^+}{\overline{z'}} = \psi$, $\psi(0) = 0$, приходим к следующей задаче:

$$\frac{tz'\Omega^-}{|z'|} = \nu\left(t\psi_t' - \overline{t\psi_t'}\right) - a|z'|\left(\psi - \overline{\psi}\right),\ \Omega^-(\infty) = 0,\ \psi(0) = 0.$$

Используя условие (6), имеем, что $\Omega^- = 0$, $\psi = 0$.

Значит, союзная задача имеет только тривиальное решение. В силу теоремы и так как область ищется в классе близких областей, к уравнению применим принцип сжатых отображений. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. *Новиков П. С.* О единственности обратной задачи теории потенциала // ДАН СССР. 1938. № 3.
2. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
3. *Прилепко А. И.* Внутренняя обратная задача метагармонического потенциала для тела, близкого к данному // Дифференц. уравнения. 1972. № 1.
4. *Павлов Г. А.* К обратной задаче потенциала простого слоя // Дифференц. уравнения. 1976. № 1.
5. *Суляндзига П. Б.* О разрешимости двумерной обратной задачи магнитного потенциала // Сообщения АН Гр. ССР. 1977. № 3.
6. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М., 1970.