ВЕСТНИК ТОГУ. 2011. № 2 (21)

УДК 517.9/519.6

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С СИЛЬНОЙ СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

Рукавишников В. А. – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. лабораторией математич. моделирования в физике и технике, тел. (4212) 70-43-42, e-mail: vark@mail.redcom.ru (Вычислительный центр ДВО РАН)

Кратко изложены основы теории краевых задач с сильной сингулярностью, у которых интеграл Дирихле от решения расходится.

We expound the basics of the theory of boundary value problems with strong singularity in which the Dirichlet integral from solution diverges.

Ключевые слова: краевые задачи с сильной сингулярностью, интеграл Дирихле, весовые пространства С. Л. Соболева.

Нет ничего практичнее хорошей теории.
А. Эйнштейн

Введение

К настоящему времени построена законченная теория классических решений краевых задач с гладкими исходными данными (коэффициентами уравнения, правыми частями уравнения и граничных условий) и достаточно гладкой границей области.

На основе введения обобщенного решения проводились обширные исследования краевых задач с разрывными исходными данными и негладкой границей области в соболевских и различных весовых пространствах. На базе метода Галёркина для нахождения приближенного обобщенного решения разработаны теории разностных схем, конечных объемов и метода конечных элементов.

Для некоторых краевых задач невозможно определить обобщенное решение, поскольку их решение $u(x)$ не принадлежит пространству С. Л. Соболева $W_2^1\left(H^1\right)$, или, другими словами, интеграл Дирихле от решения $u(x)$ расходится. Будем называть такие задачи краевыми задачами с сильной сингулярностью.

Краевые задачи с сильной сингулярностью, вызванной сингулярностью исходных данных или внутренними свойствами решения, возникают в физике плазмы и газового разряда, электродинамике, ядерной физике, нелинейной оптике и других областях физики. Первые публикации зарубежных авторов по разработке численных методов для решения прикладных задач с сильной сингулярностью появились в начале этого века [1, 2], и в настоящее время ежегодное число статей по этой тематике растет в геометрической прогрессии.

Нами в [3, 4] для краевых задач с сильной сингулярностью было предложено определять решение как R_ν-обобщенное в весовом пространстве Соболева. Такое новое понятие решения позволило выделить два класса краевых задач: с согласованным и несогласованным вырождением исходных данных, а также дало возможность изучить существование и единственность решения, его коэрцитивные и дифференциальные свойства, строить эффективные численные методы, разрабатывать алгоритмы и создавать системы программ для прикладных задач (подробную библиографию см. в [5]).

Отметим, что предлагаемая методика введения R_ν-обобщенного решения позволяет не только находить решение для краевых задач с расходящимся интегралом Дирихле, но и для задач со слабой сингулярностью, влияющей на регулярность решения.

Основные обозначения. Через R^2 обозначим двумерное евклидово пространство с элементами $x=(x_1,x_2)$ и нормой $\|\mathrm{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. Пусть Ω – ограниченная область пространства R^2 с границей $\partial\Omega$; $\overline{\Omega}$ – замыкание области Ω, т. е. $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$. Через $\partial\Omega^\circ$ обозначим множество, состоящее из n точек границы $\partial\Omega$: $\partial\Omega^{(i)}= \ =(x_1^{(i)},x_2^{(i)})\in\partial\Omega$, $\partial\Omega^\circ=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\partial\Omega^{(i)}$. Будем предполагать, что граница $\partial\Omega$ кусочно-гладкая и $\partial\Omega\setminus\partial\Omega^\circ\in C^2$, а сама область Ω выпуклая. Пусть O_i^δ – круг с центром в точке $\partial\Omega^{(i)}$ ($i=\overline{1,n}$) и радиусом $\delta>0$, т. е. $O_i^\delta=\{x\,|\,\left\|x-\partial\Omega^{(i)}\right\|\le\delta\}$, и $O_i^\delta\cap O_j^\delta=\varnothing$, если $i\ne j$. Пусть $\Omega'=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(\Omega\cap O_i^\delta)$.

Через $\rho(x)$ определим весовую функцию, бесконечно дифференцируемую и положительную всюду, кроме точек множества $\partial\Omega^\circ$, и удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\rho(x)=\delta,$ если $x\in\overline{\Omega}$, Ω';

2) $\rho(x)=\sqrt{\left(x_1-x_1^{(i)}\right)^2+\left(x_2-x_2^{(i)}\right)^2}$, если $x\in\Omega\cap O_i^{\delta/2}, (i=\overline{1,n})$;

3) $\delta/2\le\rho(x)\le\delta,$ если $x\in\Omega$, $O_i^{\delta/2}\ (i=\overline{1,n})$.

Пусть, кроме того, производные функции $\rho(x)$ удовлетворяют неравенству:

$$\left|\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_l}\right|\le\delta' \quad (l=1,2), \tag{1}$$

где: $\delta'>0$ – вещественное число.

Введем в рассмотрение весовые пространства $H_{2,\alpha}^k(\Omega)$ и $W_{2,\alpha}^k(\Omega)$ с нормами:

$$\|\mathrm{u(x)}\|_{\mathrm{H}_{2,\alpha}^{\mathrm{k}}(\Omega)}=(\sum_{|\lambda|\le k}\int_\Omega p^{2(\alpha+|\lambda|\text{-k})}(x)\,|\,\mathrm{D}^\lambda u(x)|^2\,dx^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

$$\|\mathrm{u(x)}\|_{\mathrm{w}_{2,\alpha}^{\mathrm{k}}(\Omega)}=(\sum_{|\lambda|\le \mathrm{k}}\int_\Omega p^{2\alpha}(x)\,|\,\mathrm{D}^\lambda u(x)|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

где: $D^\lambda=\dfrac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$, $|\lambda|=\lambda_1+\lambda_2$; λ_1,λ_2 – целые неотрицательные числа, α – некоторое вещественное неотрицательное число, k – целое неотрицательное число. Для $k=0$ используем обозначение $W_{2,\alpha}^0(\Omega)=L_{2,\alpha}(\Omega)$.

Через $W_{2,\alpha}^l(\Omega,\delta)$ для $l\ge1$ обозначим множество функций, удовлетворяющих условиям:

а) $|D^k u(x)|\le C_1\cdot\gamma^k\cdot k!\cdot(\rho^{\alpha+k}(x))^{-1}$ для $x\in\Omega'$, где: $k=\overline{0,l}$, постоянные C_1, $\gamma\ge1$ не зависят от k;

b) $\|\mathrm{u(x)}\|_{\mathrm{L}_{2,\alpha}(\Omega,\Omega')}\ge C_2, C_2=const$; с квадратом нормы:

$$\|\mathrm{u(x)}\|^2_{\mathrm{W}^1_{2,\alpha+1\text{-}1}(\Omega,\delta)}=\sum_{|\lambda|\le1}\|\,\mathrm{p}^{\alpha+1\text{-}1}(x)\,|\,\mathrm{D}^\lambda u(x)|\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{4}$$

Пространства $\overset{\circ}{H}{}_{2,\alpha}^k(\Omega)\subset H_{2,\alpha}^k(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_{2,\alpha}^k(\Omega)\subset W_{2,\alpha}^k(\Omega)$ и множество $\overset{\circ}{W}{}^{k}_{2,\alpha}(\Omega,\delta)\subset W^{k}_{2,\alpha}(\Omega,\delta)$ определим как замыкания множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций по нормам (2)–(4) соответственно.

Краевые задачи с согласованным вырождением исходных данных. Пусть в области Ω задано дифференциальное уравнение:

$$-\sum_{l,s=1}^{2} a_{ls}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_s}+\sum_{l=1}^{2} a_l(x)\frac{\partial u}{\partial x_l}+a(x)u(x)=f(x), x\in\Omega, \quad (5)$$

с граничным условием:

$$u(x)=0, \quad x\in\partial\Omega. \quad (6)$$

Определение 1. Краевую задачу (5)–(6) будем называть задачей Дирихле с **согласованным** вырождением исходных данных, или задачей А, если коэффициенты $a_{ls}(x)=a_{sl}(x)$ $(l,s=1,2)$ и для некоторого вещественного числа β выполнены условия:

$$a_{ls}(x)\in H^{1}_{\infty,-\beta}(\Omega,C_3), \quad a_l(x)\in L_{\infty,-(\beta-1)}(\Omega,C_4)\,(l,s=1,2),$$

$$a(x)\in L_{\infty,-(\beta-2)}(\Omega,C_5), \quad \sum_{l,s=1}^{2} a_{ls}(x)\xi_l\xi_s \ge C_6\rho^{\beta}(x)\sum_{s=1}^{2}\xi_s^2,$$

$$a(x)\ge C_7\rho^{\beta-2}(x) \text{ почти всюду на } \Omega, \quad (7)$$

а правая часть уравнения (5):

$$f\in L_{2,\mu}(\Omega). \quad (8)$$

Здесь $C_i, i=3,\dots,7$ – положительные постоянные, не зависящие от x; ξ_1 и ξ_2 – любые вещественные параметры; μ – некоторое вещественное число.

Обозначим через:

$$a(u,v)=\int_{\Omega}[\sum_{l,s=1}^{2} a_{ls}(x)\rho^{2\nu}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\frac{\partial v(x)}{\partial x_s}+a_{ls}(x)\frac{\partial\rho^{2\nu}(x)}{\partial x_l}\frac{\partial u(x)}{\partial x_s}v(x)+$$

$$+\frac{\partial a_{ls}(x)}{\partial x_l}\rho^{2\nu}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_s}v(x)+a_l(x)\rho^{2\nu}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}v(x)+a(x)\rho^{2\nu}(x)u(x)v(x)]\,dx,$$

$$l(v)=\int_{\Omega}\rho^{2\nu}(x)f(x)v(x)dx$$

соответственно билинейную и линейную формы.

Определение 2. Функция $u_\nu(x)$ из пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ называется R_ν-обобщенным решением задачи Дирихле с **согласованным** вырождением исходных данных, если для всех $v(x)$ из $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ справедливо тождество $a(u_\nu, v) = l(v)$ при любом, но фиксированном ν, удовлетворяющем неравенству:

$$\nu \ge \mu + \beta/2 - 1. \tag{9}$$

Для R_ν-обобщенного решения задачи Дирихле (5), (6) с согласованным вырождением исходных данных установлены следующие теоремы.

Теорема 1 [6]. Пусть выполняются условия (1), (7)–(9), а также неравенство:

$$2\left(C_3\left(2\delta'\cdot|\nu|+1\right)+C_4/2\right)^2 < C_6C_7. \tag{10}$$

Тогда существует единственное R_ν-обобщенное решение $u_\nu(x)$ краевой задачи (5), (6) из пространства $\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ и справедлива оценка:

$$\|u_\nu\|_{H^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)} \le C_8\,\|f(x)\|_{L_{2,\mu}(\Omega)},$$

с положительной постоянной C_8, не зависящей от $u_\nu(x)$ и $f(x)$.

Следствие [6]. Если найдется хотя бы одно ν, при котом существует единственное R_ν-обобщенное решение задачи А, то всегда можно выделить полуинтервал $[\nu_1, \nu_2)$ такой, что при каждом $\nu \in [\nu_1, \nu_2)$ существует единственное R_ν-обобщенное решение. Здесь обозначено:

$$\nu_1 = \max\left\{\mu+\beta/2-1, \frac{1}{2\cdot\delta'}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2C_6\cdot C_7}-C_4}{2C_3}\right)+\varepsilon\right\},$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2\cdot\delta'}\cdot\left(\frac{\sqrt{2C_6\cdot C_7}-C_4}{2C_3}-1\right),$$

где: ε – фиксированное и достаточно малое положительное число.

Теорема 2 [7]. Если выполняются условия теоремы 1, то при всех ν из полуинтервала $[\nu_1, \nu_2)$ R_ν-обобщенное решение задачи А единственно.

Теорема 3 [7]. Пусть выполняются условия (1), (7)–(10), а также неравенства

$$\nu \ge \mu + \beta/2, \quad \nu + \beta/2 > 2.$$

Тогда R_ν-обобщенное решение $u_\nu(x)$ задачи Дирихле с согласованным вырождением исходных данных принадлежит пространству $H^2_{2,\alpha}(\Omega)$ и имеет место неравенство коэрцитивности:

$$\|u_\nu\|_{H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)} \le C_9 \|f(x)\|_{L_{2,\mu}(\Omega)}$$

с положительной постоянной C_9, независящей от $u_\nu(x)$ и $f(x)$.

Теорема 4 [8]. Пусть выполняются условия (1), (7)–(10) и при некотором фиксированном натуральном числе *k:*

$$a_{ls}(x) \in H^{k+1}_{\infty,-\beta}\left(\Omega, C_3'\right), \quad a_l(x) \in H^{k}_{\infty,-(\beta-1)}\left(\Omega, C_4'\right) (l,s=1,2),$$

$$a(x) \in H^{k}_{\infty,-(\beta-2)}\left(\Omega, C_5'\right), \quad f \in H^{k}_{2,\mu}(\Omega),$$

$$\nu \ge \mu + \beta/2, \quad \nu + \beta/2 > k+2.$$

Тогда R_ν-обобщенное решение $u_\nu(x)$ задачи Дирихле с согласованным вырождением исходных данных принадлежит пространству $H^{k+2}_{2,\alpha}(\Omega)$ и имеет место оценка:

$$\|u_\nu\|_{H^{k+2}_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)} \le C_{10} \|f(x)\|_{H^{k}_{2,\mu}(\Omega)}$$

с положительной постоянной C_{10}, независящей от $u_\nu(x)$ и $f(x)$.

Краевые задачи с несогласованным вырождением исходных данных. Рассмотрим в области Ω дифференциальное уравнение:

$$-\sum_{l=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(a_{ll}(x)\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) + a(x)u(x) = f(x) \qquad x \in \Omega \tag{11}$$

с граничным условием:

$$u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \tag{12}$$

Определение 3. Краевую задачу (11), (12) будем называть краевой задачей Дирихле с **несогласованным** вырождением исходных данных, или задачей Б, если коэффициенты уравнения для некоторого вещественного числа β подчиняются требованиям:

$$a_{ll}(x) \in H^1_{\infty,-\beta}(\Omega, C_{11}), \quad a(x) \in L_{\infty,-\beta}(\Omega, C_{12}), \tag{13}$$

$$\sum_{l=1}^{2} a_{ll}(x)\xi_l^2 \ge C_{13}\rho^\beta(x)\sum_{l=1}^{2}\xi_l^2, \quad a(x) \ge C_{14}\rho^\beta(x) \quad \text{почти всюду на } \Omega, \tag{14}$$

а правая часть уравнения для некоторого вещественного неотрицательного числа μ удовлетворяет условию:

$$f \in L_{2,\mu}(\Omega, \delta). \tag{15}$$

Здесь C_i $(i = 11,...,14)$ – положительные постоянные, независящие от x ; ξ_1, ξ_2 – любые вещественные параметры.

Введем билинейную и линейную формы:

$$b(u_\nu, v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{l=1}^{2} [a_{ll}(x)\rho^{2\nu}(x)\frac{\partial u_\nu(x)}{\partial x_l}\frac{\partial v(x)}{\partial x_l} + +a_{ll}(x)\frac{\partial \rho^{2\nu}(x)}{\partial x_l}\frac{\partial u_\nu(x)}{\partial x_l}v(x) +$$

$$+a(x)\rho^{2\nu}(x)u_\nu(x)v(x)]dx,$$

$$(f, v) = \int\limits_{\Omega} \rho^{2\nu}(x)f(x)v(x)dx.$$

Определение 4. Функция $u_\nu(x)$ из множества $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega,\delta)$ называется R_ν-обобщенным решением задачи Дирихле с **несогласованным** вырождением исходных данных, если для всех $v(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega,\delta)$ справедливо интегральное тождество $b(u_\nu, v) = l(v)$ при любом, но фиксированном значении ν, удовлетворяющем неравенству:

$$\nu \geq \mu + \beta / 2. \tag{16}$$

Заметим, что в определении 2 R_ν-обобщенного решения краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных все слагаемые билинейной формы $a(u, v)$, левой части интегрального тождества, одного порядка в каждой из окрестностей точек сингулярностей. Это обусловлено выполнением требования (7) на коэффициенты уравнения. Здесь для задачи (11)–(16), согласно условию (13), коэффициенты уравнения являются асимптотически равными, поэтому слагаемые билинейной формы $b(u, v)$ будут иметь разный порядок. Такого типа задачи называются краевыми задачами с несогласованным вырождением исходных данных, и они требуют особого подхода в изучении свойств R_ν-обобщенного решения. Это выражается в том, что решение ищется во множестве $W^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega,\delta)$, т. к. в пространстве $W^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ существует пучок R_ν-обобщенных решений в окрестностях точек сингулярностей [9], и только за счет подбора параметров ν и δ удается выделить из пучка единственное R_ν-обобщенное решение [10], исследовать его коэрцитивные и дифференциальные свойства [11, 12].

Кроме того, отметим, что введение R_ν-обобщенного решения для задач с несогласованным вырождением исходных данных позволяет строить эффективные численные методы не только для задач с сильной сингулярностью, у которых интеграл Дирихле от решения расходится, но и для краевых задач с «плохой» регулярностью решения, вызванной наличием угловых и конических точек на границе области.

Приведем основные теоремы.

Теорема 5 [10]. Пусть выполняются условия (1), (13)–(16) и постоянная C_{14} достаточно велика. Тогда найдется такой параметр ν^* ,что во множестве $W^1_{2,\nu^*+\beta/2}(\Omega,\delta)$ R_ν-обобщенное решение $u_{\nu^*}(x)$ задачи Дирихле с несогласованным вырождением исходных данных существует и единственно. При этом имеет место оценка:

$$\left\|u_{\nu^*}\right\|_{W^1_{2,\nu^*+\beta/2}(\Omega,\delta)} \le C_{15}\left\|f\right\|_{L_{2,\mu}(\Omega,\delta)},$$

где C_{15} – положительная постоянная, не зависящая от функций $u_{\nu^*}(x)$ и $f(x)$.

Теорема 6 [11]. Пусть выполняются условия теоремы 5 и неравенство:

$$\nu^*+\beta/2>2.$$

Тогда R_ν-обобщенное решение задачи Дирихле с несогласованным вырождением исходных данных принадлежит множеству $W^2_{2,\nu^*+\beta/2+1}(\Omega,\delta)$ и имеет место неравенство коэрцитивности:

$$\left\|u_{\nu^*}\right\|_{W^2_{2,\nu^*+\beta/2}(\Omega,\delta)} \le C_{16}\left\|f\right\|_{L_{2,\mu}(\Omega,\delta)},$$

с положительной постоянной C_{16}, независящей от функций $u_{\nu^*}(x)$ и $f(x)$.

Теорема 7 [12]. Пусть выполняются условия (1), (14):

$$a_{ll}\in H^{k+1}_{\infty,-\beta}\left(\Omega,C'_{11}\right),\quad a\in H^{k}_{\infty,-\beta}\left(\Omega,C'_{12}\right),\quad f\in W^k_{2,\mu}\left(\Omega,\delta\right),$$
$$\nu^*\ge\mu+\beta/2,\quad \nu^*+\beta/2>2,\quad \mu\ge k,$$

и постоянная C_{14} достаточно велика.

Тогда R_ν-обобщенное решение задачи Дирихле с несогласованным вырождением исходных данных принадлежит множеству $W^{k+2}_{2,\nu^*+\beta/2+k+1}(\Omega,\delta)$ и имеет место:

$$\left\|u_{\nu^*}\right\|_{W^{k+2}_{2,\nu^*+\beta/2+k+1}(\Omega,\delta)} \le C_{17}\left\|f\right\|_{W^k_{2,\mu}(\Omega,\delta)},$$

где: C_{17} – положительная постоянная, независящая от функций $u_{\nu^*}(x)$ и $f(x)$.

Численные методы. Для краевых задач с сингулярностью были созданы и исследованы численные методы: весовые разностные схемы [13, 3, 14], h – версия метода конечных элементов [6, 15, 16], p- и h-p версии МКЭ [17, 18].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10-01-00060, 11-01-98502-р_восток) Президиума ДВО РАН (проект № 09-II-СО-01-001).

Библиографические ссылки

1. *Assous F., Ciarlet P. Jr., Segré J.* Numerical Solution of the Time-Dependent Maxwell Equations in Two-Dimensional Singular Domain: The Singular Complement Method // J. Comp. Physics, 2000.

2. *Li H., Nistor V.* Analysis of a modified Schrödinger operator in 2D: Regularity, index, and FEM // J. of Comp. and Appl. Math. 2009.

3. *Rukavishnikov V. A.* On a weighted estimate of the rate of convergence of difference schemes // Sov. Math. Docl. 1986.

4. *Rukavishnikov V. A.* On differentiability properties of an R_ν – generalized solution of Dirichlet problem // Sov. Math. Docl. 1990. – No. 3.

5. *Rukavishnikov V. A.* The methods of numerical analysis for boundary value problem with strong singularity// Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2009. – № 6.

6. *Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova E. I.* The finite element method for the first boundary value problem with compatible degeneracy of the input data // Russ. Acad. Sci., Dokl. Math. 1995. – No. 2.

7. *Рукавишников В. А., Ереклинцев А. Г.* О коэрцитивности R_ν-обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // Дифференциальные уравнения–2005. – № 12.

8. *Rukavishnikov V. A.* On differential properties R_ν-generalized solution of the Dirichlet problem with coordinated degeneration of the input data // ISRN Mathematical Analysis, 2011.

9. *Rukavishnikov V. A.* The Dirichlet problem with incompatible degeneration of initial data // Russ. Acad. Sci., Dokl. Math. 1995. – № 1.

10. *Рукавишников В. А.* О единственности R_ν-обобщенного решения для краевых задач с несогласованным вырождением исходных данных // Доклады РАН. № 4. – 2001.

11. *Рукавишников В. А., Кузнецова Е. В.* Коэрцитивная оценка для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Дифференциальные уравнения–2007. – № 4.

12. *Рукавишников В. А. Кузнецова Е. В.* О принадлежности R_ν-обобщенного решения краевой задачи с сингулярностью пространству $W^{k+2}_{2,\nu+\beta/2+k+1}(\Omega,\delta)$ // Дифференциальные уравнения. – № 6. – 2009.

13. *Rukavishnikov V. A.* A coercive estimate of the rate of convergence of an approximate solution of the second boundary value problem // Sov. Math. Docl., 1983.

14. *Rukavishnikov V. A.* Study of difference schemes for Dirichlet's problem in Sobolev's weight space // Sib. J. Comput. Math., 1992. – № 3.

15. *Рукавишников В. А., Рукавишникова Е. И.* Об оценке погрешности метода конечных элементов для третьей краевой задачи с сингулярностью в пространстве $L^{*}_{2,\nu+\gamma}$ // Сибирский журнал вычислительной математики. – № 2. – Т. 7. – 2004.

16. *Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova H. I.* The Finite Element Method For Boundary Value Problem With Strong Singularity // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. – № 9.

17. *Rukavishnikov V. A., Kashuba E. V.* On the properties of an orthonormalized singular polynomial set // Сибирский журнал вычислительной математики. – № 2. – Т. 2. – 1999.

18. *Rukavishnikov V. A., Bespalov A. Yu.* On an h-p version of the finite element method for a one-dimensional boundary value problem with singularity of a solution // Сибирский журнал вычислительной математики. – № 2. – Т. 1. – 1998.