УДК 622:658.51

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ В УГОЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Ембулаев В. Н. – д-р экон. наук, проф. кафедры «Математика и моделирование», тел. (4232) 40-43-61 (Владивостокский государственный университет экономики и сервиса (ВГУЭС); *Тонких А. И.* – канд. экон. наук, доц. кафедры «Экономика и производственный менеджмент», тел. 8-914-664-36-45 (ДВГТУ)

В статье рассматривается и математически формализуется задача координации в двухуровневой системе при принятии управленческих решений на предприятиях угольной промышленности Дальнего Востока, состоящей из одного элемента на верхнем уровне и ряда элементов на нижнем уровне. Приводится общая схема процедуры координации в такой системе, и на ее основе показана возможность разработки безытеративных и итеративных алгоритмов координации.

The authors study and mathematically formalize the problem of coordination in two level system for management decisions at coalmining enterprises of the Russian Far East. This system consists of one element on the upper level and a number of elements on the lower level. A general scheme of the coordination procedure in such system is described, as well as the possibility of developing non-iterative and iterative algorithms for coordination on its basis is shown.

Ключевые слова: федеральные округа, Дальний Восток, угольная промышленность, управленческие решения, алгоритмы координации.

Введение

В России уголь потребляется во всех субъектах Федерации, а добывается в 24, которые расположены в семи федеральных округах. В угольной промышленности России действуют 213 угледобывающих предприятий (технических единиц), в том числе 94 шахты и 119 разрезов. Основные потребители угля на внутреннем рынке – это электростанции и коксохимические заводы.

Россия является одним из лидеров по производству угля. В ее недрах сосредоточена треть мировых ресурсов угля (173 млрд т) и пятая часть разведанных запасов. Запасы энергетических углей составляют около 80 %. Промышленные запасы действующих предприятий составляют почти 19 млрд т, в том числе коксующих углей – около 4 млрд т.

На территории Российской Федерации существуют следующие семь крупных угольных территориальных округов (в скобках указан удельный вес по добыче угля): Западно-Сибирский (60,5 %), Восточно-Сибирский (23,9 %), Дальневосточный (9,2 %), Северо-Западный (3,9 %), Южный (1,6 %), Уральский (0,8 %), Центральный (0,1 %). В каждом угольном территориальном округе существуют несколько субъектов Федерации, в которых имеются угольные месторождения. Так, например, в Дальневосточном федеральном округе почти во всех десяти субъектах Федерации имеются угольные месторождения (в скобках указан удельный вес по добыче угля): Республика Саха (52,3 %), Приморский край (21 %), Амурская область (17,3 %), Хабаровский край, Магаданская, Сахалинская, Камчатская области, Еврейская автономная область, Корякский и Чукотский автономные округа (добыча в них составляет от 1,2 до 1,4 %). А в каждом субъекте Федерации может находиться несколько угольных месторождений. Так, например, в Приморском крае имеются следующие угольные месторождения: Бикино-Уссурийский, Ханкайский, Угловский, Партизанский, Раздольненский. На каждом угольном месторождении, в свою очередь, может быть несколько шахт и разрезов. Так, например, на Раздольненском месторождении имеются следующие шахты и разрезы: Липовецкий, Ильичевский, Константиновский, Уссурийский и Алексее-Никольский [1].

При таком разделении угольной промышленности объект управления может быть представлен в виде следующей иерархической структуры. На самом верхнем (первом) уровне – федеральном – имеется единый государственный орган управления угольной промышленностью страны. На втором уровне – региональном – расположены соответствующие угольные территориальные округа. На третьем уровне – территориальном – можно разделить по субъектам федерации с наличием месторождения угля. И на четвертом – местном – деление происходит по угольным предприятиям, шахтам и разрезам.

Следовательно, иерархическую структуру объекта управления угледобывающей промышленности Российской Федерации можно представить в виде следующей четырехуровневой структуры (см. рис. 1).

Представленная на рис. 1 иерархическая структура характеризуется следующими признаками:

1. Многоуровневостью (стратифицированностью).

2. Субординацией внутренних связей: элементы данного уровня связаны только с элементами ближайшего нижнего уровня.

3. Ветвистостью: элемент данного уровня связан только с одним элементом верхнего уровня и с несколькими элементами нижнего уровня.

4. Пирамидальностью: на самом верхнем уровне имеется только один элемент.

5. Субординацией внешних связей: элементы каждого уровня могут иметь связи с внешней средой, однако эти связи контролируются элементами

ближайшего верхнего уровня; внешняя связь самого верхнего элемента контролируется извне системы.

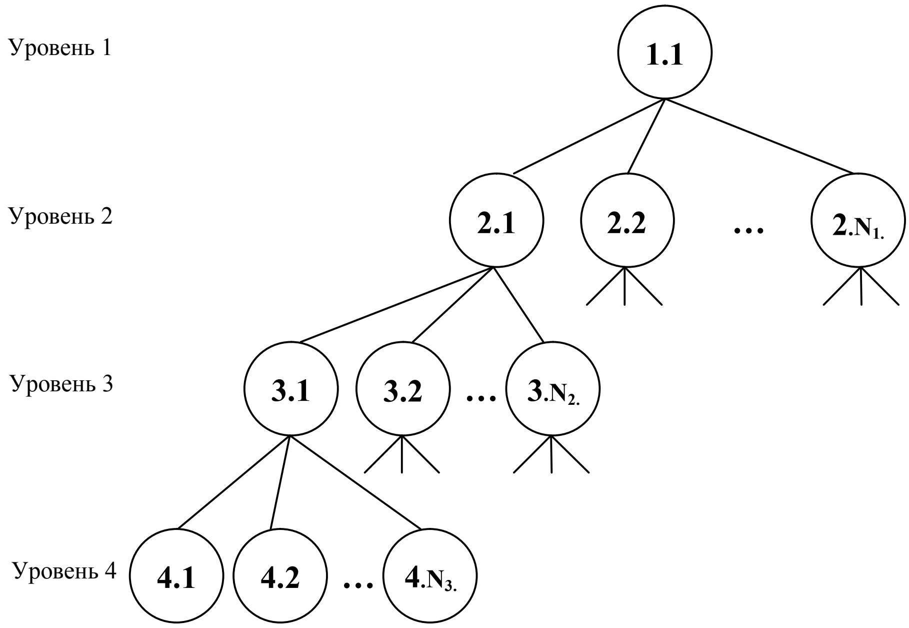

Рис. 1. Система с четырехуровневой пирамидальной структурой

Следовательно, рассматриваемая иерархическая структура относится к классу идеальных структур. Именно поэтому данную систему элементов можно рассматривать как состоящую из конечного числа элементарных двухуровневых подсистем, в которых на верхнем уровне (с первого по третий уровни) имеется всего один элемент, который связан с несколькими элементами на нижнем уровне. Например, как показано на рис. 1, можно рассматривать отдельную двухуровневую подсистему, состоящую из элемента (1.1) на верхнем уровне, а на нижнем из $N_{1.1}$ элементов – (2.1), (2.2), …, (2. $\mathrm{N}_{1.1}$); или из элемента (2.1) на верхнем уровне, а на нижнем из $\mathrm{N}_{2.1}$ элементов – (3.1), (3.2), …, (3, $\mathrm{N}_{2.1}$); или из элемента (3.1) на верхнем уровне, а на нижнем из $\mathrm{N}_{3.1}$ элементов – (4.1), (4.2), …, (4. $N_{3.1}$), и т. д.

Таким образом, система угольной промышленности относится к классу систем, которые принято называть большими, организационными, и она представляет собой иерархическую многоуровневую систему, в которой общая задача управления разделяется на ряд локальных (двухуровневых) подзадач, решаемых различными угольными предприятиями [2]. В этом случае появляется задача координации в двухуровневой системе, состоящей из одного элемента на верхнем уровне и ряда элементов на нижнем уровне.

Математическое описание задачи координации в двухуровневой системе

Математическая постановка задачи координации в двухуровневой системе, состоящей из одного элемента на верхнем уровне и N элементов на нижнем уровне, осуществлена следующим образом. Пусть состояние i-го элемента ($i \in [1,\ N]$) характеризуется вектором x_i, который удовлетворяет локальным ограничениям:

$$x_i \in X_i \subset E^{n_i}, \tag{1}$$

где: X_i – множество в n_i-мерном евклидовом пространстве. Особенностью иерархических систем является то, что в процессе управления элемент верхнего уровня интересуют не сами переменные x_i, а некоторые показатели работы элементов нижнего уровня, которые, в свою очередь, являются функциями переменных x_i. Обозначим вектор показателей i-го элемента нижнего уровня через:

$$F_i(x_i) = (f_{i1}(x_i),\ \dots, f_{im_i}(x_i)),\quad i \in [1,\ N]. \tag{2}$$

Локальные интересы каждого i-го элемента нижнего уровня задаются векторным критерием $\Phi_i(x_i) = (\varphi_{i1}(x_i),\ \dots, \varphi_{ik_i}(x_i))$. Для определенности будем считать, что все элементы нижнего уровня заинтересованы в увеличении значений всех критериев $\varphi_{ik}(x_i),\ k \in [1,\ K_i]$.

Подчеркнем, что в большинстве случаев число показателей m_i и число критериев k_i намного меньше размерности вектора x_i.

Состояние элемента верхнего уровня характеризуется вектором F_0, компонентами которого являются показатели всех элементов нижнего уровня:

$$F_0 = (F_1,\ \dots, F_N),$$

где: $F_i = F_i(x_i)$. (3)

Вектор F_0 удовлетворяет глобальным ограничениям:

$$F_0 \in X_0 \subset E^{m_0}, \text{ где } m_0 = \sum_{i=1}^{N} m_i. \tag{4}$$

Множество X_0 задается системой ограничений:

$$X_0 = \langle F_0 \,/\, H(F_0) \ge b \rangle, \tag{5}$$

где: функция H – некоторая вектор-функция, $b = (b_1, \ldots, b_M)$ – вектор-столбец. Задача элемента верхнего уровня заключается в максимизации векторного критерия:

$$\Phi_0(F_0) = (\varphi_{01}(F_0), \ldots, \varphi_{0k_0}(F_0)) \to \max .$$

Отметим, что процесс координации с использованием ЭВМ происходит, как правило, при участии лица, принимающего решение, которое достигается за счет максимизации так называемой функции полезности, задаваемой и конструируемой на множестве показателей F_0. И так как в работе основное внимание уделяется рассмотрению проблемы взаимодействия и согласования целей между элементом верхнего уровня и различными элементами нижнего уровня, то в данном случае поиск функции полезности не является главной задачей, и поэтому будем считать ее уже заданной:

$$\overline{H}_0(\Phi_0(F_0)) = H_0(F_0) \to \max . \qquad (6)$$

Итак, задача координации состоит в решении задачи (1)–(6). При этом оптимальное решение определяется в такой последовательности. На первом этапе элементы нижнего уровня решают локальные задачи векторной оптимизации: $\Phi_i(x_i) = (\varphi_{i1}(x_i), \ldots, \varphi_{ik_i}(x_i)) \to \max; \; x_i \in X_i$. В результате решения этих задач определяются множества эффективных точек (или множества Парето). На втором этапе решается задача элемента верхнего уровня: $H_0(F_1, \ldots, F_N) \to \max; \; H(F_1, \ldots, F_N) \ge b$, в результате чего определяются оптимальные значения критериев для каждого элемента нижнего уровня $F^* = (F_1^*, \ldots, F_N^*)$. Вектор F_i^* передается i-му элементу нижнего уровня, который детализирует свои планы, решая на третьем этапе следующую задачу векторной оптимизации: $F_i(x_i^*) = F_i^*; \; x_i^* \in X_i$. В результате решения этой задачи определяются локальные переменные x_i^*. Если окажется, что система ограничений имеет неединственное решение, то выбор производится, исходя из каких-либо локальных интересов элемента нижнего уровня.

Практическая реализация задачи координации (1)–(6), как и любой математической задачи, предусматривает решение следующих двух подзадач: отыскать метод решения и создать информационную базу для ее решения.

Поиск методов решения задачи координации

При анализе и описании информационного взаимодействия в двухуровневой системе, состоящей из одного элемента на верхнем уровне и ряда элементов на нижнем уровне, было отмечено, что множество допустимых значений показателей F_i (следовательно, и множество эффективных показателей задачи векторной оптимизации) состоит из конечного числа точек. В этом случае трудности могут быть связаны лишь с большим числом эффективных точек и необходимостью сжатия информации, передаваемой элементу на верхнем уровне.

Однако часто множество эффективных значений показателей F_i имеет весьма сложную структуру. Поэтому возникает вопрос о том, каким должно быть передаваемое элементу на верхнем уровне описание этого множества. И в таких случаях требуются специальные способы «сжатия» информации, позволяющие получить приближенное удовлетворительное решение.

В работах [3] приводится алгоритм «просеивания», который позволяет «сжимать» информацию. Идея алгоритма весьма проста и заключается в следующем: если при сравнении двух точек x_p и x_q по векторному критерию $\Phi(x_j)$ окажется, что $\Phi(x_p) \geq \Phi(x_q)$, то точка x_q является неэффективной и может быть исключена из дальнейшего рассмотрения. Этот алгоритм и различные его модификации названы алгоритмами «просеивания» (или «сжатия») потому, что по ходу работы алгоритма формируется множество «отсеянных» неэффективных точек.

Как следует из поиска оптимального значения задачи (1)-(6), координирующей задачей является следующая задача математического программирования:

$$H_0(F_1, ..., F_N) \to \max; \; H_m(F_1, ..., F_N) \geq b_m, \; m \in [1, M];$$
$$F_i \in Q_i^F, \; i \in [1, N]. \tag{7}$$

Здесь Q_i^F – множества значений показателей элементов на нижнем уровне, определенные при решении локальных задач векторной оптимизации.

Множества Q_i^F чаще всего задаются двумя способами. В первом случае множества Q_i^F состоят из конечного числа точек: $Q_i^F = \langle F_{it}, t \in [1, T] \rangle$. Этот случай имеет место при конечном числе допустимых альтернатив у элементов нижнего уровня, а также при аппроксимации эффективного множества элементов нижнего уровня конечной ε-сетью. При этом, как следует из выражения (7), координирующая задача является задачей целочисленного программирования. Если, кроме того, множества H_m, $m \in [0, \; M]$ являются линейными, т. е.:

$$H_m = \sum_{i=1}^{N} \langle a_{mi}, F_i \rangle, \tag{8}$$

то координирующая задача является задачей целочисленного линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} z_{0it}\lambda_{it} \to \max; \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} z_{mit}\lambda_{it} \ge b_m, m \in [1, M];$$

$$\sum_{t=1}^{T_i}\lambda_{it} = 1, i \in [1, N], \tag{9}$$

где: $\lambda_{it} \in \{0;1\}$ и $z_{mit} = \langle a_{mi}, F_{it}\rangle$.

Под конечной ε-сетью эффективного множества в пространстве переменных для задачи $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)) \to \max; \quad x \in X$ понимается конечное множество $P_\varepsilon^X = \{x_i \in X_i, i \in [1, N]\}$, такое, что:

а) для любого $x \in X$ существует такая точка $x_i \in P_\varepsilon^X$, что $\Phi_i = \Phi(x_i) \ge \Phi(x) - \varepsilon I$, где I – вектор, все компоненты которого равны единице;

б) для любого $x_i \in P_\varepsilon^X$ не существует другого $x_j \in P_\varepsilon^X$ такого, что $\Phi(x_j) \ge \Phi(x_i)$.

В работах [4] подробно рассматривается метод определения конечной ε-сети множества P^X.

Во втором случае множества Q_i^F представляют собой многогранники, задаваемые своими крайними точками:

$$Q_i^F = \langle F_i / F_i = \sum_{t=1}^{T_i}\lambda_{it}F_{it}, \lambda_{it} \in \Lambda_{T_i}\rangle.$$

Если в выражении (7) функции $H_m, m \in [0, M]$ по-прежнему являются линейными и задаются соотношениями (8), то координирующей задачей является задача линейного программирования (9) при условии $\lambda_{it} \ge 0$.

Итак, элементы нижнего уровня могут передавать элементу на верхнем уровне показатели своей работы либо в виде конечного числа значений, либо в виде области допустимых значений, ограниченных крайними точками (вершинами многогранника). При этом показано, что, если множества значений показателей работы элементов нижнего уровня F_0, определяемые при решении локальных задач векторной оптимизации, состоят из конечного числа точек, то в этом случае координирующая задача является задачей целочисленного программирования. Если, кроме того, функции $H(F_0)$ являются линейными, то координирующая задача является задачей целочисленного линейного программирования. А если множества F_0 представляют собой многогранники, задаваемые своими крайними точками, и если при этом функции $H(F_0)$ по-прежнему являются линейными, то координирующей задачей является задача линейного программирования.

А для перечисленных классов задач имеется довольно много эффективных методов их решения, например, метод Гомори, метод ввода множителей Лагранжа, симплекс-метод и его различные модификации, алгоритмы Данцига-Вульфа, Корнаи-Липтака и др. [5].

Пример. Рассмотрим двухуровневую иерархическую систему, состоящую из одного элемента на верхнем уровне и двух элементов на нижнем уровне. Предположим, что первый элемент нижнего уровня передал элементу на верхнем уровне набор возможных вариантов своей работы, допустимых с точки зрения локальных ограничений и наиболее полно отражающих свои возможности, в виде следующего множества эффективных значений: для x_1 в виде допустимой области от 1 до 3 ($1 \le x_1 \le 3$) и для x_2 в виде допустимой области от 1 до 3 ($1 \le x_2 \le 3$). Второй элемент на нижнем уровне передал элементу на верхнем уровне следующее множество эффективных значений: для y_1 в виде допустимой области от 2 до 4 ($2 \le y_1 \le 4$) и для y_2 в виде допустимой области от 2 до 3 ($2 \le y_2 \le 3$).

При этом целевая функция элемента на верхнем уровне описана выражением:

$$x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 \to \max$$

со следующими глобальными ограничениями:

$$2x_1 + x_2 + y_1 + 5y_2 \ge 23;$$

локальное допустимое множество ограничений первого элемента на нижнем уровне представлено в виде следующей системы ограничений:

$$x_1 + x_2 \le 4, \quad -x_1 + x_2 \le 2, \quad x_1 - 2x_2 \le 1;$$

локальное допустимое множество ограничений второго элемента на нижнем уровне соответственно:

$$-y_1 + 2y_2 \le 4, \quad y_1 + 2y_2 \le 8, \quad 2y_1 + y_2 \le 10,$$

причем $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0$.

Следовательно, рассматривается некоторая линейная задача. С учетом обозначений при математической формализации описания задачи координации (1)–(6) имеем, что векторным критерием первого элемента на нижнем уровне является вектор $F_1 = (f_{11}, f_{12})$, где $f_{11} = x_1 + 2x_2$, $f_{12} = 2x_1 + x_2$; а векторным критерием второго элемента на нижнем уровне является вектор $F_2=(f_{21},f_{22})$, где $f_{21}=y_1+y_2$, $f_{22}=y_1+5y_2$. В соответствии со схемой безытеративных алгоритмов, для элементов на нижнем уровне определяются эффективные крайние точки задач $F_1(x)\to\max$ при соблюдении локального допустимого множества ограничений для первого элемента на нижнем уровне и $F_2(y)\to\max$ при соблюдении локального допустимого множества ограничений для второго элемента на нижнем уровне.

Рассмотрим задачу $F_1(x)\to\max$ с учетом локальных ограничений для переменных x_1 и x_2. Используя многокритериальный симплекс-метод, при решении данной задачи получаем, что эффективными крайними точками являются: $x^1=(3;1)$ и $x^2=(1;3)$.

Аналогично и для задачи $F_2(y)\to\max$ с учетом локальных ограничений для переменных y_1 и y_2 определяются следующие эффективные крайние точки: $y^1=(4;2)$ и $y^2=(2;3)$.

И тогда задача элемента на верхнем уровне приобретает вид:

$[3\lambda_1+1(1-\lambda_1)]+2[1\lambda_1+3(1-\lambda_1)]+[4\lambda_2+2(1-\lambda_2)]+[2\lambda_2+3(1-\lambda_2)]\to\max$;

со следующими ограничениями:

$2[3\lambda_1+1(1-\lambda_1)]+[1\lambda_1+3(1-\lambda_1)]+[4\lambda_2+2(1-\lambda_2)]+5[2\lambda_2+3(1-\lambda_2)]\ge 23$,

причем $0\le\lambda_1\le 1$, $0\le\lambda_2\le 1$.

Решая задачу элемента на верхнем уровне, находим, что $\lambda_1=1/2$ и $\lambda_2=0$; и далее, что $x_1=2$, $x_2=2$; $y_1=2$, $y_2=3$.

Следовательно, для первого элемента на нижнем уровне эффективными крайними точками являются значения: $x^1=(3;1)$ и $x^2=(1;3)$, а для второго элемента на нижнем уровне – $y^1=(4;2)$ и $y^2=(2;3)$. Элемент на верхнем уровне определил варианты $x_1=2$, $x_2=2$; $y_1=2$, $y_2=3$, которые являются оптимальными для двух совместно функционирующих элементов на нижнем уровне.

Заключение

В статье рассматривается и математически формализуется задача координации в двухуровневой системе, состоящей из одного элемента на верхнем уровне и ряда элементов на нижнем уровне, которые взаимодействуют друг с другом только через элемент верхнего уровня. Приводится общая схема процедуры координации в такой системе, и на ее основе показана возможность разработки безытеративных и итеративных алгоритмов координации.

В безытеративных алгоритмах осуществляется однократный обмен информацией между уровнями: элементы на нижнем уровне передают элементу на верхнем уровне набор возможных вариантов своей работы, допустимых с точки зрения локальных ограничений и достаточно полно отражающих возможности элементов на нижнем уровне, а элемент на верхнем уровне определяет варианты, оптимальные для всех элементов на нижнем уровне, и сообщает их им. В итеративных алгоритмах координации оптимальное решение определяется в ходе многократного обмена информацией между элементом на верхнем уровне и элементами на нижнем уровне.

В рассматриваемом примере предполагается, что взаимосвязь между элементами нижнего уровня осуществляется через указанные ограничения и целевую функцию, в которые входят показатели, передаваемые элементами на нижнем уровне элементу на верхнем уровне. В результате решения задачи координации определены значения для каждого элемента на нижнем уровне, которые являются оптимальными для всей системы в целом.

Библиографические ссылки

1. *Ембулаев В. Н., Тонких А. И.* Совершенствование управления предприятиями угольной промышленности в целях повышения конкурентоспособности: Монография. – Владивосток: Изд-во «Дальнаука», 2010.

2. *Ембулаев В. Н.* Теоретические основы и методы управления транспортной системой крупного города: Монография. – Владивосток: Изд-во «Дальнаука», 2004.

3. *Гафт М. Г., Озерной В. М.* Выделение множества неподчиненных решений и их оценок в задачах принятия решений при векторном критерии // АиТ, 1973. – № 11.

4. *Евтушенко Ю. Г., Потапов М. А*. Поиск глобальных решений // Методы решения задач оперативного управления. – М.: ВНИИПОУ, 1984.

5. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – М: Высш. шк., 1993.