УДК 537.86:621.37

К ВОПРОСУ О ВЕКТОРЕ ГЕРЦА

Гладких В. А. – канд. физ. - мат. наук, ст. науч. сотр.; *Кривошеев И. А.* – д - р техн. наук завлабораторией информационных технологий (ВЦ ДВО РАН)

Решение многих электродинамических задач (в частности, задач, связанных с распространением волн в присутствии направляющих систем и волноводов), как известно, значительно упрощается при введении векторной функции $\vec{\Pi}$ - вектора Герца, через который можно выразить векторный $\vec{A}$ и скалярный φ потенциалы поля, а следовательно, и векторы напряженности поля. Однако при этом вектор Герца часто вводится довольно искусственно, а порой и некорректно. В связи с этим предложен логически непротиворечивый способ представления вектора Герца.

As is known, solution of many electrodynamic problems (including the problems associated with wave transmission in the presence of guiding systems and waveguides) can be significantly facilitated with the introduction of vector function $\vec{\Pi}$ - the Hertz vector, by which $\vec{A}$ vector and φ scalar field potentials can be expressed. However, in doing so, the Hertz vector is often quite artificially and sometimes not correctly introduced. Therefore, a logically non-contradictory way of introducing the Hertz vector is proposed.

Ключевые слова: распространение волн, волновод, электрический вектор Герца, магнитный вектор Герца.

Запишем уравнения Максвелла для электромагнитного поля в среде без источников – свободных зарядов [1]:

$$rot\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, di\upsilon\,\vec{D} = 0, di\upsilon\,\vec{B} = 0, \qquad (1)$$

где

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}, \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \qquad (2)$$

а $\vec{P}, \vec{M}$ – соответственно вектор поляризации (дипольный момент единицы объема вещества) и вектор намагниченности (магнитный момент единицы объема вещества). Подставим (2) в (1):

$$rot\left(\vec{B}-4\pi\,\vec{M}\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}+4\pi\,\vec{P}\right), rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, di\upsilon\left(\vec{E}+4\pi\,\vec{P}\right)=0\,, di\upsilon\,\vec{B}=0.$$

Запишем эти уравнения в виде

$$rot\,\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{св}\,, rot\,\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, di\upsilon\,\vec{E}=4\pi\rho_{св}\,, di\upsilon\,\vec{B}=0\,; \qquad (3)$$

$$\rho_{св}=-di\upsilon\,\vec{P}\,,\ \vec{j}_{св}=\partial\vec{P}/\partial t+c\,rot\,\vec{M}\,.$$

Мы записали уравнения Максвелла для среды без свободных зарядов в виде уравнений Максвелла для вакуума со связанными зарядами, с плотностью $\rho_{св}$ и плотностью тока $\vec{j}_{св}$. Легко видеть выполнение закона сохранения этого заряда ($di\upsilon\,rot\,\vec{a}=0$ для любого вектора $\vec{a}$):

$$\frac{\partial\rho_{св}}{\partial t}+di\upsilon\,\vec{j}_{св}=0. \qquad (4)$$

Как и в электродинамике вакуума, введем потенциалы φ и $\vec{A}$:

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\ \vec{B}=rot\,\vec{A}. \qquad (5)$$

При замене

$$\varphi\to\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},\ \vec{A}\to\vec{A}'=\vec{A}+\nabla f, \qquad (6)$$

где f – произвольная функция координат и времени, как известно, напряженности (5) не меняются (калибровочная инвариантность).

Выбирая f в (6) так, чтобы выполнялось условие Лоренца

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+di\upsilon\,\vec{A}=0 \qquad (7)$$

и подставляя (5) в уравнения (3) (первое и третье), обычным образом приходим к неоднородным волновым уравнениям для потенциалов:

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho_{св}\,,\ \Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{св}\,. \qquad (8)$$

Сопоставим теперь соотношения (4) и (7):

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\rho_{св}}{\partial t}+di\upsilon\left(\dfrac{\vec{j}_{св}}{c}\right)=0\\ \rho_{св}=-di\upsilon\,\vec{P}\,,\dfrac{\vec{j}_{св}}{c}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{P}}{\partial t}+rot\,\vec{M}\end{array}\right.\to\left\{\rho_{св},\frac{\vec{j}_{св}}{c},\vec{P},\vec{M}\to\varphi,\vec{A},\vec{\Pi}^e,\vec{\Pi}^m\right\}\to$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+di\upsilon\,\vec{A}=0$$

$$\rightarrow$$

$$\varphi\equiv -di\upsilon\,\vec{\Pi}^{e},\ \vec{A}\equiv\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}^{e}}{\partial t}+rot\,\vec{\Pi}^{m}.$$

Таким образом, мы естественным образом определили электрический $\vec{\Pi}^{e}$ и магнитный $\vec{\Pi}^{m}$ векторы Герца:

$$\varphi\equiv= -di\upsilon\,\vec{\Pi}^{e},\ \vec{A}\equiv\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}^{e}}{\partial t}+rot\,\vec{\Pi}^{m}. \qquad (9)$$

Подставляя φ из (9) в первое уравнение из (8), получаем

$$di\upsilon\left\{\Delta\vec{\Pi}^{e}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\vec{\Pi}^{e}}{\partial t^{2}}+4\pi\vec{P}\right\}=0,$$

откуда ($di\upsilon\, rot\,\vec{a}=0$ для любого вектора $\vec{a}$)

$$\Delta\vec{\Pi}^{e}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\vec{\Pi}^{e}}{\partial t^{2}}+4\pi\vec{P}=rot\,\vec{a}.$$

Воспользовавшись этим выражением и подставляя $\vec{A}$ из (9) во второе уравнение из (8), также получаем:

$$rot\left\{\Delta\vec{\Pi}^{m}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\vec{\Pi}^{m}}{\partial t^{2}}+4\pi\vec{M}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t}\right\}=0,$$

откуда ($rot\,\nabla b=0$ для любого скаляра b)

$$\Delta\vec{\Pi}^{m}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\vec{\Pi}^{m}}{\partial t^{2}}+4\pi\vec{M}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t}=\nabla b.$$

Запишем полученные уравнения для $\vec{\Pi}^{m},\vec{\Pi}^{e}$ в виде

$$\begin{gathered}\Delta\vec{\Pi}^{e}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\vec{\Pi}^{e}}{\partial t^{2}}=-4\pi\vec{P}',\ \Delta\vec{\Pi}^{m}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\vec{\Pi}^{m}}{\partial t^{2}}=-4\pi\vec{M}';\\ \vec{P}'=\vec{P}-\frac{1}{4\pi}rot\,\vec{a},\ \vec{M}'=\vec{M}+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t}-\frac{1}{4\pi}\nabla b.\end{gathered} \qquad (10)$$

Согласно последним соотношениям из (3), для $\vec{P}',\vec{M}'$ получаем

$$\rho'_{св}=-di\upsilon\,\vec{P}'=-di\upsilon\left(\vec{P}-\frac{1}{4\pi}rot\,\vec{a}\right)=-di\upsilon\,\vec{P}=\rho_{св};\ \vec{j}'_{св}=\frac{\partial\vec{P}'}{\partial t}+c\,rot\,\vec{M}'=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{P}-\frac{1}{4\pi}rot\,\vec{a}\right)+c\,rot\left(\vec{M}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t}-\frac{1}{4\pi}\nabla b\right)=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+c\,rot\,\vec{M}=\vec{j}_{св}.$$

Таким образом, преобразование $\vec{P}\rightarrow P',\vec{M}\rightarrow M'$ не меняет $\rho_{св}$ и $\vec{j}_{св}$, а тем самым, согласно (8) и полей, ими порождаемых. Поэтому без ограничения общности положим $\vec{a} = 0, b = 0$, и уравнения (10) для векторов Герца принимают вид неоднородных волновых уравнений:

$$\Delta\vec{\Pi}^e - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}^e}{\partial t^2} = -4\pi\,\vec{P},\ \ \Delta\vec{\Pi}^m - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}^m}{\partial t^2} = -4\pi\,\vec{M}\,. \tag{11}$$

Выбирая запаздывающее решение этих уравнений, имеем

$$\vec{\Pi}^e(t,\vec{r}) = \int \vec{P}\left(t - \frac{R}{c}, \vec{r}^{\,\prime}\right)\frac{dV^{\prime}}{R},\ \ \vec{\Pi}^m(t,\vec{r}) = \int \vec{M}\left(t - \frac{R}{c}, \vec{r}^{\,\prime}\right)\frac{dV^{\prime}}{R},$$
$$R = \left|\vec{r}^{\,\prime} - \vec{r}\right|. \tag{12}$$

Отсюда видна оправданность названий векторов Герца.

Для полей (5) согласно (9) с учетом (11) получаем

$$\vec{E} = rot\,rot\,\vec{\Pi}^e - \frac{1}{c}rot\frac{\partial\vec{\Pi}^m}{\partial t} - 4\pi\,\vec{P},\ \vec{B} = rot\,rot\,\vec{\Pi}^m + \frac{1}{c}rot\frac{\partial\vec{\Pi}^e}{\partial t}. \tag{13}$$

(При получении первого соотношения мы использовали известную формулу $grad\,div\,\vec{a} = rot\,rot\,\vec{a} - \Delta\vec{a}$ для произвольного вектора $\vec{a}$).

Для однородной изотропной среды удобнее рассмотреть другой подход к введению векторов Герца. В этом случае $\vec{P} = \kappa\,\vec{E}, \vec{M} = \chi\,\vec{H}$ (диэлектрическая и магнитная восприимчивости) и вместо (2) имеем, вводя $\varepsilon,\ \mu -$ диэлектрическую и магнитную проницаемости среды,

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E},\ \varepsilon = 1 + 4\pi\kappa;\ \vec{B} = \mu\,\vec{H},\ \mu = 1 + 4\pi\chi. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (1), запишем уравнения в виде ($\varepsilon,\ \mu -$ постоянные величины в случае однородной изотропной среды):

$$rot\,\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, rot\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, div\,\vec{E} = 0, div\,\vec{H} = 0. \tag{15}$$

Потенциалы φ и $\vec{A}$ определяются формулой (5) без изменений, и поля также, как и в предыдущем случае, инвариантны относительно преобразования (6). Воспользовавшись этой инвариантностью, условие Лоренца в рассматриваемом случае запишем в виде

$$div\,\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0\ \ или\ \ \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + div\,\vec{A}^{\prime} = 0,\ \vec{A}^{\prime} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\vec{A}. \tag{16}$$

Подстановка (5) в первое и третье уравнения из (15) с учетом условия (16) приводит к однородным волновым уравнениям для потенциалов:

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0,\ \Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{17}$$

Сопоставляя (16) с (7) и (9), запишем:

$$\varphi \equiv -div\,\vec{\Pi}^{e\prime},\ \vec{A}^{\prime} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\vec{A} \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}^{e\prime}}{\partial t} + rot\,\vec{\Pi}^{m\prime}.$$

ВЕСТНИК ТОГУ. 2008. № 4 (11)

Обычно для однородных изотропных сред электрический $\vec{\Pi}^E$ и магнитный $\vec{\Pi}^M$ векторы Герца определяются следующим образом:

$$\vec{\Pi}^E \equiv \vec{\Pi}^{e'}, \vec{\Pi}^M \equiv \varepsilon \vec{\Pi}^{m'},$$

тогда окончательно запишем:

$$\varphi \equiv -div \vec{\Pi}^E, \vec{A} \equiv \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \vec{\Pi}^E}{\partial t} + \mu \, rot \, \vec{\Pi}^M. \tag{18}$$

Подставляя отсюда φ в первое уравнение из (17), находим

$$div\left\{\Delta\vec{\Pi}^E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}^E}{\partial t^2}\right\} = 0,$$

откуда ($div\, rot\,\vec{a} = 0$ для любого вектора $\vec{a}$)

$$\Delta\vec{\Pi}^E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}^E}{\partial t^2} = rot\,\vec{a}. \tag{19}$$

Подставляя $\vec{A}$ из (18) в уравнение из (17), с учетом (19) получим

$$rot\left\{\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t} + \Delta\vec{\Pi}^M - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}^M}{\partial t^2}\right\} = 0,$$

откуда ($rot\,\nabla b = 0$ для любого скаляра b)

$$\Delta\vec{\Pi}^M - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}^M}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t} + \nabla b. \tag{20}$$

С другой стороны, преобразование

$$\vec{\Pi}^E \to \left(\vec{\Pi}^E\right)' = \vec{\Pi}^E + rot\,\vec{a}, \vec{\Pi}^M \to \left(\vec{\Pi}^M\right)' = \vec{\Pi}^M - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t} + \nabla b$$

не меняет потенциалов – согласно (18):

$$\varphi' = -div\left(\vec{\Pi}^E\right)' = -div\left\{\vec{\Pi}^E + rot\,\vec{a}\right\} = -div\,\vec{\Pi}^E = \varphi;\ \vec{A}' = \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\left(\vec{\Pi}^E\right)'}{\partial t} + \mu\times$$

$$\times rot\left(\vec{\Pi}^M\right)' = \left\{\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}^E}{\partial t} + \mu\,rot\,\vec{\Pi}^M\right\} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}rot\,\vec{a} + \mu\,rot\left(-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t} + \nabla b\right) =$$

$$= \left\{\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}^E}{\partial t} + \mu\,rot\,\vec{a}\right\} = \vec{A}.$$

Полагая $\vec{a} = 0, b = 0$, мы делаем выбор $\vec{\Pi}^{E,M}$ однозначным, и соотношения (19), (20) принимают вид однородных волновых уравнений:

$$\Delta\vec{\Pi}^E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}^E}{\partial t^2} = 0,\ \Delta\vec{\Pi}^M - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}^M}{\partial t^2} = 0. \tag{21}$$

Наконец, подставляя (18) в (5), для полей с учетом (21) получаем:

$$\vec{E} = rot\,rot\,\vec{\Pi}^{E} - \frac{\mu}{c} rot \frac{\partial \vec{\Pi}^{M}}{\partial t},\ \vec{H} = \frac{1}{\mu} rot\,\vec{A} = rot\,rot\,\vec{\Pi}^{M} + \frac{\varepsilon}{c} rot \frac{\partial \vec{\Pi}^{E}}{\partial t}. \quad (22)$$

В заключение заметим, что, к примеру, в [2] некорректно определен вектор $\vec{\Pi}^{E}$ для статического случая:

$$\vec{\Pi}^{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int \vec{P}(\vec{r}^{\,\prime}) \frac{dV^{\prime}}{R},\ R = \left|\vec{r} - \vec{r}^{\,\prime}\right|,$$

поскольку свойства среды определяются либо $\vec{P}$, либо ε, но не вместе. Эта некорректность и многие другие аналогичные случаи в литературе и побудили написать настоящую статью.

Библиографические ссылки

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1982.
2. *Семенов А. А.* Теория электромагнитных волн. М., 1962.