



УДК 537.29:539.14

© В. И. Крылов, 2011

## НЕЛИНЕЙНОЕ ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ВОДОРОДОПОДОБНОГО АТОМА В ОДНОРОДНОМ МОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Крылов В. И. – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой «Физика», тел. 42-07-48, e-mail: krylov\_vladimir@mail.ru (ДВГТУ)

Предложена методика нахождения волновой функции электрона в кулоновом и монохроматическом полях с параметрами, не позволяющими использовать общепринятую квантовомеханическую теорию возмущений. Показано, что индуцированное вторичное электромагнитное поле, излучаемое водородоподобным атомом, как функция времени, заметно отличается от монохроматического.

The technique of finding the electron wave function in Coulomb and monochromatic fields is proposed when the standard perturbation theory cannot be used. It is shown that the induced secondary electromagnetic field radiated by a hydrogen like atom as a function of time differs noticeably from monochromatic.

*Ключевые слова:* атом в монохроматическом поле, волновая функция, плотность тока электрона во внешнем поле, индуцированное излучение.

### Введение

Появление квантовых генераторов, создающих интенсивное электромагнитное поле, стимулировало большое число работ, в которых экспериментально и теоретически исследовалось взаимодействие такого излучения с веществом (см., например, [1], [2], обзоры [3] – [6] и литературу там же). В подавляющем большинстве работ, однако, использовался метод численного моделирования, поскольку в рассматриваемых в них областях параметров – частоты  $\omega$  и амплитуды  $\tilde{\mathcal{E}}$  внешнего электромагнитного поля с напряженностью:

$$\tilde{\mathcal{E}} \cos(\omega \tilde{t} - \alpha) \quad (1)$$

пока не удавалось аналитически решить задачу из-за невозможности применения стандартной квантовомеханической теории возмущений.

В интересующей нас области параметров частота поля  $\omega$  и его амплитуда  $\tilde{\mathcal{E}}$  значительно меньше частот перехода электрона в атоме  $Ze^2 / a\hbar$  и на-



пряженности атомного поля  $Z|e|/a^2$  ( $a = \hbar^2/(Ze^2m_e)$ ;  $e$  и  $m_e$  – заряд и масса электрона).

В то же время энергия  $|e|\tilde{\varepsilon}\ell$ , которую атомный электрон приобретает в поле волны ( $\ell$  – среднее расстояние, пройденное им вдоль поля), сравнима с его потенциальной энергией в кулоновом поле ядра. Это и не позволяет использовать стандартную теорию возмущений. Отметим, что при этом вероятность туннельного ухода электрона из атома все еще мала. В работе [7] была сделана попытка, не прибегая к методам теории возмущений, найти приближенные аналитические выражения напряженности электромагнитного поля, индуцированного электроном в атоме водорода, находящемся во внешнем электрическом поле с напряженностью, определяемой формулой (1) и параметрами  $\omega, \tilde{\varepsilon}$ , значения которых лежат в вышеуказанных областях (с численными значениями  $\omega \sim 2 \cdot 10^{14} \div 2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ;  $\tilde{\varepsilon} \sim 10^5 \div 10^6 \text{ СГСЭ}$ ). Считалось, что ядро водородоподобного атома (бесконечно большой массы) с зарядом  $Z|e|$  находится в начале декартовой системы координат  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ , а ось  $\tilde{z}$  направлена параллельно напряженности внешнего поля (1). Так как внешнее поле интенсивно, то его взаимодействие с атомным электроном в уравнении Шредингера можно описывать в виде потенциальной энергии  $U = -|e|\tilde{z}\tilde{\varepsilon} \cos(\omega\tilde{t} - \alpha)$ . Тогда, в безразмерных сферических координатах

$\frac{\tilde{x}}{a} = x = r \sin \theta \cos \varphi$ ;  $\frac{\tilde{y}}{a} = y = r \sin \theta \sin \varphi$ ;  $\frac{\tilde{z}}{a} = z = r \cos \theta$  (с безразмерными параметрами  $\varepsilon = (a^2/(Z|e|))\tilde{\varepsilon}$ ;  $t = \tilde{t}/\gamma$ ;  $\gamma = 2\hbar^3/(Z^2e^4m_e)$  – удвоенный атомный масштаб времени;  $\Omega = \gamma\omega$ ), уравнение Шредингера для волновой функции:

$$\tilde{\psi}(r, \theta, \varphi, t) = \psi_\lambda(r, \theta) T_\lambda(r, \theta, t) e^{-i\lambda t} e^{im\varphi} \quad (2)$$

распадается на два уравнения (подробнее см. [7]) – для  $\psi_\lambda$ , совпадающего со стационарным уравнением Шредингера водородоподобного атома, и для  $T_\lambda$ , которое при  $\psi_\lambda = (1/\sqrt{\pi})e^{-r}$ ,  $\lambda = -1$  и  $m = 0$  имеет вид:

$$i \frac{\partial T_\lambda}{\partial t} = -\Delta T_\lambda + 2 \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial T_\lambda}{\partial \vec{r}} - 2z\varepsilon T_\lambda(\vec{r}, t) \cos(\Omega t - \alpha). \quad (3)$$

В [7] была найдена асимптота уравнения (3):

$$T_\lambda = T_{0\lambda} \exp \left\{ i \left[ \frac{2\varepsilon z}{\Omega} \sin \tau - \frac{2\varepsilon^2}{\Omega^3} \left( \tau - \frac{1}{2} \sin 2\tau \right) \right] - \frac{4k\varepsilon}{\Omega^2} \cos \tau \right\} \quad (4)$$

при больших (по модулю) значениях  $z$ :  $|z| \gg 1$ , в то время как  $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$  – поперечное расстояние от ядра до электрона будет достаточно мало:  $r_\perp \lesssim 1$ , где  $k=1$ , если  $z > b$  и  $k = -1$ , если  $z < -b$ ;  $b \sim 10$  (для краткости введено обозначение  $\tau = \Omega t - \alpha$ ).

Тогда в соответствии с (2) асимптота волновой функции принимает вид:



$$\tilde{\Psi} = \frac{A}{\sqrt{\pi a^3}} \exp \left\{ i \left[ \frac{2\varepsilon z}{\Omega} \sin \tau - \frac{2\varepsilon^2}{\Omega^3} \left( \tau - \frac{1}{2} \sin 2\tau \right) - \lambda t \right] - \frac{4k\varepsilon}{\Omega^2} \cos \tau - r \right\}, \quad (5)$$

$A$  – нормировочная постоянная, которая не могла быть определена в [7].

Используя волновую функцию (5), в [7] были получены относительные (из-за невозможности определения  $A$ ), индуцированные плотности тока различных гармоник атомного электрона.

Продолжением [7] является настоящая работа, цель которой заключается в более точном определении волновой функции и значения величины индуцированного поля атомного электрона.

### Определение волновой функции электрона водородоподобного атома, находящегося в монохроматическом внешнем поле с параметрами, не позволяющими использовать теорию возмущений

Основная идея настоящей работы основана на вышеизложенном, и заключается в том, чтобы рассматривать величину  $k$ , как функцию, зависящую от  $t$  и сферических координат  $r, \theta : k = k(r, \theta, t)$ , удовлетворяющую граничным условиям:

$$k(\infty, 0, t) = 1, \quad k(\infty, \pi, t) = -1. \quad (6)$$

Кроме того, волновая функция (6) с переопределенной функцией  $k$  и  $z = r \cos \theta$  должна строго удовлетворять условию нормировки:

$$1 = a^3 \iiint |\tilde{\Psi}|^2 dx dy dz. \quad (7)$$

Вводя новую функцию  $\tilde{k}(r, \theta, \tau) = k(r, \theta, \tau) \cos \tau$  и подставляя (4) в (3), получим следующее уравнение для величины  $\tilde{k}$ :

$$i\mu \left[ \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tau} + \cos \theta \sin \tau \right] = \left( \frac{\partial \tilde{k}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \theta} \right)^2 - i\Omega \left[ \frac{\partial \tilde{k}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \theta} \right] \sin \tau - \frac{\mu}{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{k}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial \tilde{k}}{\partial r} \right], \quad (8)$$

где:  $\mu = \Omega^3 / 4\varepsilon$ . Уравнение (8) – нелинейное уравнение в частных производных, казалось бы, значительно сложнее уравнения (3), однако в (8) имеется иерархия малых параметров, позволяющих применить для отыскания  $\tilde{k}$  метод последовательных приближений, и, кроме того, для функции  $\tilde{k}$  известны граничные условия.

В случае, если  $\omega \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ c}^{-1}$ ,  $\tilde{\varepsilon} \sim 3 \cdot 10^5 \text{ ГГСЭ}$ , то:  $\Omega \approx \frac{1}{Z^2} 10^{-2}$ ;  $\varepsilon \approx \frac{1,6}{Z^3} 10^{-2}$ ;

$\Omega^2 / \varepsilon \approx 10^{-2} / Z$ ;  $\Omega^3 / \varepsilon \approx 10^{-4} / Z$ , что позволяет искать  $\tilde{k}$  в виде ряда:

$$\tilde{k} = \tilde{k}_0 + \tilde{k}_1 + \dots + \tilde{k}_n + \dots \quad (9)$$

Уравнение нулевого приближения для величины  $\tilde{k}_0$ , очевидно, имеет вид:

$$\left(\frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial \theta}\right)^2 = 0 \quad (10)$$

и распадается на два линейных уравнения:

$$\left(\frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial r}\right) \pm \frac{i}{r} \left(\frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial \theta}\right) = 0. \quad (11)$$

Нетрудно найти общее решение этих уравнений:

$$\tilde{k}_{0\pm} = k_0(\eta_{\pm}) \cos \tau + f_0(\tau), \quad (12)$$

где:  $\eta_{\pm} = re^{\pm i\theta}$  – первые интегралы дифференциальных уравнений:

$$dr = \pm \frac{rd\theta}{i} \quad (13)$$

для характеристик уравнения (11).

Действительная часть функции  $k_0$  должна удовлетворять граничным условиям (6), а функция  $f_0(\tau)$  определяется из условий нормировки (7).

Уже на этом этапе вычислений видно, что функция  $\tilde{k}_{0\pm}$  должна содержать как действительную, так и мнимую части, и, поэтому, даст вклад в плотность индуцированного тока (в [7]  $k$  считалась действительной).

Для определения  $\tilde{k}_1$  линеаризуем (8), подставляя в него  $\tilde{k} = \tilde{k}_0 + \tilde{k}_1$ , что дает (в дальнейшем для краткости опускаем индекс  $\pm$  у  $\tilde{k}_0$ ):

$$i\mu[-k_0(\eta_{\pm})\sin \tau + \frac{\partial f_0}{\partial \tau} + \cos \theta \sin \tau] = 2 \left( \frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial r} \frac{\partial \tilde{k}_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{k}_1}{\partial \theta} \right) - \quad (14)$$

$$- i\Omega \mathcal{E}_1 \tilde{k}_0 \sin \tau - \frac{\mu}{\Omega} \mathcal{E}_2 \tilde{k}_0,$$

где введены обозначения для линейных операторов:  $\hat{L}_1 = \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ ;

$$\hat{L}_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial}{\partial r}.$$

Нетрудно заметить из (14), что  $\hat{k}_1$  определяется с точностью до произвольной функции  $f_1$  только одной переменной  $\tau$ :  $f_1 = f_1(\tau)$ , которую можно использовать для обеспечения условия нормировки (7).

Для определения  $\tilde{k}$  с точностью до величин второго порядка малости получаем следующее уравнение:



$$i\mu \frac{\partial \tilde{k}_1}{\partial \tau} = 2 \left( \frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial r} \frac{\partial \tilde{k}_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{k}_2}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{\partial \tilde{k}_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \tilde{k}_1}{\partial \theta} \right)^2 - \quad (15)$$

$$- i\Omega \hat{L}_1 \tilde{k}_1 \sin \tau - \left( \frac{\mu}{\Omega} \right) \hat{L}_2 \tilde{k}_1.$$

Отметим, что выражение  $i\mu \cos \theta \sin \tau$  входит только в уравнение для  $\tilde{k}_1$  (если считать  $\mu$  величиной первого порядка малости).

Из этих выражений легко заметить закономерность, позволяющую записать уравнение для  $n$ -й поправки. Действительно, замечая, что сумма  $\sum_{l=0}^n \left( \frac{\partial \tilde{k}_l}{\partial r} \frac{\partial \tilde{k}_{n-l}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{k}_l}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{k}_{n-l}}{\partial \theta} \right)$  совпадает с нелинейными слагаемыми уравнений (14) – (15), а в линейные выражения будут входить только  $\tilde{k}_{n-1}$ , получим следующее уравнение для  $\tilde{k}_n$  ( $n > 1$ ):

$$i\mu \frac{\partial \tilde{k}_{n-1}}{\partial \tau} = 2 \left( \frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial r} \frac{\partial \tilde{k}_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{k}_n}{\partial \theta} \right) + \quad (16)$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \tilde{k}_l}{\partial r} \frac{\partial \tilde{k}_{n-l}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{k}_l}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{k}_{n-l}}{\partial \theta} \right) - i\Omega \hat{L}_1 \tilde{k}_{n-1} \sin \tau - \frac{\mu}{\Omega} \hat{L}_2 \tilde{k}_{n-1}.$$

Уравнения для любой  $\tilde{k}_n$  не содержат производные по времени от  $\tilde{k}_n$  и не содержат саму функцию  $\tilde{k}_n$ . Из этого следует, что во всех уравнениях время является параметром, а  $\tilde{k}_n$  определяется с точностью (как уже отмечалось) до произвольной функции  $f_n(\tau)$ , что позволяет для любой поправки добиться выполнения условия нормировки на единицу волновой функции.

Нетрудно написать систему обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик уравнений (16). Одно из таких уравнений будет иметь вид:

$$dr / \frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial r} = rd\theta / \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial \theta}, \quad (17)$$

первый интеграл которого совпадает с  $\eta_{\pm}$ . Используя  $\eta_{\pm}$ , можно избавиться от угла  $\theta$  в системе уравнений для характеристик (16):

$$dr / \frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial r} = rd\theta / \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{k}_0}{\partial \theta} = \frac{d\tilde{k}_n}{B}, \quad (18)$$

где:

$$B = \frac{1}{2} \left[ i\mu \frac{\partial \tilde{k}_{n-1}}{\partial \tau} + i\Omega \hat{L}_1 \tilde{k}_{n-1} \sin \tau + \frac{\mu}{\Omega} \hat{L}_2 \tilde{k}_{n-1} - \sum_{l=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \tilde{k}_l}{\partial r} \frac{\partial \tilde{k}_{n-l}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{k}_l}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{k}_{n-l}}{\partial \theta} \right) \right].$$

Проинтегрировав уравнение из правой и левой частей (18), найдем еще один первый интеграл этой системы:

$$\tilde{k}_n - \int \frac{B}{\partial \tilde{k}_0 / \partial r} dr = \text{const.} \quad (19)$$

Тогда общее решение уравнения (16) будет иметь вид:

$$\tilde{k}_n = \int \frac{B}{\partial \tilde{k}_0 / \partial r} dr + \Phi_n(\eta_{\pm}) + f_n(\tau), \quad (20)$$

где:  $\Phi_n(\eta_{\pm})$ , вообще говоря, произвольная функция  $\eta_{\pm}$ , а  $f_n(\tau)$  определяется из условия нормировки (7). Однозначность решения должны обеспечить нулевые значения  $\tilde{k}_n$  при  $\theta = 0, \pi$  и  $r = \infty$  для всех  $n$ , начиная с единицы, так как  $\tilde{k}_0$  уже удовлетворяет граничным условиям (6).

### Индукцированное электромагнитное поле атома водорода в дипольном приближении в волновой зоне

Ограничимся решением задачи в нулевом приближении. Потребуем, чтобы условиям (7) удовлетворяла функция  $k_0(\eta_{\pm})$ , тогда как все остальные  $k_n$  будут равны нулю при тех же значениях  $r$  и  $\theta$ .

Учитывая, что при  $\theta = 0, \pi$  величина  $\eta_{\pm}$  становится действительной, то и для комплексной  $\eta_{\pm}$  мы положим:

$$k_0(\eta_{\pm}) = \frac{2}{\pi} \arctg(re^{\pm i\theta}) \quad (21)$$

Для дальнейших расчетов выражение (21) необходимо записать в «явном» виде, т. е. выделить действительную и мнимую часть арктангенса от комплексного аргумента. Используя известные определения элементарных функций от комплексного аргумента (см., например, [8]), получим:

$$k_0(re^{\pm i\theta}) = \frac{1}{\pi} \text{Arctg} \frac{2r \cos \theta}{1-r^2} - \frac{i}{\pi} \ln \frac{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4r^2 \cos^2 \theta}}{1+r^2 \pm 2r \sin \theta}; \quad (22)$$

причем:

$$\text{Arctg} \frac{2r \cos \theta}{1-r^2} = \begin{cases} \arctg \frac{2r \cos \theta}{1-r^2}, & \text{если } r \leq 1; 0 \leq \theta \leq \pi \\ \arctg \frac{2r \cos \theta}{1-r^2} - \pi, & \text{если } r \geq 1; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi; r > 1 \\ \arctg \frac{2r \cos \theta}{1-r^2} + \pi, & \text{если } r \geq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; r > 1 \end{cases}$$

Легко проверить, что определенная таким образом  $k_0$  действительно при  $r = \infty$  и  $\theta = 0$  и  $\pi$  принимает значения 1 и (-1).



Выражение для  $f_0(\tau)$  можно получить из (7), заменяя в нем  $A$  на  $\exp\left\{-\frac{4\varepsilon}{\Omega^2} f_0(\tau)\right\}$ . В результате имеем:

$$f_0 = \frac{\Omega^2}{8\varepsilon} \ln 2 \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left\{-2r - \frac{8\varepsilon}{\Omega^2} \operatorname{Re} k_0 \cos \tau\right\} r^2 dr \sin \theta d\theta. \quad (23)$$

К сожалению, взять аналитически этот интеграл с  $k_0$  из (22) чрезвычайно сложно.

Подставляя в выражение для плотности тока:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar e}{2m_e} [\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi] \quad (24)$$

волновую функцию (5) с выражениями для  $k = k_0$ , взятым из (22) и  $f_0$  – из (23), найдем:

$$\vec{j} = \frac{e\hbar}{am_e} |\tilde{\psi}|^2 \nabla Q, \quad (25)$$

где:

$$Q = \frac{2\varepsilon z}{\Omega} \sin \tau - \frac{2\varepsilon^2}{\Omega^3} \left( \tau - \frac{1}{2} \sin 2\tau \right) + \\ + \frac{4\varepsilon}{\Omega^2} \frac{1}{\pi} \left[ \ln \frac{\sqrt{(1-r_{\perp}^2 - z^2)^2 + 4z^2}}{1+r_{\perp}^2 + z^2 \pm 2r_{\perp}} \right] \cos \tau - \lambda t; \\ r_{\perp}^2 = x^2 + y^2.$$

После простых, но громоздких вычислений, получим:

$$j_z = \frac{e\hbar}{am_e} \frac{2\varepsilon}{\Omega} \left\{ \sin \tau \pm \frac{8r^2 \cos \theta \sin \theta}{\pi \Omega} \frac{\cos \tau}{(1-r^2)^2 + 4r^2 \cos^2 \theta} \right\} |\tilde{\psi}|^2. \quad (26)$$

Отметим, что  $|\tilde{\psi}|^2$  содержит временной множитель:

$$\exp\left(-\frac{8\varepsilon}{\Omega^2} f_0(\tau)\right) = \left\{ 2 \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left[-2r - \frac{8\varepsilon}{\Omega^2} \operatorname{Re} k_0(r, \theta) \cos \tau\right] r^2 dr \sin \theta d\theta \right\}^{-1}. \quad (27)$$

Используя эти результаты, определим электромагнитное поле, которое излучают  $N$  атомов водорода, находясь в монохроматическом поле с напряженностью:

$$\tilde{\varepsilon}_z = -\tilde{\varepsilon} \cos \tau, \quad (28)$$

считая, что вторичное поле регистрируется на макроскопическом расстоянии от небольшой (с макроскопической точки зрения) области пространства, где находятся эти атомы.

В результате воздействия такого поля на атомные электроны они индуцируют ток с плотностью (26) (в одном атоме). Этот ток будет порождать вторичное электромагнитное поле с векторным потенциалом  $\vec{A}$ , которое в дипольном приближении определяется хорошо известными формулами (см., например, [9]) классической электродинамики:

$$\vec{A} = \frac{a^3}{cR} \iiint \vec{j}_M(\vec{r}', \tilde{t}) d^3\vec{r}', \quad (29)$$

где:  $R$  – расстояние между атомами и точкой, в которой измеряется  $\vec{A}$ ;  $\vec{r}'$  – радиус-вектор в точке, в которой задана  $\vec{j}_M(\vec{r}', t)$ ; потенциал  $\vec{A}$  определяется в момент времени  $\tilde{t} + R/c$ ;  $c$  – скорость света в вакууме. В волновой зоне напряженности магнитного  $\vec{H}$  и электрического  $\vec{E}$  полей даются формулами:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \left[ \dot{\vec{A}}, \vec{n} \right]; \quad \vec{E} = \left[ \vec{H}, \vec{n} \right], \quad (30)$$

где точка означает дифференцирование по  $\tilde{t}$ , а вектор  $\vec{n}$  направлен вдоль  $\vec{R}$ .

Входящий в  $j_z$  радиус-вектор  $\vec{r}$  определяет расстояние от атомного ядра до электрона в этом атоме. В обозначениях же формулы (29)  $\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}_a$ , где  $\vec{r}_a$  – радиус-вектор атомного ядра (считаем его неподвижным) с номером  $a$ . Тогда  $\vec{j}_M$  из (29) будет определяться выражением:

$$\vec{j}_M = \sum_{a=1}^N \vec{j}(\vec{r}' - \vec{r}_a) \quad (31)$$

где суммирование производится по всем частицам системы.

Если расстояния между атомами значительно больше их среднего размера, т. е.  $|\vec{r} - \vec{r}_a|^2$  для различных  $a$  практически не перекрываются, то интеграл в (29) разобьется на  $N$  интегралов по  $\vec{r}$  от (25), которые очевидно одинаковые. В результате получим:

$$A_z = \frac{Na^3}{cR} \iiint j_z(\vec{r}, \tilde{t}) d^3\vec{r}. \quad (32)$$

Подставив (25) в (32), найдем:

$$A_z = \frac{2e\hbar\varepsilon N}{acm_e\Omega R} \left[ \sin \tau \pm \frac{8}{\pi\Omega} \frac{F_2}{F_1} \cos \tau \right], \quad (33)$$

где:

$$F_1 = 2 \int_0^\pi \int_0^\infty \exp \left[ -2r - \frac{2\Omega}{\mu} \operatorname{Re} k_0(r, \cos \theta) \cos \tau \right] r^2 dr \sin \theta d\theta;$$

$$F_2 = 2 \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{\exp \left[ -2 \frac{\Omega}{\mu} \operatorname{Re} k_0(r, \cos \theta) \cos \tau - 2r \right]}{(1-r^2)^2 + 4r^2 \cos^2 \theta} r^4 dr \cos \theta \sin^2 \theta d\theta.$$





Первое слагаемое в (33) определяет линейный вклад внешнего поля в  $A_z$ ; второе – соответствует нелинейной части векторного потенциала.

Напряженности  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  определяется  $A_z$ . Дифференцирование (33) по времени  $\tilde{t}$  дает следующий результат (мы используем как безразмерные, так и размерные величины):

$$\dot{A}_z = \frac{2e\hbar\varepsilon N\omega}{acm_e\Omega R} \left\{ \cos \tau \pm \frac{8}{\pi\Omega} \left[ \left( \frac{F_4}{F_1} - \frac{F_2 F_3}{F_1^2} \right) \cos \tau - \frac{F_2}{F_1} \sin \tau \right] \right\}, \quad (34)$$

где:

$$F_3 = 2 \int_0^\pi \int_0^\infty \left[ 2 \frac{\Omega}{\mu} \operatorname{Re} k_0(r, \cos \theta) \sin \tau \right] \exp \left[ -2r - \frac{2\Omega}{\mu} \operatorname{Re} k_0(r, \cos \theta) \cos \tau \right] \times \\ \times r^2 dr \sin \theta d\theta;$$

$$F_4 = 2 \int_0^\pi \int_0^\infty \left[ 2 \frac{\Omega}{\mu} \operatorname{Re} k_0(r, \cos \theta) \sin \tau \right] \frac{\exp \left[ -2 \frac{\Omega}{\mu} \operatorname{Re} k_0(r, \cos \theta) \cos \tau - 2r \right]}{(1-r^2)^2 + 4r^2 \cos^2 \theta} \times \\ \times r^4 dr \sin^2 \theta \cos \theta d\theta.$$

Для напряженности магнитного поля нетрудно найти выражение:

$$\vec{H} = \alpha^2 \frac{a}{R} N \tilde{\varepsilon} \left\{ \cos \tau \pm \frac{8}{\pi\Omega} \left[ \left( \frac{F_4}{F_1} - \frac{F_2 F_3}{F_1^2} \right) \cos \tau - \frac{F_2}{F_1} \sin \tau \right] \right\} [\vec{k}, \vec{n}], \quad (35)$$

где:  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ,  $\alpha = e^2 / (\hbar c)$  – постоянная тонкой структуры.

Результаты численного расчета второго слагаемого в фигурной скобке выражений (34) и (35) для значений:  $\mu = 10^{-2}$ ;  $\Omega = 10^{-1}$ , что соответствует  $\varepsilon = 10^{-1}/4$  и  $\mu/\Omega = 10^{-1}$ , или в обычных единицах  $\tilde{\varepsilon} \cong 4,8 \cdot 10^5$  СГСЭ,  $\omega = 2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ , которые по-прежнему значительно меньше атомных  $1,9 \cdot 10^7$  СГСЭ и  $4 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ , показаны на рис. 1.

Из кривой, изображенной на этом рисунке, нетрудно понять, что векторный потенциал поля, индуцированного внешним монохроматическим полем, не совпадает с гармонической функцией. Следовательно, вторичное излучение водородоподобного атома, находящегося во внешнем монохроматическом поле, представляет собой нелинейный процесс. Обратим внимание, что нелинейный отклик не мал, а его амплитуда даже может превышать амплитуду монохроматической части поля.

Работа поддержана Аналитической целевой ведомственной программой (Министерства образования и науки РФ) «Развитие научного потенциала высшей школы» Мероприятие 1. Проект «Исследование нестационарных процессов в атомных и наносистемах в электромагнитном поле».

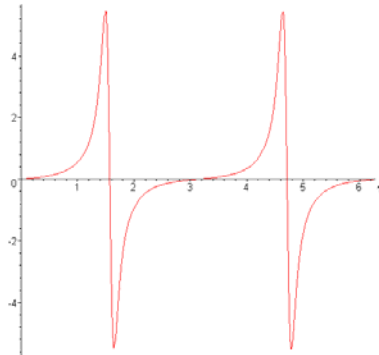


Рис. 1. График выражения  $\left\{ \frac{8}{\pi\Omega} \left[ \left( \frac{F_4}{F_1} - \frac{F_2 F_3}{F_1^2} \right) \cos \tau - \frac{F_2}{F_1} \sin \tau \right] \right\}$  как функции  $\tau$

### Библиографические ссылки

1. Силин В. П. Генерация гармоник СВЧ поля в полностью ионизованной плазме при упругом рассеянии электронов на ионах // ЖЭТФ. – Т. 47.
2. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Генерация гармоник лазерного излучения в процессе ионизации газа // Квантовая электроника. – 2007. – Т. 37. – № 10.
3. Pukhov A. Strong field interaction of laser radiation // Rep. Prog. Phys. 2003. – V 66.
4. Lewenstein M., Balkou Ph., Ivanov M. et al. Theory of High-harmonic generation by low-frequency laser field // Phys. Rev.A. 1994. – V. 49.
5. Ehlitzky F., Jaron A., Kaminski J. Z. Electron-atom collisions in a laser field // Physics Reports 297 (1998).
6. Попов В. С. Туннельная и многофотонная ионизация атомов и ионов в сильном лазерном поле (теория Келдыша) // УФН. – 2004. – Т. 174.
7. Крылов В. И., Рухадзе А. А. Индуцированное излучение водородоподобного атома в монохроматическом электрическом поле // Прикладная физика. – 2009. – № 4.
8. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1973.
9. Ландау Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988.