ВЕСТНИК ТОГУ. 2008. № 4 (11)

УДК 517.51

О НЕРАВЕНСТВЕ ИЕНСЕНА В ПРОИЗВОЛЬНОМ ИДЕАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Прудников В. Я. – канд. физ. - мат. наук, доц. кафедры «Высшая математика», тел. (4212) 74-26-98, e-mail: prudnikov55@mail.ru (ТОГУ)

В работе установлено, что если ядро интегрального оператора удовлетворяет условно Гельдера, то неравенство Иенсена справедливо в любом соответствующем идеальном пространстве. Получено обобщение данного результата.

The paper establishes that if the kernel of the integral operator satisfies the Holder condition the Jensen inequality holds in any pertinent ideal space. The generalization of this result has been found as well.

Ключевые слова: неравенство Иенсена, идеальное пространство.

В статье [1] доказано функциональное неравенство Иенсена

$$\mathrm{P}\,(\int\limits_E g(x,\cdot\,)d\,\mu_x) \le \int\limits_E \mathrm{P}(g(x,\cdot))d\,\mu_x,$$

где $\mathrm{P}: Y \to (-\infty,+\infty]$ – полунепрерывный снизу выпуклый функционал на банаховом идеальном пространстве Y с порядково непрерывной нормой. Это означает, что данное неравенство справедливо не в любых идеальных пространствах, что порождает актуальность распространения неравенства Иенсена на такие пространства. Более того, установление этого неравенства в пространствах без порядковой непрерывности нормы имеет прикладной смысл, т.к. такие пространства активно используются в анализе и его приложениях. Это, например, пространства Орлича, играющие важную роль в теории нелинейных интегральных уравнений [2, 3], пространства Марцинкевича, использующиеся в теории интерполяции линейных операторов [4]. Заметим, что в этих пространствах линейные непрерывные функционалы, вообще говоря, не допускают интегральное представление [5].

Пусть *D* – некоторое множество пространства R^d, Σ – непустая совокупность подмножеств *D*, образующих σ-алгебру, υ – положительная σ –

конечная мера на Σ. Обозначим через $S(D, \Sigma, \upsilon)$ пространство всех вещественных υ-измеримых почти всюду конечных функций с обычным отождествлеем эквивалентных функций.

Идеальным пространством $Y \subset S(D, \Sigma, \upsilon)$ называется линейное многообразие Y такое, что из $u \in Y, v \in S, |v| \le |u|$ следует $v \in Y$ [5, 6].

Норма $\|\cdot\|$ на идеальном пространстве Y называется монотонной, если из $u, v \in Y$, $|u| \le |v|$ следует $\|u\| \le \|v\|$.

Банаховым идеальным пространством называется идеальное пространство, полное по монотонной норме.

Введем обозначение полуоткрытого кубического интервала

$$Q(x, \varepsilon) := \left\{ z \in R^d : x_k - \varepsilon \le z_k < x_k + \varepsilon; k = 1, \ldots, d \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $Y \subset S(D, \Sigma, \upsilon)$ *– банахово идеальное пространство* E *– открытое множество пространства* R^d, $\mu(E) = 1$.

Если функция $g(x, y), (x, y) \in E \times D$ *такова, что элемент* $y \to g(x, y)$ *для каждого* $x \in E$ *принадлежит пространству Y, функции* $x \to g(x, y), x \to \|g(x, \cdot)\|$ μ*-интегрируемы на E для* $\upsilon -$ *п.в.* $y \in D$ *и для* $\upsilon -$ *п.в.* $y \in D$ *выполнено неравенство*

$$|g(x, y) - g(z, y)| \le \varphi(y) |x - z|^{\alpha},$$

$0 < \alpha \le 1$ *с некоторой функцией* $\varphi \in Y$, *то*

1) функция $x \to \|g(x, \cdot)\|$ *непрерывна по Гельдеру на множестве E с показателем* $0 < \alpha \le 1$;

2) элемент $y \to \int_E g(x, y) d\mu_x$ *принадлежит пространству* Y;

3) для полунепрерывного снизу выпуклого функционала $\mathrm{P} : Y \to (-\infty, +\infty]$ *выполнено неравенство*

$$\mathrm{P}\left(\int_E g(x, \cdot) d\mu_x\right) \le \int_E \mathrm{P}(g(x, \cdot)) d\mu_x.$$

Доказательство. Открытое множество E представим в виде объединения не более чем счетного числа дизъюнктных полуоткрытых кубических интервалов Q_i [7, 8], которые разобьем на конечное число m_i таких же интервалов

Q_{ij} так, чтобы их диаметр не превосходил числа $\frac{1}{m}$. Тогда для всех точек $x, z \in Q_{ij}$ имеем неравенство

$$|g(x,y) - g(z,y)| \le \frac{\varphi(y)}{m^\alpha},$$

$y \in D, m \in N$. Поэтому для любых точек $x^{ij} \in Q_{ij}$ имеем неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \int_{Q_i} g(x,y) d\mu x - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} g(x^{ij}, y) \mu(Q_{ij}) \right| \le \frac{\varphi(y)}{m^\alpha} . \qquad (1)$$

Тогда для $u_m(y) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} g(x^{ij}, y) \mu(Q_{ij})$ независимо от выбора точек $x^{ij} \in Q_{ij}$ существует предел

$$\lim_{m \to \infty} u_m(y) = \int_E g(x,y) d\mu_x , \qquad (2)$$

а потому функция $y \to \int_E g(x,y) d\mu_x$ υ–измерима.

Из условия

$$|g(x,y) - g(z,y)| \le \varphi(y) |x - z|^\alpha , 0 < \alpha \le 1 \qquad (3)$$

следует неравенство

$$\|g(x,\cdot) - g(z,\cdot)\| \le \|\varphi\| |x - z|^\alpha ,$$

т. е. функция $x \to \|g(x,\cdot)\|$ принадлежит пространству Гельдера на множестве E с показателем $0 < \alpha \le 1$.

Рассмотрим функцию

$$y \to \int_{Q_i} g(x,y) d\mu_x .$$

Разделим Q_i на n_i дизъюнктных полуоткрытых кубических интервалов Q_{ij}, диаметр которых не превосходит числа $\frac{1}{n}$, $n \in N$. Тогда для любых точек $z^{ij} \in Q_{ij}$, пользуясь оценкой (3), получим неравенство

$$\left| \int_{Q_i} g(x,y)d\mu_x - \sum_{j=1}^{n_i} g(z^{ij},y)\mu(Q_{ij}) \right| \le \frac{\varphi(y)}{n^\alpha},$$

откуда следует υ-измеримость функции $y \to \int_{Q_i} g(x,y)d\mu_x$, ее принадлежность к пространству Y и выполнимость неравенства

$$\left\| \int_{Q_i} g(x,\cdot)d\mu_x \right\| \le \left\| \sum_{j=1}^{n_i} g(z^{ij},\cdot)\mu(Q_{ij}) + \frac{\varphi(\cdot)}{n^\alpha} \right\| \le \sum_{j=1}^{n_i} \left\| g(z^{ij},\cdot) \right\| \mu(Q_{ij}) + \frac{\|\varphi\|}{n^\alpha}.$$

Отсюда, ввиду произвольности выбора точек $z^{ij} \in Q_{ij}$, получим неравенство

$$\left\| \int_{Q_i} g(x,\cdot)d\mu_x \right\| \le \int_{Q_i} \left\| g(x,\cdot) \right\| d\mu_x \ . \qquad (4)$$

Далее, используя (1), придем к неравенству

$$\left| u_{m+p}(y) - u_m(y) \right| =$$

$$= \left| u_{m+p}(y) - \sum_{i=1}^{m+p} \int_{Q_i} g(x,y)d\mu_x + \sum_{i=1}^{m} \int_{Q_i} g(x,y)d\mu_x - u_m(y) + \sum_{i=m+1}^{m+p} \int_{Q_i} g(x,y)d\mu_x \right| \le$$

$$\le \left| u_{m+p}(y) - \sum_{i=1}^{m+p} \int_{Q_i} g(x,y)d\mu_x \right| + \left| u_m(y) - \sum_{i=1}^{m} \int_{Q_i} g(x,y)d\mu_x \right| + \left| \sum_{i=m+1}^{m+p} \int_{Q_i} g(x,y)d\mu_x \right| \le$$

$$\le \frac{\varphi(y)}{(m+p)^\alpha} + \frac{\varphi(y)}{m^\alpha} + \sum_{i=m+1}^{m+p} \left| \int_{Q_i} g(x,y)d\mu_x \right|.$$

Поэтому, т. к. пространство Y идеально и имеет место (4), то

$$\left\|u_{m+p}-u_m\right\| \le \frac{2\|\varphi\|}{m^{\alpha}}+\sum_{i=m+1}^{m+p}\int_{Q_i}\|g(x,y)\|d\mu_x ,$$

откуда следует фундаментальность последовательности $\{u_m\}$ в Y, а потому и сходимость к некоторому элементу $u_0 \in Y$. Но тогда $u_m \to u_0$ по мере υ и существует подпоследовательность $\left\{u_{m_k}\right\}$, сходящаяся υ - п.в. в D к u_0 [5]. Из (2) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_{m_k}(y)=\int\limits_E g(x,y)d\mu_x$, поэтому $u_0(y)=\int\limits_E g(x,y)d\mu_x$. Итак, элемент $y \to \int\limits_E g(x,y)d\mu_x$ принадлежит пространству Y и

$$\lim_{m\to\infty}\left\|u_m-\int_E g(x,\cdot)d\mu_x\right\|=0 \quad . \tag{5}$$

Фиксируем элемент $u^* \in Y^*$. Имеем

$$\left\langle u^*,u_m\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\left\langle u^*,g(x^{ij},\cdot)\right\rangle\mu(Q_{ij}) , \tag{6}$$

где x^{ij} – произвольная точка из Q_{ij}. Из справедливости (5) следует предельное равенство

$$\lim_{m\to\infty}\left\langle u^*,u_m\right\rangle=\left\langle u^*,\int_E g(x,\cdot)d\mu_x\right\rangle . \tag{7}$$

Из неравенства

$$\left|\left\langle u^*,g(x,\cdot)\right\rangle-\left\langle u^*,g(z,\cdot)\right\rangle\right| \le \left\|u^*\right\|\left\|g(x,\cdot)-g(z,\cdot)\right\| \le \left\|u^*\right\|\|\varphi\||x-z|$$

следует непрерывность функции $x \to \left\langle u^*,g(x,\cdot)\right\rangle$, а т. к.

$$\left|< \mathrm{u}^*,\mathrm{g}(\mathrm{x},\cdot)>\right| \le \left\|\mathrm{u}^*\right\|\left\|\mathrm{g}(\mathrm{x},\cdot)\right\|,$$

то функция $x \to \left\langle u^*,g(x,\cdot)\right\rangle$ μ -интегрируема.

Выберем теперь, учитывая первоначальную произвольность выбора точек $x^{ij} \in Q_{ij}$, эти точки так, чтобы для данного $\varepsilon > 0$

$$\left\langle u^*, g(x^{ij}, \cdot)\right\rangle < \inf_{x \in Q_{ij}} \left\langle u^*, g(x, \cdot)\right\rangle + \varepsilon .$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} \left\langle u^*, g(x^{ij}, \cdot)\right\rangle \mu(Q_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{m} \int_{Q_i} \left\langle u^*, g(x, \cdot)\right\rangle d\mu_x + \varepsilon .$$

Поэтому, учитывая это неравенство, (6), (7), а также произвольность выбора $\varepsilon > 0$, приходим к неравенству

$$\left\langle u^*, \int_E g(x, \cdot) d\mu_x \right\rangle \leq \sum_{i=1}^{m} \int_E \left\langle u^*, g(x, \cdot)\right\rangle d\mu_x .$$

Но u^* – любой функционал из Y^*, поэтому

$$\left\langle u^*, \int_E g(x, \cdot) d\mu_x \right\rangle = \int_E \left\langle u^*, g(x, \cdot)\right\rangle d\mu_x . \quad (8)$$

Пусть $\mathrm{P} : Y \to (-\infty, +\infty]$ – полунепрерывный снизу выпуклый функционал. Согласно теореме Фенхеля-Моро [9] $\mathrm{P}(u) = \sup\{l(u) : l \leq \mathrm{P}\}$, где $l(u) = \left\langle u^*, u\right\rangle + a$ – аффинная функция.

Если $\mathrm{P}(\int_E g(x, \cdot) d\mu_x) < +\infty$, то для данного $\varepsilon > 0$ существует l_ε такая, что $\mathrm{P}(\int_E g(x, \cdot) d\mu_x) \leq l_\varepsilon(\int_E g(x, \cdot) d\mu_x) + \varepsilon$, причем $l_\varepsilon \leq \mathrm{P}$ в *Y*. Поэтому, используя (8), получим неравенство

$$\mathrm{P}(\int_E g(x, \cdot) d\mu_x) \leq \int_E l_\varepsilon(g(x, \cdot)) d\mu_x + \varepsilon ,$$

а потому

$$\mathrm{P}(\int_E g(x, \cdot) d\mu_x) \leq \int_E \mathrm{P}(g(x, \cdot)) d\mu_x .$$

Если $\mathrm{P}(\int_E g(x, \cdot) d\mu_x) = +\infty$, то аналогичными рассуждениями показываем, что $\int_E \mathrm{P}(g(x,\cdot))d\mu_x = +\infty$.

Используя однородность равенства (8), получим обобщение данной теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $Y \subset S(D,\Sigma,\upsilon)$ *– банахово идеальное пространство, E – открытое множество пространства* R^d *,* $\mu(E)=1$.

Если функции $u(x), g(x,y), (x,y)\in E\times D$ *таковы, что*

1) элемент $y \to g(x,y)$ *принадлежит пространству Y для* μ - п.в., $x \in E$ *;*

2) функции $u(x), x \to g(x,y), \|g(x,\cdot)\| u(x)$ μ *-интегрируемы на E для* υ - п.в. $y \in D$*, причем функция* $x \to g(x,y)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\left|g(x,y) - g(z,y)\right| \le \varphi(y)\left|x - z\right|^{\alpha},$$

где $\varphi \in Y, \alpha \in (0,1]$*, то:*

3) функция $x \to \|g(x,\cdot)\|$ *непрерывна по Гельдеру на E с показателем* α *;*

4) элемент $y \to \int_E g(x,y)u(x)d\mu_x$ *принадлежит пространству Y;*

5) для полунепрерывного снизу выпуклого функционала $\mathrm{P}: Y \to (-\infty,+\infty]$ *выполнено неравенство*

$$\mathrm{P}\Big(\int_E (g(x,\cdot)u(x))d\mu_x\Big) \le \int_E \mathrm{P}(g(x,\cdot)u(x))d\mu_x . \tag{9}$$

Доказательство. Равенство (8) однородно относительно меры μ, поэтому здесь можно снять нормировку μ, считая $0 < \mu(E) < +\infty$.

Пространство *Y* линейно, поэтому элементы

$$y \to u^+(x)g(x,y), \quad y \to u^-(x)g(x,y), \quad y \to u(x)g(x,y),$$

где $u(x) = u^+(x) - u^-(x)$, $u^+(x) = \max(u,0)$, $u^-(x) = \max(-u,0)$ принадлежат *Y* для μ *- п.в.*, $x \in E$. Из условия 2) следует μ -интегрируемость функций $u^+(x)\|g(x,\cdot)\|$, $u^-(x)\|g(x,\cdot)\|$.

Рассмотрим меру

$$\beta(A) := \int_A u^+(x)d\mu_x ,$$

где μ – измеримые множества $A \subset E$. Тогда [10] функция $x \to g(x,y)$ интегрируема по этой мере и, т. к.

$$\int_E g(x,y)d\beta_x = \int_E g(x,y)u^+(x)d\mu_x,$$

то для любого функционала $u^* \in Y^*$, согласно вышеприведенному замечанию

$$\left\langle u^*, \int_E g(x,\cdot)u^+(x)d\mu_x \right\rangle = \int_E \left\langle u^*, g(x,\cdot)u^+(x)\right\rangle d\mu_x,$$

причем $x \to \|g(x,\cdot)\|$ непрерывна по Гельдеру на E с показателем α и элемент $y \to \int_E g(x,y)u^+(x)d\mu_x$ принадлежит пространству Y. Аналогичное рассуждение можно привести относительно функции $-u^-$, а т. к. Y–линейное пространство, то элемент $y \to \int_E g(x,y)u(x)d\mu_x$ принадлежит Y и

$$\left\langle u^*, \int_E g(x,\cdot)u(x)d\mu_x \right\rangle = \int_E \left\langle u^*, g(x,\cdot)u(x)\right\rangle d\mu_x.$$

Далее, рассуждая также как в конце доказательства теоремы 1, доказываем справедливость неравенства (9) для любого полунепрерывного снизу выпуклого функционала $\mathrm{P}: Y \to (-\infty, +\infty]$.

Библиографические ссылки

1. *Прудников В. Я.* Неравенство Иенсена в идеальном пространстве // Сибирский журнал индустриальной математики. 2007. № 2.
2. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.
3. *Zaanen A.C. Linear Analysis.* Amsterdam. 1960.
4. *Функциональный* анализ / М. Ш. Бирман и др. М., 1972.
5. *Кантарович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М., 1977.
6. *Функциональный* анализ / Под ред. С. Г. Крейна. М., 1972.
7. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1978.
8. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980.
9. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М., 1975.
10. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М., 1987.