ВЕСТНИК ТОГУ. 2008. № 4 (11)

УДК 532.545

УРАВНЕНИЕ РУСЛОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ НЕСВЯЗНОГО ДНА

Потапов И. И. – д - р физ. - мат. наук заведующий лабораторией ММММ, тел. (4212) 64 -70-29 (ВЦ ДВО РАН)

В работе рассмотрена проблема определения расхода наносов, транспортируемых потоком жидкости, движущимся над размываемым дном. Определены ограничения, накладываемые на реологическую модель движущейся водогрунтовой смеси, при которых из модели можно исключить феноменологический параметр – концентрацию частиц в активном слое смеси. В рамках предложенной реологической модели получено уравнение русловых деформаций для несвязного дна.

The current work deals with the flow rate for depositions brought in by a liquid stream over the bottom. The restrictions imposed on a rheological model of a flowing water and soil mixture are considered at which a phenomenological parameter, namely, the particle concentration in the mixture's active layer may be ignored. Within the model proposed the equation of the river-bed deformations for a sandy bottom is derived.

Ключевые слова: влекомые наносы, русловые процессы, русловые деформации.

Введение

Традиционно [1, 2] для получения уравнения русловых деформаций используют закон сохранения

$$\left(1-\varepsilon\right)\rho_s \frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial s}=Q\,, \qquad (1)$$

где q – удельный массовый расход твердых частиц на единичную ширину потока; ε – пористость донного материала; Q – источниковый (стоковый) член; s – криволинейная координата, привязанная к поверхности дна ζ; t – время; ρ_s – плотность донных частиц.

При замыкании уравнения (1) в большинстве современных работ [3–10] используют зависимость следующего вида:

$$q = q_0\left(\left|\tau\right| - \tau_c\right)^b \left[\frac{\tau}{\left|\tau\right|} - \Lambda\frac{\partial\zeta}{\partial s}\right], \qquad (2)$$

где τ – касательное напряжение у поверхности дна, τ_c – критические напряжения на дне потока, Λ – коэффициент донной подвижности, зависящий от физико-механических и гранулометрических свойств донного материала.

Основная сложность использования модели (2) заключается в выборе коэффициентов q_0, b, τ_c, Λ, зависящих от физико-механических и гранулометрических свойств донного материала.

Упрощенная модель (2) была впервые экспериментально исследована Питером-Мейером и Миллером в 1948 году [11]. На основе обширных лабораторных экспериментов для простых потоков они получили $q_0 \approx 8\sqrt{\frac{\left(g\left(\rho_s - \rho_w\right)\right)^{1-2b} d^{3-2b}}{\rho_w}}$, $b \approx 1{,}5$. Физическое обоснование этого результата для установившихся потоков было представлено Р. Бэгнольдом [3, 12]. Он предположил, что если касательные напряжения у дна превышают критические напряжения, то энергия речного потока становится достаточной для перемещения наносов. При этом если работа в единицу времени, выполняемая потоком на дне русла, определяется как $W = \left(\left|\tau\right| - \tau_c\right)\left|u\right|$, то, используя квадратичный закон связи между скоростями потока и касательными напряжениями $\left|u\right| \sim \sqrt{\left|\tau\right|}$, получим множитель со степенью $b = 1{,}5$, как это и было определено экспериментально Питером-Мейером и Миллером [11].

Другие исследования для влекомых наносов были выполнены Эйнштейном [13]. Используя вероятностный подход, он получил $b = 1 \sim 3$. В работах [14, 15] Ялин, используя метод, основанный на анализе размерностей, нашел, что $b = 1{,}5 \sim 2{,}5$.

Значительный вклад в методологию определения параметров q_0, b и Λ внесли П. Г. Петров и А. Г. Петров. Из проведенного ими анализа движения двухфазной смеси жидкости и твердых частиц для моделей Кулона-Ньютона [6] и Кулона-Прандтля [7, 8] были получены аналитические формулы для определения удельного массового расхода. Предложенные ими формулы для расчета q включали в себя единственный феноменологический параметр f (концентрацию частиц в придонном активном слое), который рассматривался как независимый параметр, определяемый экспериментальным путем. При этом указывалось на значительную трудность в проведении данных экспериментов. С другой стороны, множество эмпирических зависимостей, полученных различными авторами [1–4], не содержат в себе данного параметра. На основании этого было сделано предположение о том, что концентрация частиц в придонном слое является зависимым параметром гидродинамического потока.

В работе [16] автором было показано, что параметр концентрации частиц в придонном активном слое, используемый в работах [7–8], допускает свое исключение при выводе формул удельного массового расхода q.

В настоящей работе показано, что для комбинированной реологической модели (модели Кулона и модели степенной жидкости) концентрация частиц в придонном слое f при выполнении определенных условий является зависимым параметром, допускающим исключение. В рамках предложенной реологической модели получено уравнение донных деформаций для несвязного дна.

Постановка задачи

Для получения удельного массового расхода твердых частиц используем формулу [5]

$$q = \rho_s \int_o^h f\, u\, d\, m\,, \tag{3}$$

где f – концентрация частиц, u, h – скорость и толщина активного слоя смеси. Значение функций u, h и f определим из решения гидродинамических уравнений [7]

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial m} = 0\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial m} = \rho g \cos\gamma\,, \tag{5}$$

замыкаемых реологическим уравнением, обобщающим в себе реологию Кулона-Ньютона [6] и Кулона-Прандтля [7–8]

$$\tau = -\left(\tau_s + \tau_b\right) \frac{\partial u}{\partial m} \left|\frac{\partial u}{\partial m}\right|^{-1} . \tag{6}$$

где $\tau_b = \mu_* \left(h - m \right)^n \left| \dfrac{\partial u}{\partial m} \right|^k$, $\tau_s = p_s \, tg\varphi$ – абсолютные значения касательного напряжения жидкой и твердой несвязной фазы; τ – напряжения на площадках касательных к поверхности смеси; μ_*– приведенная вязкость; n, k– коэффициенты обобщенной степенной реологической модели; $\rho = f \rho_s + \left(1 - f\right) \rho_w$; ρ_w, ρ_s – плотности частиц и воды; p – давление в смеси; m – ось, направленная по нормали к поверхности смеси вниз ($m = 0$ на поверхности смеси $\zeta = \zeta(x, y)$); γ – острый угол между нормалью к поверхности смеси и вертикальной линией; $p_s = m f \left(\rho_s - \rho_w\right) g \cos\gamma$ – давление взвешенных в воде твердых частиц; s – ортогональные криволинейные координаты, привязанные к поверхности дна ζ; φ – угол внутреннего трения донных частиц.

В качестве критерия начала движения частиц на нижней границе активного слоя воспользуемся условием Бэгнольда [3–4, 12]

$$\left| \tau\left(h \right) \right| = \tau_s(h), \tag{7}$$

из которого в силу непрерывности скоростей u и напряжений $\left| \tau \right|$ на границе скольжения получаем граничные условия для задачи (4)–(6)

$$u\left(h \right) = 0, \tag{8}$$

Условия (8), (7) и условия для нормального и касательного напряжения, задаваемые на верхней границе придонного активного слоя $m = 0$

$$\tau\left(0 \right) = \tau^{\zeta}, \qquad 9)$$

$$p\left(0 \right) = p^{\zeta}, \tag{10}$$

позволяют замкнуть задачу (4)–(5) и получить в аналитическом виде выражение для удельного массового расхода.

Решение задачи

Из уравнения (5), (10) получим выражение давления p в активном слое

$$p = p^{\zeta} + m \rho g \cos \gamma, \tag{11}$$

где $p^{\zeta} = \rho_w g\left(H - \zeta\right)$. Полагая, что уклон свободной поверхности речного потока много меньше уклона дна $\frac{\partial H}{\partial s} << \frac{\partial \zeta}{\partial s}$, получим $\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho_w\, g \frac{\partial \zeta}{\partial s}$ и справедливы следующие определения

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \left(f\rho_s + (1-f)\rho_w\right)g\frac{\partial \zeta}{\partial s} = f\left(\rho_s - \rho_w\right)g\frac{\partial \zeta}{\partial s} = A\,\Gamma, \qquad (12)$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{\cos\gamma\; tg\varphi}\frac{\partial \zeta}{\partial s} = \frac{tg\,\gamma}{tg\varphi}, \quad A = F_a f, \quad F_a = \cos\gamma\; tg\varphi\;\left(\rho_s - \rho_w\right)g. \qquad (13)$$

Интегрируя уравнение (4) по m и учитывая граничные условия (9), получим выражение для распределения напряжения по глубине активного слоя

$$\tau = \tau^{\zeta} - m\;A\;\Gamma. \qquad (14)$$

Глубину активного слоя h определим из формул (6), (7) и (14)

$$h = \frac{\tau^{\zeta}}{A\left(1+\Gamma\right)}. \qquad (15)$$

Используя уравнения (6), (14), определим значение

$$\left|\frac{\partial u}{\partial m}\right| = \sqrt[k]{\frac{\tau - m\,A}{\mu_*\left(h-m\right)^n}}. \qquad (16)$$

Применяя формулы (14), (15), преобразуем (16) к виду

$$\left|\frac{\partial u}{\partial m}\right| = \sqrt[k]{\frac{\tau^{\zeta}}{h\,\mu_*\left(h-m\right)^{n-1}}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial m} = \frac{\tau}{|\tau|}\left|\frac{\partial u}{\partial m}\right|. \qquad (17)$$

Вычислим удельный массовый расход твердых частиц, интегрируя по частям уравнение (3) и используя граничное условие (8), получим

$$q = \rho_s f \int_o^h u\, d m = \rho_s u m \Big|_0^h - \rho_s f \int_o^h m \frac{d u}{d m} d m = -\rho_s f \int_o^h m \frac{d u}{d m} d m \,. \quad (18)$$

Поставим в (18) формулу (17) и проинтегрируем по глубине активного слоя, получив выражение для удельного массового расхода наносов

$$q = \rho_s f \left(\frac{\tau^\zeta}{\mu_*}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{k}} \int_o^h \frac{m}{\left(h-m\right)^{\frac{n-1}{k}}} d m = \left(\frac{\tau^\zeta}{\mu_*}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{\rho_s f\ k^2\ h^{\frac{1}{k}(k-n+1)}}{(k-n+1)(2k-n+1)} \,.$$

Из полученного выражения расхода q исключим глубину активного слоя h, используя формулу (15):

$$q = \rho_s f \frac{k^2}{\left(k-n+1\right)\left(2k-n+1\right)} \left(\frac{\tau_1^\zeta}{\mu_*}\right)^{\frac{1}{k}} h^{\frac{2k-n}{k}} \,. \quad (19)$$

Из уравнения (19) с учетом (17) получаем условие $\left(n \equiv k\right)$, при котором удельный массовый расход твердых частиц, определяемый по реологической модели (6), не зависит от концентрации донных частиц f в активном слое. Для случая $\left(n \equiv k\right)$ формулу (19) можно представить в виде

$$q = \frac{\rho_s \tau_1^\zeta}{F_a\left(1+\Gamma\right)} \frac{k^2}{\left(k+1\right)} \left(\frac{\tau_1^\zeta}{\mu_*}\right)^{\frac{1}{k}} . \quad (20)$$

Условие $n \equiv k$ отражает требования, накладываемые на выбор вида уравнения состояния, при формулировке задачи (4)–(10). Поскольку зависимость (14) (полученная при интегрировании уравнений равновесия) показывает, что касательное напряжение в активном слое убывает с увеличением его глубины, то используемое уравнение состояния (6), как минимум, должно иметь возможность воспроизводить данное поведение напряжений в активном слое, чего не происходит, например, в случае среды Кулона-Ньютона ($n=0,\ k=1$).

Учет относительной скорости частиц

Формула (3), использованная для определения удельного массового расхода твердых частиц, предполагает, что скорость расхода твердых частиц и жидкости одинаковы (односкоростная модель). Это не позволяет определить значения скорости начала движения частиц. Для использования более точной

– двухскоростной формулы определения удельного массового расхода твердых частиц – воспользуемся формулой [7]

$$q = \rho_s \int_o^h f\left(u - v\right) d\,m\,, \tag{21}$$

с критерием начала движения твердых частиц $v < \left| u \right|$.

Здесь v – скорость отставания частиц от гидродинамического потока, которую, следуя [7, 8], определим из анализа баланса сил, действующих на частицы, находящиеся в единице объема, по направлению s. При этом ускорением частиц в активном слое $0 \le m \le h$ будем пренебрегать

$$F^w + F^s + F^g = 0\,, \tag{22}$$

где F^w – сила сопротивления, действующая на частицы со стороны воды [7]

$$F^w = f\,\frac{c_x\,\rho_w\,v^2}{2\,d}\,, \tag{23}$$

где d – диаметр частиц, c_x – коэффициент лобового сопротивления частиц.

F^s – сила трения между частицами, определяемая из реологического соотношения (6) для напряжения твердой фазы τ_s

$$F^s = \frac{\partial\,\tau_s}{\partial\,m} = -\,f\,F_a\,. \tag{24}$$

F^g – сила тяжести в проекции на касательную к поверхности дна плоскость, определяемая как

$$F^g = -\,f\,F_a\,\Gamma\,. \tag{25}$$

Из (22)–(25) определим относительную скорость

$$v = \sqrt{\frac{2\,d\,F_a}{c_x\;\rho_w}}\,\sqrt{1+\Gamma}\,, \tag{26}$$

через которую найдем поправку расхода $\Delta\,q = \rho_s\,f\int_o^h v\,d\,m$

$$\Delta\,q = \rho_s\,f\int_o^h v\,d\,m = \rho_s\sqrt{\frac{2\,d}{c_x\,\rho_w\,F_a}}\,\frac{\tau^{\zeta}}{\sqrt{\left(1+\Gamma\right)}}\,. \tag{27}$$

Уравнения русловых деформаций

Используя (20) и (27), получим формулу для двухскоростной модели удельного массового расхода твердых частиц в активном слое

$$q = \frac{\rho_s \tau^\zeta}{F_a} \frac{1}{(1+\Gamma)} \frac{k^2}{k+1} \left(\frac{\tau^\zeta}{\mu_*}\right)^{\frac{1}{k}} \left(1 - \sqrt{\left(\frac{\mu_*}{\tau^\zeta}\right)^{\frac{2}{k}} \frac{(k+1)^2}{k^4} \frac{2\,d\,F_a}{c_x\,\rho_w} (1+\Gamma)}\right). \quad (28)$$

Из уравнения (28) и условия $q \ge 0$ при $\tau > 0$ можно получить критические напряжения τ_*, определяющие условие начало движения донных частиц

$$\tau_* = \mu_* \left(\frac{(k+1)^2}{k^4} \frac{2\,d\,F_a}{c_x\,\rho_w} (1+\Gamma)\right)^{\frac{k}{2}}. \quad (29)$$

Разложив (28) по малому параметру Γ, отбросив члены высокого порядка и подставив полученную аппроксимацию в уравнение (1), получим уравнение донных деформаций

$$(1-\varepsilon)\rho_s \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\Lambda \frac{\partial \zeta}{\partial s}\right) = Q, \quad (30)$$

где

$$\Lambda = \begin{cases} -\dfrac{k^2}{k+1} \dfrac{\rho_s \tau^\zeta}{F_a\, tg\varphi \cos\gamma} \sqrt[k]{\dfrac{\tau^\zeta}{\mu_*}} \left(1 - \sqrt{\dfrac{(k+1)^2}{k^4} \left(\dfrac{\mu_*}{\tau^\zeta}\right)^{\frac{2}{k}} \dfrac{d\,F_a}{2 c_x\,\rho_w}}\right), & \tau^\zeta > \tau_*, \\ 0, & \tau^\zeta \le \tau_*, \end{cases} \quad (31)$$

$$Q = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{k^2}{k+1} \sqrt[k]{\dfrac{\tau^\zeta}{\mu_*}} \dfrac{\rho_s \tau^\zeta}{F_a} \left(1 - \sqrt{\dfrac{(k+1)^2}{k^4} \left(\dfrac{\mu_*}{\tau^\zeta}\right)^{\frac{2}{k}} \dfrac{2\,d\,F_a}{c_x\,\rho_w}}\right)\right) & \tau^\zeta > \tau_*, \\ 0 & \tau^\zeta \le \tau_*. \end{cases} \quad (32)$$

Отметим, что коэффициенты Q, Λ полученного уравнения не содержат феноменологических параметров и определяются только через физико-механические параметры задачи.

Сравнение формул (28), (29) с известными экспериментальными данными [17] показало, что при параметрах ($k = 2, \mu_* = \rho_w \kappa^2$, где $\kappa = 0{,}4$ – постоянная Кармана [7]) различие расходов, полученных по формуле (28) на интервале $1 \le \dfrac{\tau^{\zeta}}{\tau_*} \le 10$, не превышают 4 %. Учитывая дисперсию эксперименталь-ных данных, приведенных в работе [17], можно утверждать, что расчетные результаты, полученные по формуле (28), полностью согласуются с экспериментом.

Выводы

1. В результате решения краевой задачи для двухфазной смеси степенной жидкости и твердых частиц в придонном активном слое получена общая формула удельного массового расхода наносов, которая не содержит в себе феноменологических параметров.
2. Определены ограничения, накладываемые на реологическую модель смеси, при которых из модели можно исключить концентрацию частиц в активном слое смеси.
3. Показано, что при использовании жидкости Кулона–Ньютона [6] невозможно провести исключение параметра f.
4. Получены аналитические зависимости, позволяющие определять значения параметров Λ, Q, τ_*.

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант № 08-01-99035 - р_офи.

Библиографические ссылки

1. *Караушев А. В.* Теория и методы расчета речных наносов Л., 1977.
2. *Гришанин К. В.* Устойчивость русел рек и каналов. Л., 1974.
3. *Bagnold, R. A.* An approach to the sediment transport problem from general physics/ R.A. Bagnold. US Geological Survey, 1966.
4. *Bagnold, R. A.*, An energetics total load sediment transport model for a plane sloping beach/ R.A. Bagnold – Journal of Geophysical Research. 1981. V. 86.
5. *Bowen, A. J.* Simple models of nearshore sedimentation: Beach profiles and longshore bars/ A.J. Bowen// In Coastline of Canada, Halifax. Geological Survey of Canada, 1980.
6. *Петров П. Г.* Движение донных наносов под воздействием потока жидкости // МЖГ. 1988. № 2.
7. *Петров П. Г.* Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // ПМТФ. 1991. № 5.
8. *Петров А. Г., Петров П. Г.* Вектор расхода наносов в турбулентном потоке над размываемым дном // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 2.
9. *Милитеев А. Н., Базаров Д. Р.* Двумерные в плане уравнения для размываемых русел: Сообщение по прикладной математике. М., 1997.

10. *Белолипецкий В. М., Генова С. Н.* Вычислительный алгоритм для определения динамики взвешенных и донных наносов в речном русле // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. № 2.

11. *Meijer-Peter E., Muller R.* Formulae for bedload transport. Proc. 2nd Cong. Int. Assoc. Hydraul. Res., Stockholm, 1948.

12. *Bagnold R. A.* Beach and nearshore processes. Part I, Mechanics of marine sedimentation. Wiley Interscience. New York. 1963. V. 3.

13. *Einstein H. A.* The bedload function for sediment transportation in open channel. Ows. Soil Cons. Serv. U.S. Dept. Agric. Tech. Bull. 1950.

14. *Yalin M. S.* An expression for bedload transportation Div. ASCE 89, 1963.

15. *Yalin M. S.* Mechanics of sediment transport. Pergamon Press. 1977.

16. *Потапов И. И.* Моделирование гидродинамических и русловых процессов равнинных рек. Владивосток, 2006.

17. *Fernandez L. R., R. van* Beek Erosion and transport of bedload Sediment. Journal Hydraul resources. 1976. V. 14.