



УДК 624.074.415.624.072.2

© В. А. Кравчук, 2011

ПОЛОГИЕ ОБОЛОЧКИ ДЛЯ ПОКРЫТИЙ И ПЕРЕКРЫТИЙ ЗДАНИЙ С ДИАФРАГМАМИ НА ОСНОВЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ СТАЛЬНЫХ БАЛОК

Кравчук В. А. – д-р техн. наук, проф. кафедры «Строительные конструкции»,
тел. 37-51-82, e-mail: Kravchuk@mail.khstu.ru (ТОГУ)

Изучается целесообразность формирования железобетонных оболочек положительной Гауссовой кривизны для покрытий и перекрытий зданий в случае применения диафрагм оболочек из искривленных предварительно напряженных стальных сплошностенчатых балок. Приводится сравнительный анализ напряженного и деформированного состояния плоских плит и оболочек.

The practicability of the formation of ferroconcrete shells with a positive Gauss curvature for coverings of buildings is studied when the diaphragm of shells from curved prestressed steel beams is used. The comparative analysis of stressed and deformed state of plane plates and shells is made.

Ключевые слова: плита покрытия, пологая оболочка положительной Гауссовой кривизны, безмоментная теория расчета, предварительно напряженные элементы, линия нарушения.

В настоящей работе рассматриваются плоские плиты и пологие оболочки, находящиеся исключительно под воздействием только вертикальных внешних нагрузок. Цель работы – разработка возможной монтажной схемы оболочек, расстановка вертикальных связей, обеспечивающих пространственную жесткость каркаса и сопоставительный анализ напряженно-деформированного состояния железобетонных плоских плит и оболочек, находящихся в системе каркаса здания.

Монтажная схема оболочек. Связи, обеспечивающие пространственную жесткость металлического каркаса здания

Предварительно напряженные балки (ПНБ), дополнительно изогнутые по методике, изложенной в [1], монтируются в системе металлического каркаса согласно рис. 1. При этом предполагается, что каркас связевый, т. е. присоединение ПНБ к колоннам каркаса шарнирное. Монолитное железобетон-

ное безреберное перекрытие, уложенное по предварительно напряженным стальным балкам, создает слегка искривленные пластины (вспарушенные плиты), которые относятся к пологим оболочкам с соотношением стрелы подъема f к меньшему пролету оболочки l в пределах $f/l=1/40$ и отношением толщины плиты h к пролету оболочки $h/l \geq 1/50$.

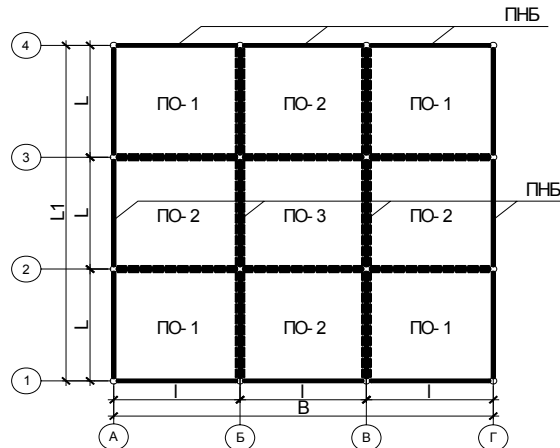


Рис. 1. Монтажная схема ПНБ и оболочек

Ранее [2] установлено, что предварительно напряженные балки обладают повышенной по сравнению с обычными балками изгибной жесткостью. В то же время жесткость ПНБ из плоскости действия внешних нагрузок не отличается от соответствующей жесткости обычных балок. Указанный вывод хорошо согласуется с требованиями, касающимися жесткости диафрагм пологих оболочек.

Учитывая соотношение геометрических размеров пологих оболочек для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии конструкций применима безмоментной теории расчета, предопределяющая отсутствие изгибных напряжений в местах сопряжения отдельных оболочек, и, следовательно, их условное шарнирное сопряжение по периметру.

Пространственная жесткость металлического каркаса обеспечивается установкой вертикальных связей. Возможный вариант компоновки вертикальных связей в зданиях с квадратным планом показан на рис. 2.

Напряженно-деформированное состояние плоской плиты

Принимая в основу безмоментную теорию расчета плит можно утверждать, что плита ПО-3 (рис.1) шарнирно закреплена по периметру и нагружена равномерно распределенной нагрузкой q по горизонтальной поверхности (рис.3). Для решения задачи поперечного изгиба прямоугольной плиты воспользуемся уравнением Лагранжа-Ритца:

$$\mathfrak{E} = U - A, \quad (1)$$

или:



$$\mathfrak{E} = \frac{D}{2} \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy - \iint q(x, y) w dx dy, \quad (2)$$

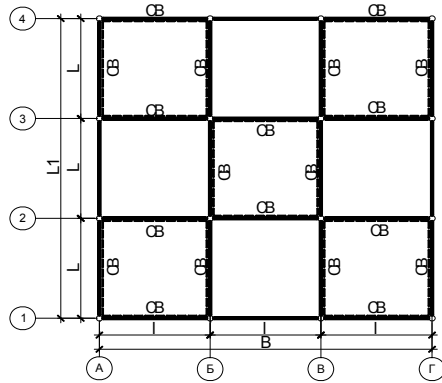


Рис. 2. Компонировка вертикальных связей

где: \mathfrak{E} – энергия плиты; U – потенциальная энергия; A – работа внешних нагрузок; D – цилиндрическая жесткость ($D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$); E – модуль упругости материала плиты; h – толщина плиты; ν – коэффициент Пуассона для материала плиты; q – равномерно распределенная нагрузка по плите; w – величина прогиба срединной поверхности плиты.

Уравнение прогибов срединной поверхности принимаем в виде:

$$w = C \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{a}. \quad (3)$$

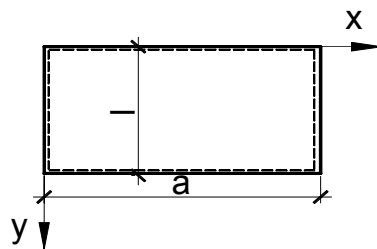


Рис. 3. Расчетная схема плиты

Потенциальная энергия прямоугольной плиты:

$$U = \frac{D}{2} \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = \frac{D}{2} \cdot C^2 \pi^2 \cdot \frac{l^2 + a^2}{l^4 a^4} \cdot \frac{la}{4}. \quad (4)$$

Работа внешних нагрузок, приложенных по горизонтальной поверхности плиты:

$$A = - \iint q(xy) w dx dy = -qC \frac{4lb}{\pi^2}. \quad (5)$$

Воспользовавшись вариационным уравнением Лагранжа:

$$\delta \mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial C} = 0,$$

находим, что параметр $C = \frac{16ql^4 a^4}{D\pi^6(l^2 + a^2)^2}$. (6)

В таком случае прогиб плиты:

$$w = \frac{16ql^4 b^4}{D\pi^6(l^2 + a^2)^2} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{a}. \quad (7)$$

Максимальный прогиб будет в середине плиты, т. е. при $x=l/2; y=a/2$.

$$w_{\max} = \frac{16ql^4 a^4}{D\pi^6(l^2 + a^2)^2}. \quad (8)$$

Максимальный прогиб в квадратной пластине:

$$w_{\max} = \frac{16l^8}{D\pi^6 4l^4} = 0,004173 \frac{ql^4}{D}. \quad (9)$$

Безмоментная теория расчета пластин предполагает, что в плоскостях, перпендикулярных главным осям, действуют нормальные и сдвигающие напряжения.

В соответствии с обратным законом Гука и перемещениями на основании уравнений Коши, соответствующие напряжения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Eh}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

При решении задач в технической теории железобетонных пластин коэффициент Пуассона разрешается принимать равным нулю.

Учитывая изложенное и подставляя значения частных производных от выражения прогиба по зависимости (7) формулы, характеризующие напряженное состояние плиты преобразуются к виду:

$$\sigma_x = Eh \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -Et \frac{16qa^4 l^4}{D\pi^6(a^2 + l^2)^2} \left[\frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{l} \right]. \quad (11)$$

Нормальное напряжение на границах плиты:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad \sigma_x &= 0; \\ x = a, \quad \sigma_x &= 0. \end{aligned}$$



В середине пластины:

$$x = a/2, y = l/2,$$

$$\sigma_x = -Eh \frac{16qa^4 l^4}{D\pi^4 (a^2 + l^2)^2} \frac{1}{a^2}. \quad (12)$$

Нормальные напряжения в центре квадратной пластины:

$$\sigma_x = -Eh \frac{4qa^2}{D\pi^4}. \quad (13)$$

Сдвигающие напряжения:

$$\tau_{xy} = -Eh \frac{16qa^4 l^4}{D\pi^6 (a^2 + l^2)^2} \frac{\pi^2}{al} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{l}. \quad (14)$$

Сдвигающие напряжения на границе плиты:

$$x = 0, x = a; \quad y = 0, y = l;$$

$$\tau_{xy} = -Eh \frac{16qa^3 l^3}{D\pi^4 (a^2 + l^2)^2}. \quad (15)$$

Сдвигающие напряжения в квадратной плите ($a = l$):

$$\tau_{xy} = -Eh \frac{4qa^2}{D\pi^4}. \quad (16)$$

В общем случае усилия, действующие по элементарным площадкам плиты, определяются выражениями:

$$N_x = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_y dz, \quad S = \int_{-l/2}^{l/2} \tau_{xy} dz,$$

$$M_x = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-l/2}^{l/2} \tau_{xy} z dz, \quad (17)$$

$$Q_x = \int_{-l/2}^{l/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-l/2}^{l/2} \tau_{yz} dz.$$

Усилия N_x и M_x при подстановке σ_x по зависимости (11) преобразуются к виду:

$$N_x = -E \frac{16qa^2 l^4}{D\pi^4 (a^2 + l^2)^2} \left(\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{l} \right) \int_{-l/2}^{l/2} z dz =$$

$$= B \left| \frac{z^2}{2} \right|_{-l/2}^{l/2} = \frac{Et^2}{4} \frac{16qa^2}{D\pi^4 (a^2 + l^2)^2} \left(\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{l} \right) \quad (18)$$

$$M_x = -E \frac{16qa^2l^4}{D\pi^4(a^2+l^2)^2} \left(\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{l}\right) \int_{-l/2}^{l/2} z^2 dz = K \left. \frac{z^3}{3} \right|_{-l/2}^{l/2} =$$
$$-EI_x \frac{16qa^2l^4}{D\pi^4(a^2+l^2)^2} \left(\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{l}\right) \quad (19)$$

В частности, при $x=0, x=a; y=0, y=l$, $N_x = M_x = 0$.

Этот вывод подтверждает принятую в исследовании безмоментную теорию расчета плит.

Перекрытия (покрытия) в виде полой оболочки

В тонких полых оболочках положительной кривизны сплошь или частично нагруженных вертикальной нагрузкой изгибающие моменты малы и вблизи линий нарушения безмоментного напряженного состояния носят местный быстрозатухающий характер краевого эффекта. Поэтому для таких оболочек при надлежащем закреплении краев связями, совпадающими с направлением главных координатных осей, обеспечивающими жесткость срединной поверхности оболочек, может быть использован метод суммирования решений уравнений безмоментной и моментной теорий, что позволяет понизить порядок дифференциальных уравнений вдвое и тем самым существенно облегчить расчет оболочек.

Практический подход к решению задачи напряженно-деформированного состояния полых оболочек с использованием метода суммирования изложен в работе [3].

Поиск напряженно-деформированного состояния полых оболочек сводится к решению дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0,5 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_1 \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{X}{Eh}; \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 0,5 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - k_2 \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{Y}{Eh}; \quad (21)$$

$$D\nabla^4 w + Eh(k_1^2 w) - Eh \left(k_1 \frac{\partial w}{\partial x} + k_2 w \right) = Z, \quad (22)$$

где: $\nabla^4 = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ – бигармонический оператор.

Точное решение системы (20)–(22) представляет собой значительные математические трудности. Однако систему дифференциальных уравнений можно решить приближенно с вполне удовлетворительной для практических целей точностью, если использовать метод раздельного применения безмоментной и моментной теории.

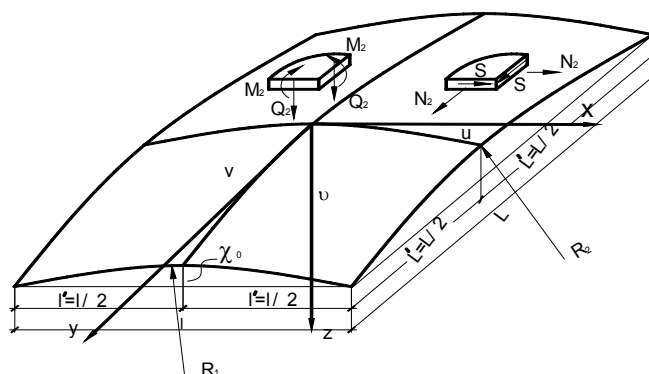


Рис. 4. Геометрические перемещения оболочки, усилия и перемещения

После некоторых преобразований уравнений (20)–(22) можно получить:

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (p^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (p - 1)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{2}{Eh} \left[\frac{p}{k_2} \frac{\partial Z_b}{\partial x} - (p^2 + 1)X \right]; \quad (23)$$

$$(p^2 + 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2p^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (p - 1)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2}{Eh} \left[\frac{1}{k_2} \frac{\partial Z_b}{\partial y} - (p^2 + 1)Y \right], \quad (24)$$

где: $p = k_1 / k_2$.

Полученная система эквивалентна системе (20)...(22) и решается несколько проще, особенно при $k_1 = k_2$.

Возможны три способа решения уравнений (20) и (22) на основе метода раздельного применения безмоментной и моментной теории [5].

Первый способ применим к расчету оболочек, в которых безмоментное напряженное состояние является основным, а моментное – носит характер краевого эффекта.

Положим в уравнениях (23) и (24) $Z_b = Z$. При этом указанные уравнения превращаются в уравнения безмоментной теории пологих оболочек [6]. Решая эти уравнения для заданных граничных условий, выраженных в перемещениях u, v , получим тангенциальные перемещения в безмоментной оболочке. Подставляя эти значения в формулу:

$$(k_1^2 + k_2^2)w - \left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + k_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{q}{Eh}, \quad (25)$$

являющуюся видоизменением формулы (22), получим прогиб в безмоментной оболочке w_b . Затем определяется действительный прогиб оболочки w из зависимостей:

$$\nabla^4 w + 4\beta_2^4 w = 4\beta_2^4 w_b; \quad (26)$$



$$\nabla^4 w + 4\beta_1^4 w = 4\beta_1^4 w_b, \quad (27)$$

где: $1/\beta_2 = 0,76\sqrt{R_2 h}$, $1/\beta_1 = 0,76\sqrt{R_1 h}$.

Уравнениями (23) и (24) следует пользоваться при определении прогиба и усилий у края или границы скачкообразного изменения интенсивности вертикальной нагрузки (линии нарушения безмоментного напряженного состояния, или линии нарушения).

Решение уравнений (26) и (27) рекомендуется производить следующим образом. Разделим (26) на два уравнения:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\beta_2^4 w = 4\beta_2^4 w_{1b}(x); \quad (28)$$

$$2\frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 4\beta_2^4 w_{2b}(x, y), \quad (29)$$

где: $w_{1b}(x) + w_{2b}(x, y) = w_b(x, y)$.

В оболочках, у которых моментное напряженное состояние носит характер краевого эффекта, величина $2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ в точках, отстоящих от края или внутренней линии нарушения $y = \text{const} = c$ на расстоянии $(2-3)\sqrt{R_1 h}$ и более, мало отличается от нуля и, следовательно, мало отличается от нуля и величина $w_{2b}(x, y)$. Поэтому если требуется определить прогиб w вдоль линии $y = c_n$, отстоящей от линии нарушения $y = c$ на расстоянии не менее $(2-3)\sqrt{R_1 h}$, решение уравнения (26) сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\beta_2^4 w = 4\beta_2^4 w_b(x, y = c_n) \quad (30)$$

Решение уравнения (30) может быть:

$$w = w_0 + w_b \quad (31)$$

где: w_0 — решение однородного уравнения (без правой части); w_b — частное решение.

Решение w_0 ищем в виде:

$$w_0 = e^{-\beta_2 x} (C_1 \cos \beta_2 x + C_2 \sin \beta_2 x) + e^{-\beta_2 x} (C_3 \cos \beta_2 x + C_4 \sin \beta_2 x). \quad (32)$$

Произвольные постоянные находятся из граничных условий.



Нормальные усилия по безмоментной теории:

$$N_2 = \frac{N_{2b}(x = \delta_2, y)N_2(x, y = \delta_1)}{N_{2b}(x = \delta_2, y = \delta_1)}; \quad (33)$$

$$N_1 = \frac{N_{1b}(x, y = \delta_1)N_1(x = \delta_2, y)}{N_{1b}(x = \delta_2, y = \delta_1)}. \quad (34)$$

Здесь $N_{2b}(x = \delta_2, y)$ и $N_{1b}(x, y = \delta_1)$ – значения нормальных усилий, найденных по безмоментной теории, вдоль линии соответственно $x = \delta_2, y = \delta_1$ (начало координат в точке пересечения линий нарушения), $N_2(x, y = \delta_1)$ и $N_1(x = \delta_2, y)$ – значения нормальных усилий, определенных по формулам (33) и (34) вдоль линий соответственно $y = \delta_1, x = \delta_2$, $N_{2b}(x = \delta_2, y = \delta_1)$ и $N_{1b}(x = \delta_2, y = \delta_1)$ – значения нормальных усилий, найденных по безмоментной теории в точке с координатами $x = \delta_2, y = \delta_1$.

Действительный прогиб в угловых зонах определяется по формуле:

$$w = \frac{[w_b(x = \delta_2, y) + w_0(y)][w_b(x, y = \delta_1) + w_0(x)]}{w_b(x = \delta_2, y = \delta_1)}. \quad (35)$$

Наибольшие абсолютные значения прогибов и моментов в угловых зонах, ограниченных несмещаемыми краями, следует умножить на коэффициент 1,4.

Приложение изложенного выше способа расчета оболочек положительной кривизны рассмотрим на примере, когда вдоль краев $x = \pm l \quad v = N_1 = 0$, вдоль краев $y = \pm L \quad u = N_2 = 0$ (рис. 5).

Действительные внутренние усилия и прогибы в безмоментной квадратной оболочке, очерченной по параболическому закону:

$$z = 0,000144[L(x + y) - (x^2 + y^2)] \quad (36)$$

и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой $q = const$ определяются по нижеследующим формулам.

Зона a, c :

$$w_a = \frac{qR_2^2}{Eh} [\overline{w_b} - e^{-\beta_2(l-x)} \cos \beta_2(l-x)], \quad (37)$$

где: $\overline{w_b} = \frac{Eh}{qR_2^2} w_b$; $\beta_2 = 1/0,76\sqrt{R_2 h}$.

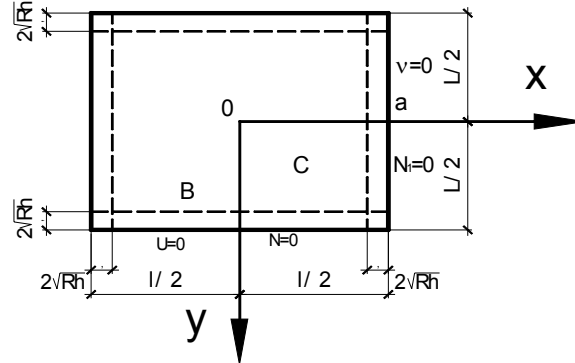


Рис. 5. Расчетная схема оболочки

При $p = f_2 / f_1 = 1,0$, т. е. в оболочках квадратных в плане, $w_b = qR^2 / Eh = const$.

$$\begin{aligned} M_{1a} &= 0,289 \cdot qR_2 h e^{-\beta_2(l-x)} \sin \beta_2(l-x); \\ N_{2a} &= N_{2b} + qR_2 e^{-\beta_2(l-x)} \cos \beta_2(l-x) \end{aligned} \quad (38)$$

Зона b, c :

$$w_b = \frac{qR_1^2}{Eh} [\overline{w}_b - e^{-\beta_1(L-y)} \cos \beta_1(L-y)]; \quad (39)$$

где: $\overline{w}_b = \frac{Eh}{qR_1^2} w_b$; $\beta_1 = 1/0.76 \sqrt{R_1 h}$.

При квадратной оболочке, когда радиус оболочки $R_1 = R_2 = R$; кривизна $k_1 = k_2 = k$; коэффициенты: $p = k_1 / k_2 = 1.0$; $\lambda_n = n\pi / l \sqrt{p} = n\pi / l$; $\Delta_n = \lambda_n = n\pi / l$, прогиб безмоментной оболочки определяется выражением:

$$w_b = qR^2 / Eh. \quad (40)$$

С учетом зависимости (37) действительный прогиб в зонах ac, bc может быть определен выражением (37) или (39) с заменой в квадратных скобках \overline{w}_b на w_b .

В угловой зоне:

$$w = \frac{qR_1^2}{Eh} \cdot \frac{w_b^*(x_0, y) \cdot w_a^*(x, y_0)}{w_b^*(x_0, y_0)}. \quad (41)$$

где: $w_b^* = \overline{w}_b$, $x_0 = l - 2\sqrt{R_2 h}$, $y_0 = l - 2\sqrt{R_1 h}$.

$$M_1 = M_{1a} \frac{w_b^*(x_0, y)}{w_b^*(x_0, y_0)}; \quad M_2 = M_{2b} \frac{w_a^*(x, y_0)}{w_b^*(x_0, y_0)} \quad (42)$$



В качестве примера определим максимальный прогиб в центре квадратной оболочки в предположении, что $l = 600$ см; $L = 600$ см; радиус закругления диафрагм $R = 34.680$ м; толщина оболочки $h = 10.0$ см; $E = 3400 \text{ кН/см}^2$; коэффициент Пуассона $\nu = 0.0$ (для железобетонных конструкций) нагруженной равномерно распределенной вертикальной нагрузкой $q = 2,28 \text{ кН/м}^2$.

Поскольку оболочка квадратная, то:
 $k = 1/R = 1/3468 = 0,0002882$; $p = k_1/k_2 = 1,0$; $1/\beta = 0,76\sqrt{Rh}$
 $= 0,76\sqrt{3468 \cdot 10} = 141,5315$.

Прогиб в оболочке, вычисленный по безмоментной теории: $w_b = qR^2/Eh = 0,000228 \cdot 3468^2/3400 \cdot 10 = 0,028$ см.

Действительный прогиб в центре оболочки:

$$w = \frac{qR^2}{Eh} [\bar{w}_b - e^{-\beta(l-x)} \cos \beta(l-x)];$$
$$\bar{w}_b = \frac{Eh}{qR^2} w_b = 1,0.$$

В таком случае, на основании формулы (37):

$$w = 0,08 [1 - e^{-\frac{1}{141,5315} \cdot 300} \cos(\frac{1}{141,5315} \cdot 300)] =$$
$$= 0,08 [1 - e^{-2,12} \cos 2,12] = 0,08 [1 - 0,122(-0,522)] = 0,085 \text{ см}$$

Для сравнения деформированных состояний пологой квадратной оболочки и плоской плиты равных геометрических размеров определим максимальный прогиб плоской плиты по формуле (9):

$$w_{\max} = 0,004173 \frac{ql^4}{D} = 0,004173 \frac{ql^4 \cdot 12}{Eh^3} =$$
$$0,004173 \frac{0,000228 \cdot 600^4 \cdot 12}{3400 \cdot 1000} = 0,435 \text{ см.}$$

Следовательно, жесткость оболочки в 5 раз выше жесткости плоской плиты тех же геометрических размеров.

Библиографические ссылки

1. Кравчук В. А. Применение предварительно напряженных стальных балок в качестве ригелей каркаса высотного здания // Вестник Тихоокеанского государственного университета. – № 1 (20). – Хабаровск. – 2011.
2. Кравчук В. А. Конструкции, предварительно напряженные без затяжек. Оптимальное проектирование. – Хабаровск, 2010.
3. Никиреев В. М., Шадурский В. Л. Практические методы расчета оболочек. Изд. литературы по строительству. – М., 1966.



4. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. – Гостехиздат, 1949.
5. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих оболочек. – Гостехиздат, 1953.
6. *Никиреев В. М.* Применение безмоментной и моментной теории к расчету пологих оболочек положительной кривизны. Вопросы безмоментной теории оболочек переноса. – Дисс. НИИ по строительству. – М., 1960.