



УДК 519.635:519.688

© В. С. Филоненко, 2007

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Филоненко В. С. – асп. кафедры «Прикладная математика и информатика»
(ТОГУ)

С помощью метода конечных элементов в прямоугольной области найдены приближенные собственные значения двумерной спектральной задачи с нелинейным вхождением параметра, возникающей в связи с проблемой нормальных колебаний вязкой несжимаемой экспоненциально-стратифицированной жидкости.

The paper deals with nonlinear two-dimensional spectral problem in view of the problem of normal modes of incompressible exponentially stratified viscous fluid that is bounded by rectangular solid border. The finite element method is used for computation of approximate Eigen values.

Рассматривается спектральная задача с нелинейным вхождением параметра λ , возникающая в задаче течения вязкой несжимаемой экспоненциально-стратифицированной жидкости [1], [2, с. 893–899]. Численное нахождение приближенных собственных значений в случае свободной границы методом моментов исследовано в [3]. В данной работе спектральная задача рассматривается в замкнутой прямоугольной области с использованием метода конечных элементов.

Опираясь на работы [1], [2, с. 893–899], сформулируем задачу нахождения собственных значений.

Рассматриваются двумерные движения вязкой несжимаемой стратифицированной жидкости в области

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

Жидкость стратифицирована экспоненциально вдоль оси Oy , что означает, что ее плотность ρ и динамическая вязкость η в невозмущенном состоянии имеют вид:

$$\rho(y) = \alpha e^{-2\beta y}, \beta > 0,$$
$$\eta(y) = \nu \rho(y) = \nu \alpha e^{-2\beta y},$$

где α – некоторая константа; β – параметр, характеризующий масштаб стратификации; ν – кинематическая вязкость (полагается постоянной). Практическая важность такого случая стратификации заключается в том, что распределение плотности по экспоненциальному закону является бальцмановским распределением в однородном поле силы тяжести.

Вводится функция тока $u(x, y, t)$ – такая функция, что для компонент v_1 и v_2 вектора скорости выполнены равенства:

$$u'_y = v_1, \quad u'_x = -v_2,$$

и рассматривается следующее дифференциальное уравнение:

$$Lu \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u - \nu \frac{\partial}{\partial t} \Delta^2 u + \omega_0^2 u''_{xx} = 0,$$

где $\Delta^2 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бигармонический оператор; $\omega_0 = 2\beta g$

– частота Вейсяля-Брента (см. [1]); g – ускорение свободного падения.

Нормальные колебания вязкой экспоненциально-стратифицированной жидкости запишем в следующем виде:

$$u(x, y, t) = w(x, y) e^{-\lambda t}.$$

Тогда функция $w(x, y)$ должна удовлетворять спектральному уравнению:

$$\lambda \nu \Delta^2 w + \lambda^2 \Delta w + \omega_0^2 w''_{xx} = 0. \quad (1)$$

Присоединим к дифференциальному уравнению (1) нулевые граничные условия:

$$w(x, y) |_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} w(x, y) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

где $\partial\Omega$ – граница области Ω , а n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Получаем квадратичную спектральную задачу (1) – (3).

Для нахождения приближенных собственных чисел λ этой задачи воспользуемся методом конечных элементов.

В качестве конечных элементов выберем прямоугольники, что обусловлено формой области Ω . Разложение искомой функции выполним по двумерным базисным функциям, составленным на основе одномерных эрмитовых базисных функций [4], [5], [6], [7].



Разобьем область Ω вертикальными и горизонтальными прямыми на клетки размером $h_x \times h_y$, где

$$h_x = \frac{1}{N_x}, \quad h_y = \frac{1}{N_y},$$

а N_x и N_y – количество отрезков разбиения по оси Ox и Oy соответственно.

Получим сеточную область

$$\Omega_h \equiv \{(x_i, y_j) \mid x_i = ih_x, y_j = jh_y, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1\},$$

и ее сеточное замыкание

$$\bar{\Omega}_h \equiv \{(x_i, y_j) \mid x_i = ih_x, y_j = jh_y, i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y\}.$$

С каждым узлом (x_i, y_j) сетки $\bar{\Omega}_h$ свяжем прямоугольный конечный элемент

$$\Omega_{i,j} = [x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}] \cap \bar{\Omega}_h,$$

$$i = 0, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_y$$

В центре конечного элемента $\Omega_{i,j}$ находится узел (x_i, y_j) сетки, а по углам конечного элемента и на серединах его сторон располагаются соседние узлы.

С каждым конечным элементом свяжем по четыре функции следующего вида:

$$\varphi_{i,j}^1(x, y) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{x}{h_x} - i\right)\varphi\left(\frac{y}{h_y} - j\right), & \text{при } (x, y) \in \Omega_{i,j} \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin \Omega_{i,j} \end{cases}$$

$$\varphi_{i,j}^2(x, y) = \begin{cases} \psi\left(\frac{x}{h_x} - i\right)\varphi\left(\frac{y}{h_y} - j\right), & \text{при } (x, y) \in \Omega_{i,j} \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin \Omega_{i,j} \end{cases}$$

$$\varphi_{i,j}^3(x, y) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{x}{h_x} - i\right)\psi\left(\frac{y}{h_y} - j\right), & \text{при } (x, y) \in \Omega_{i,j} \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin \Omega_{i,j} \end{cases}$$

$$\varphi_{i,j}^4(x, y) = \begin{cases} \psi\left(\frac{x}{h_x} - i\right)\psi\left(\frac{y}{h_y} - j\right), & \text{при } (x, y) \in \Omega_{i,j} \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin \Omega_{i,j} \end{cases}$$

Здесь функции φ и ψ – это функции эрмитова восполнения [4], [5] сеточных функций для одномерного случая. Они определены на отрезке $[-1,1]$, непрерывны вместе с первыми производными, имеют кусочно-непрерывные вторые производные и обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}\varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0, \\ \psi(\pm 1) = \psi'(\pm 1) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1.\end{aligned}$$

Аналитически их можно записать следующим образом:

$$\varphi(s) = \begin{cases} (1-2s)(1+s)^2, & \text{при } -1 \leq s \leq 0 \\ (1+2s)(1-s)^2, & \text{при } 0 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{при } |s| > 1 \end{cases}$$

$$\psi(s) = \begin{cases} s(1+s)^2, & \text{при } -1 \leq s \leq 0 \\ s(1-s)^2, & \text{при } 0 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{при } |s| > 1 \end{cases}$$

Для функций $\varphi_{i,j}^k$ в точке (x_i, y_j) выполнены свойства, указанные в табл. 1.

На границе конечного элемента $\Omega_{i,j}$ функции

$$\varphi_{i,j}^k, \quad \frac{\partial \varphi_{i,j}^k}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_{i,j}^k}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_{i,j}^k}{\partial x \partial y}$$

тождественно равны нулю. Функции

$$\{\varphi_{i,j}^k \mid i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y, k = 1, \dots, 4\}$$

линейно независимы.

Таблица 1.

Свойства базисных функций и их производных

k	$\varphi_{i,j}^k(x_i, y_j)$	$h_x \frac{\partial \varphi_{i,j}^k}{\partial x} \Big _{(x_i, y_j)}$	$h_y \frac{\partial \varphi_{i,j}^k}{\partial y} \Big _{(x_i, y_j)}$	$h_x h_y \frac{\partial^2 \varphi_{i,j}^k}{\partial x \partial y} \Big _{(x_i, y_j)}$
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1



Решение $w(x, y)$ спектральной задачи (1) – (3) приближенно запишем в виде следующей конечной суммы:

$$w(x, y) \approx w_N(x, y) \equiv \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{k=1}^4 a_{i,j}^k \varphi_{i,j}^k(x, y),$$

где $a_{i,j}^k$ – неизвестные постоянные.

Из граничных условий (2) – (3) сразу следует, что $a_{i,j}^k = 0$, если $i \in \{0, N_x\}$ или $j \in \{0, N_y\}$. Поэтому:

$$w_N(x, y) \equiv \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=1}^4 a_{i,j}^k \varphi_{i,j}^k(x, y).$$

Подставим $w_N(x, y)$ в уравнение (1), последовательно умножим полученное уравнение на функции $\varphi_{p,q}^r$, где $p = 1, 2, \dots, N_x - 1$, $q = 1, 2, \dots, N_y - 1$, $r = 1, 2, 3, 4$, и проинтегрируем по области Ω .

Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_{i,j}^k$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=1}^4 a_{i,j}^k (\lambda v c_{i,j,k}^{p,q,r} + \lambda^2 e_{i,j,k}^{p,q,r} + \omega_0^2 f_{i,j,k}^{p,q,r}) = 0, \\ p = 1, 2, \dots, N_x, q = 1, 2, \dots, N_y, r = 1, 2, 3, 4, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$c_{i,j,k}^{p,q,r} = \iint_{\Omega_{p,q}} \Delta \varphi_{i,j}^k \Delta \varphi_{p,q}^r d\Omega,$$

$$e_{i,j,k}^{p,q,r} = \iint_{\Omega_{p,q}} \Delta \varphi_{i,j}^k \varphi_{p,q}^r d\Omega,$$

$$f_{i,j,k}^{p,q,r} = \iint_{\Omega_{p,q}} \frac{\partial^2 \varphi_{i,j}^k}{\partial x^2} \varphi_{p,q}^r d\Omega.$$

Избавимся теперь в (4) от тройных индексов (i, j, k) и (p, q, r) . Для этого введем следующую функцию:

$$I(i, j, k) \equiv 4(i - 1 + (N_x - 1)(j - 1)) + k.$$

Обозначив за $I_1 = I(i, j, k)$, $I_2 = I(p, q, r)$, вместо (4) получим:

$$\begin{cases} \sum_{I_1=1}^M a_{I_1} (\lambda v c_{I_1}^{I_2} + \lambda^2 e_{I_1}^{I_2} + \omega_0^2 f_{I_1}^{I_2}) = 0 \\ I_2 = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (5)$$

Здесь

$$M = 4(N_x - 1)(N_y - 1).$$

Запишем систему (5) в матричном виде:

$$(\lambda^2 \mathbf{A}_1 + \lambda \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) \vec{\mathbf{a}} = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ - матрицы, составленные из коэффициентов системы, а вектор $\vec{\mathbf{a}} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}^T$.

Система (6) представляет собой квадратичную задачу на собственные значения. Сведем ее к обобщенной задаче на собственные значения [8]. Для этого запишем (6) в следующем виде:

$$\mathbf{D} \vec{\mathbf{a}} = \lambda \mathbf{B} \vec{\mathbf{a}}, \quad (7)$$

где \mathbf{D} и \mathbf{B} - блочные матрицы:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_3 & -\mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix},$$

а \mathbf{I} - единичная матрица.

В работе [8] утверждается, что системы вида (6) и (7) имеют одинаковые собственные значения.

Таким образом, исходная задача (1) - (3) сведена к обобщенной задаче на собственные значения.

При реализации вычислений собственных значений поставленной задачи необходимо использовать теоретические результаты работы [2, с. 893-899], в которой говорится о случаях сильной и слабой демпфированности стратифицированной жидкости. Так, если отношение

$$\frac{v^2}{\omega_0^2} \quad (8)$$

больше некоторого числа S , зависящего только от формы области Ω , то жидкость называется сильно демпфированной, в противном случае - слабо демпфированной.

В первом случае спектр задачи состоит из изолированных положительных собственных значений конечной кратности, обладающих двумя точками сгущения:

$$\lambda = 0 \text{ и } \lambda = +\infty.$$

В случае слабо демпфированной жидкости спектр задачи состоит из изолированных точек комплексной плоскости, все собственные значения являются конечнократными, лежат в области $\text{Re } \lambda > 0$ и обла-



дают двумя точками сгущения: $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$. При этом, не вещественных собственных значений может быть лишь конечное число, и все они расположены в полукольце

$$\operatorname{Re} \lambda > 0, \quad c_1 \nu \leq |\lambda| \leq \frac{\omega_0^2}{\nu} c_2,$$

где c_1 и c_2 – некоторые константы, зависящие только от формы области Ω .

Для выполнения расчетов и построения графиков было составлено несколько программных модулей, написанных на встроенном в аналитическую систему Maple языке программирования и на языке программирования Delphi (Object Pascal). Расчет проводился для различных значений N_x и N_y , ν и ω_0 (то есть отношения (8)), и показал ожидаемые результаты.

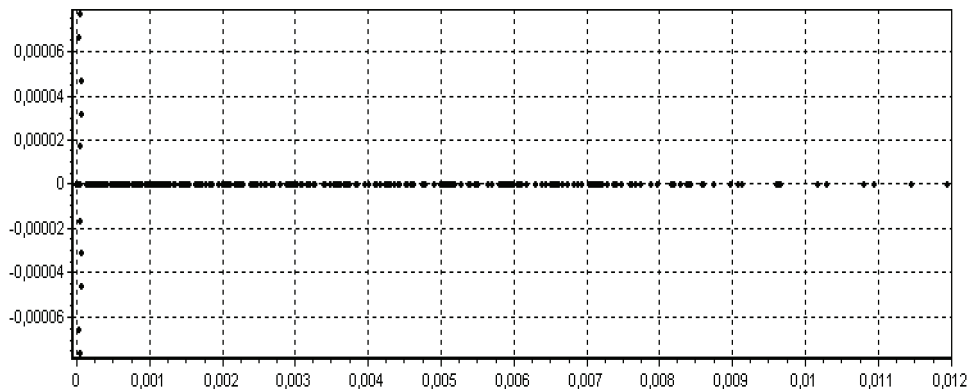


Рис. 1. Все собственные значения задачи, случай слабо демпфированной жидкости ($\nu = 10^{-6}$, $\omega_0 = 10^{-4}$). Масштабы осей не совпадают

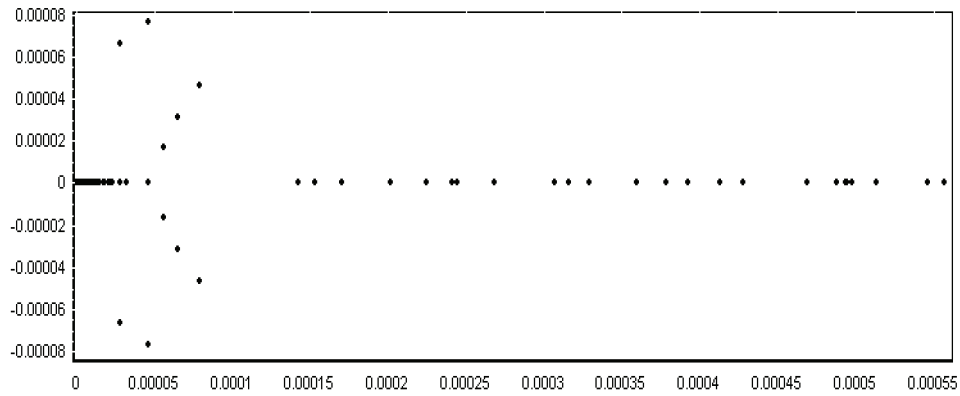


Рис. 2. Собственные значения задачи в окрестности точки $\lambda = 0$, случай слабо демпфированной жидкости ($\nu = 10^{-6}$, $\omega_0 = 10^{-4}$). Масштабы осей совпадают

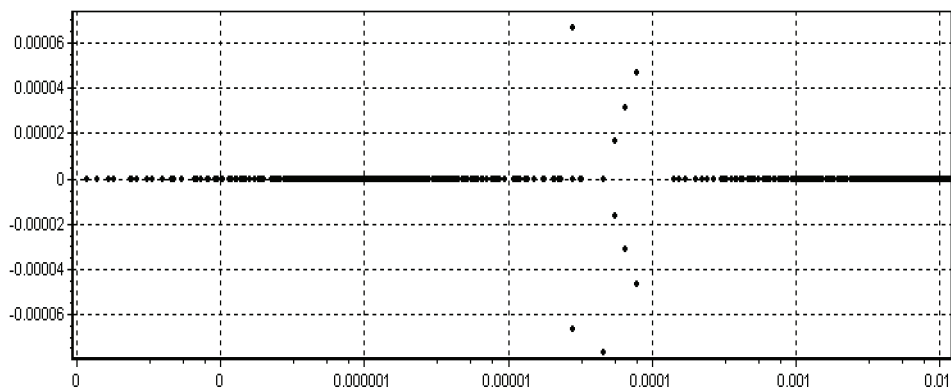


Рис. 3. Все собственные значения задачи, случай слабо демпфированной жидкости ($\nu = 10^{-6}$, $\omega_0 = 10^{-4}$). Горизонтальная ось имеет логарифмическую шкалу

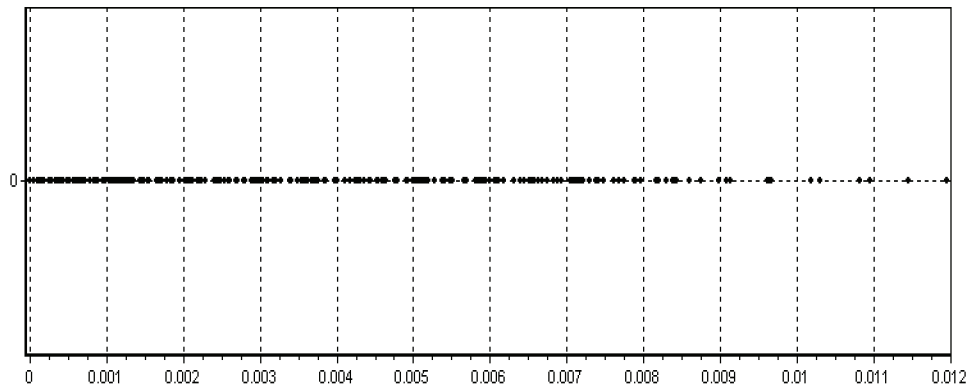


Рис. 4. Все собственные значения задачи, случай сильно демпфированной жидкости ($\nu = 10^{-6}$, $\omega_0 = 10^{-6}$). Линейный масштаб горизонтальной оси

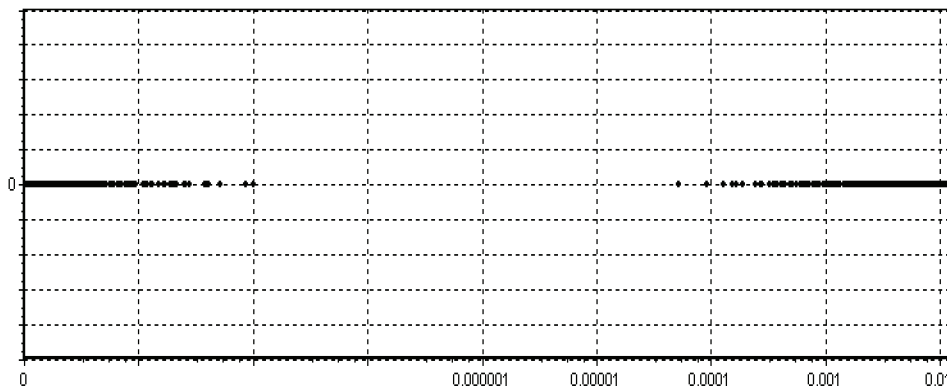


Рис. 5. Все собственные значения задачи, случай сильно демпфированной жидкости ($\nu = 10^{-6}$, $\omega_0 = 10^{-6}$). Горизонтальная ось имеет логарифмическую шкалу

На рис. 1 – 5 приведены результаты вычислений для двух случаев:

1. $\nu = 10^{-6}$, $\omega_0 = 10^{-4}$ (слабо демпфированная жидкость),
2. $\nu = 10^{-6}$, $\omega_0 = 10^{-6}$ (сильно демпфированная жидкость).

В обоих случаях $N_x = N_y = 11$ и получено по 800 собственных значений.



Библиографические ссылки

1. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М., 1986.
2. *Габов С. А., Мальшева Г. Ю.* Об одной спектральной задаче, связанной с колебаниями вязкой стратифицированной жидкости. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24. № 6.
3. *Филоненко В. С.* Численное моделирование нормальных колебаний вязкой стратифицированной жидкости // Теорет. и прикл. вопр. соврем. информ. Технологий. Улан-Удэ. 2006. Ч. 1.
4. *Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. // Дифференциальные уравнения и их применение. Вильнюс, 1973. Вып. 5, 1-385.
5. *Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. // Дифференциальные уравнения и их применение. Вильнюс, 1974. Вып. 8, 1-322.
6. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.
7. *Власова Е. А., Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н.* Приближенные методы математической физики / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. М., 2001.
8. *Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe, and H. van der Vorst, editors.* Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide. SIAM, Philadelphia, 2000.