



УДК 519.635.6

© С. О. Романский, П. Б. Суляндзига, 2011

МОДЕЛЬ МАЛОМАСШТАБНОГО АТМОСФЕРНОГО ВИХРЯ

Романский С. О. – преп. кафедры «Прикладная математика», тел. 8-914-197-92-24, e-mail: khvstaswork@gmail.com (ДВГУПС); *Суляндзига П. Б.* – канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. ВЦ ДВО РАН, тел. 64-73-79.

В статье рассматривается математическая модель, описывающая возникновение, развитие и разрушение атмосферного вихря с вертикальной осью на основе системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса в цилиндрической системе координат. Приведен численный метод решения данной системы, а также результаты расчетов по данной модели.

The paper deals with a mathematical model that describes origination, evolution, and destruction of atmospheric vortex with a vertical axis using the Navier-Stokes differential equations in a cylindrical coordinate system. The numerical method of the system solution and also the results are given.

Ключевые слова: атмосферный вихрь, моделирование процессов в атмосфере, метод дробных шагов, системы нелинейных дифференциальных уравнений, смерч, торнадо.

Введение

В атмосфере часто образуются маломасштабные вихри (горизонтальный размер до 2 км), ось вращения которых почти вертикальна. Такие образования называются по-разному в зависимости от их геометрических размеров и скорости. К таким вихрям можно отнести и особо опасные явления погоды – тромбы, смерчи и торнадо, которые характеризуются скоростями ветра порядка 50–100 м/с [1, 2]. Такие явления, в отличие от обычных вихрей, уже представляют серьезную опасность для населения, и могут привести к человеческим жертвам и разрушениям. Поэтому необходимо понять причины и условия в атмосфере, приводящие к появлению таких образований.

Механизм возникновения и развития вихрей во многом похож. Выделим общие черты, присущие маломасштабным вихрям. К таким особенностям можно отнести: вращательное движение воздуха происходит вокруг центральной вертикальной оси; наличие восходящего потока тепла с поверхности Земли; преобладание вертикальных размеров над горизонтальными; атмосфера должна быть стратифицирована неустойчиво [3, 4].

Постановка задачи

Запишем уравнения термогидродинамики несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической системе координат (r, ψ, z) [5] в предположении, что движение симметрично относительно координаты ψ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \omega \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{u}{r^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \omega \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \omega \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\chi_d}{\rho c_p} \Delta T + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + r \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$p = \rho R_d T, \quad (6)$$

где: $u(r, z, t)$, $v(r, z, t)$, $\omega(r, z, t)$ – соответственно радиальная, тангенциальная и вертикальная составляющие скорости ветра; $p(r, z, t)$, $T(r, z, t)$, $\rho(r, z, t)$ – давление, температура и плотность воздуха; $\nu = const$, $\mu = const$ – горизонтальный и вертикальный коэффициент турбулентности; $\chi_d = 2,4 \times 10^{-3} \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ – средний коэффициент теплопроводности воздуха; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения; $R_d = 287 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ – газовая постоянная сухого воздуха.

Воспользовавшись приближением Буссинеска [6, 7] и с учетом того, что скорость $v \gg u$, преобразуем уравнения (1)–(6) к виду

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho_b} \frac{\partial p'}{\partial r}. \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \omega \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial p'}{\partial z} - \beta g T' + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial r} + \omega \frac{\partial T'}{\partial z} = -S\omega + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T'}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + r \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad (11)$$



$$S = \begin{cases} -S_0, & 0 \leq z \leq H, \\ S_0, & z > H, \end{cases} \quad (12)$$

где: $p'(r, z, t)$, $T'(r, z, t)$ – соответственно возмущение поля давления и температуры; $\rho_b(z)$ – фоновое значение плотности воздуха (взято из [8]); $\beta = 3,67 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ – средний коэффициент теплового расширения воздуха; $S(z)$ показывает как стратифицирована атмосфера, устойчиво или нет, $S_0 = -3 \times 10^{-3} \text{ град/м}$; H – высота столба атмосферы, в котором возникнет вихрь.

Неизвестными в системе (7)–(12) будут являться величины u , v , ω , p' , T' .

Перейдем к безразмерным величинам в уравнениях (7)–(12). Безразмерные величины обозначены черточками:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t \sqrt{-\beta g S_0}, & \bar{r} &= \sqrt{\frac{\sqrt{-\beta g S_0}}{\nu}} r, & \bar{z} &= \frac{z}{H}, \\ \bar{u} &= \frac{u}{\sqrt{\nu \sqrt{-\beta g S_0}}}, & \lambda &= \frac{\mu}{\sqrt{-\beta g S_0} H^2}, \\ \bar{w} &= \frac{w}{\sqrt{-\beta g S_0} H}, & \bar{v} &= \frac{v}{\sqrt{-\beta g S_0} H}, & \bar{S} &= \frac{S}{S_0}, \\ \bar{T}' &= \frac{T'}{-S_0 H}, & \bar{p}' &= \frac{1}{\rho_b} \cdot \frac{p'}{-S_0 \beta g H^2}. \end{aligned}$$

где λ – безразмерный вертикальный коэффициент турбулентности.

Тогда система (7)–(12) запишется в виде (черточки над буквами опущены):

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\partial p'}{\partial r}. \quad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \omega \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{\partial p'}{\partial z} - T' + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial r} + \omega \frac{\partial T'}{\partial z} = -S\omega + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T'}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + r \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad (17)$$

$$S = \begin{cases} -1, & 0 \leq z \leq 1, \\ 1, & z > 1. \end{cases} \quad (18)$$

Решение уравнений (13)–(18) будем искать в цилиндре $\Omega = \{0 \leq r \leq R; 0 \leq z \leq 2\}$. Поставим граничные и начальные условия для безразмерной системы.

В качестве начальных условий примем состояние покоя:

$$v|_{t=0} = 0; \quad \omega|_{t=0} = 0. \quad (19)$$

$$T'|_{t=0} = \begin{cases} T_0 = \text{const} & \text{в полосе по оси } z \text{ в окрестности } r = 0; \\ 0 & \text{в остальной области.} \end{cases} \quad (20)$$

Потребуем отсутствие потока воздуха и тепла через поверхности $z = 0$ и $z = 2$:

$$\omega|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z}|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial T'}{\partial z}|_{z=0} = 0, \quad \omega|_{z=2} = 0; \quad v|_{z=2} = 0; \quad T'|_{z=2} = 0. \quad (21)$$

Решение задачи не зависит от координаты ψ , поэтому поставим на центральной оси вихря условие симметрии:

$$u|_{r=0} = 0; \quad v|_{r=0} = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial r}|_{r=0} = 0; \quad \frac{\partial T'}{\partial r}|_{r=0} = 0. \quad (22)$$

Ограничим явление по горизонтальному масштабу:

$$v|_{r=R} = 0; \quad \omega|_{r=R} = 0; \quad T'|_{r=R} = 0; \quad p'|_{r=R} = 0. \quad (23)$$

Согласно (18) атмосфера стратифицирована неустойчиво в слое $0 \leq z \leq l$ и находится в состоянии равновесия. В начальный момент времени, задав возмущение поля температуры (20), в области Ω за счет конвекции образуются вертикальные невращающиеся токи воздуха – термики.

В некоторый момент времени $t_l > 0$ переопределим значение тангенциальной скорости v : для этого на боковой поверхности цилиндра радиуса R_l , где $0 < R_l < R$, зададим вращательный импульс $V = \text{const}$. Что позволит смоделировать воздействие внешнего момента сил, которое закрутит термик [9].

Далее будем решать систему (13)–(18) с граничными условиями (21)–(23), но в качестве начальных условий используем следующие соотношения:

$$v|_{t=0} = \begin{cases} v_1(r, z) & \text{при } r \neq R_1 \\ V = \text{const}, & \text{при } r = R_1 \end{cases}, \quad (24)$$

$$\omega|_{t=0} = \omega_1(r, z), \quad T'|_{t=0} = T'_1(r, z), \quad (25)$$

где: v_1 , ω , T' – значения полей, полученные при расчете задачи (13)–(18) с начальными и граничными условиями (19)–(23), до момента времени t_l включительно.

Метод решения

Для численного решения задачи воспользуемся методом дробных шагов при неявной разностной схеме [10].

Все уравнения системы (13)–(18), которые имеют производные по времени, можно представить в виде уравнения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \eta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \sigma \varphi = \chi_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \chi_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + f, \quad (26)$$



где: $\varphi(r, z, t)$ – искомая функция, а в качестве $\eta_1, \eta_2, \sigma, \chi_1, \chi_2, f$ могут фигурировать соответствующие члены уравнений. Например, чтобы получить уравнение для вертикальной составляющей скорости ветра (15), положим: $\varphi = \omega, \eta_1 = (u - r^{-1}), \eta_2 = \omega, \sigma = 0, \chi_1 = 1, \chi_2 = \lambda, f = -p'_z - T'$. Введем сетку $\Gamma = \{0 \leq m\Delta r \leq R; 0 \leq n\Delta z \leq H\}$, $\Delta z, \Delta r$ – шаги соответственно по осям $o'z$ и $o'r$; 2τ – шаг по времени, индекс l соответствует оси времени.

Запишем для уравнения (26) конечно-разностную схему [11]:

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_{m,n}^{l+1} - \varphi_{m,n}^l}{2\tau} + \alpha_{1m,n}^l \left[(1 - \eta_{1m,n}^l) \frac{\varphi_{m,n}^{l+1} - \varphi_{m-1,n}^{l+1}}{\Delta r} + \eta_{1m,n}^l \frac{\varphi_{m+1,n}^{l+1} - \varphi_{m,n}^{l+1}}{\Delta r} \right] + \\ & + \alpha_{2m,n}^l \left[(1 - \eta_{2m,n}^l) \frac{\varphi_{m,n}^{l+1} - \varphi_{m,n-1}^{l+1}}{\Delta z} + \eta_{2m,n}^l \frac{\varphi_{m,n+1}^{l+1} - \varphi_{m,n}^{l+1}}{\Delta z} \right] + \sigma_{m,n}^l \varphi_{m,n}^{l+1} = \quad (27) \\ & = f_{k,m}^l + \chi_{1m,n}^l \frac{\varphi_{m+1,n}^{l+1} - 2\varphi_{m,n}^{l+1} + \varphi_{m-1,n}^{l+1}}{\Delta r^2} + \chi_{2m,n}^l \frac{\varphi_{m,n+1}^{l+1} - 2\varphi_{m,n}^{l+1} + \varphi_{m,n-1}^{l+1}}{\Delta z^2}. \end{aligned}$$

Вид коэффициентов α_1, α_2 определим ниже.

После решения системы разностных уравнений (27) для полей ω, v, T' приближенно проинтегрируем уравнение для p' (13) и уравнение неразрывности (17) по методу трапеций:

$$p'_{m,n}{}^{l+1} = -\frac{1}{2} \sum_{i=m}^{M-1} \left[\frac{(v_{i,n}^{l+1})^2}{i} + \frac{(v_{i+1,n}^{l+1})^2}{i+1} \right], \quad (28)$$

$$u_{m,n}^{l+1} = -\frac{\Delta r}{2m\Delta z} \sum_{i=1}^{m-1} \left[i(\omega_{i,n+1}^{l+1} - \omega_{i,n}^{l+1}) + (i+1)(\omega_{i+1,n+1}^{l+1} - \omega_{i+1,n}^{l+1}) \right] \quad (29)$$

Получим значения u и p' на новом временном слое $l+1$.

Вместо решения уравнения (27) будем искать решения расщепленной по направлениям схемы, т. е. на каждом полушаге по времени будем проводить вычисления либо по $o'r$ либо по $o'z$. Тогда на этих полушагах получим, если сохранить прежние обозначения:

$$\begin{aligned} & \varphi_{k+1}^{l+\frac{1}{2}} (\chi_k^l \tau - \alpha \eta_k^l \Delta x \tau) - \\ & - \varphi_k^{l+\frac{1}{2}} \left(\Delta x \tau \alpha (1 - 2\eta_k^l) + 2\chi \tau + \frac{1}{2} \sigma \tau \Delta x^2 + \Delta x^2 \right) + \quad (30) \\ & \varphi_{k-1}^{l+\frac{1}{2}} (\chi_k^l \tau + \alpha (1 - \eta_k^l) \Delta x \tau) = -\varphi_k^l \Delta x^2 - \frac{1}{2} f_k^l \Delta x^2 \tau, \end{aligned}$$

где: $\alpha = 0$, если $\eta_k^l \geq 0$, в противном случае $\alpha = 1$.

Уравнения вида (30) выписываются на каждом полушаге для уравнений (14)–(16).

После первого полушага по времени мы получаем значения для $(\omega, v, T)^{l+1/2}$. Подставляя эти значения в уравнения типа (30), выписанные на втором полушаге, мы вычисляем значения $(\omega, v, T)^{l+1}$ на следующем временном слое.

Чтобы получить требуемые уравнения для каждого полушага, необходимо заменить в соотношении (30) Δx на Δr или Δz , а индекс k на m или n соответственно; тройки параметров $\alpha_1, \sigma_1, \chi_1$ и $\alpha_2, \sigma_2, \chi_2$ подставляются соответственно вместо α, σ, χ на каждом полушаге. Первый полушаг делается по направлению $o'r$.

Счет по методу дробных шагов удобен, т. к. система распадается на последовательность одномерных задач, которые сводятся к решению СЛАУ методом прогонки [12].

Если рассмотреть разностную схему (30) и использовать формулу Тейлора, можно показать, что схема имеет первый порядок аппроксимации по всем переменным.

Результаты расчетов

Численное моделирование задачи проводилось на области с радиусом $R = 10$ км, высота составляет $h = 3$ км; $H = 2h$. Шаг по времени составлял 10 сек. Шаг по пространству $\Delta r = 0,1$ км, по высоте $\Delta z = 0,2$ км. $\theta_0 = 10^\circ$. $R_1 = 3$ км.

В модели были заданы время $t_1 = 40$ мин., скорость $V = 10$ м/с.

Схема обеспечила устойчивость счета на время жизни всего вихря.

Впервые 40 минут счета происходит развитие теплового термика. После задания вращательного импульса начинается развитие вихря за счет реализации энергии неустойчивости атмосферы. Примерно через 2 часа от начала счета скорости достигают максимума, а затем начинают уменьшаться. Время жизни вихря составило порядка 6 часов.

Ниже приведены профили вихря с нанесенными значениями расчетной тангенциальной скорости через 2 (рис. 1 а) и 4 (рис. 1 б) часа от начала счета.

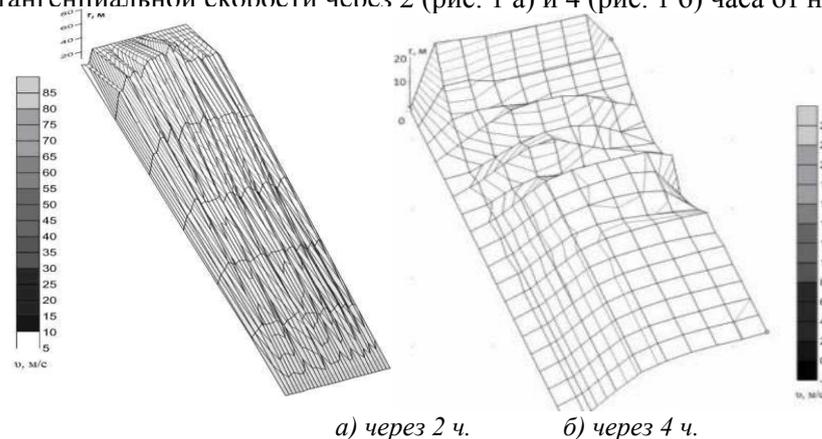


Рис. 1. Профиль вихря и значения тангенциальной скорости v



Через 2 часа диаметр образования составил порядка 170 м, высота – около 1000 м. Максимальная вертикальная скорость достигла значения 18 м/с. А после 4 часов от начала счета вихрь начинает разрушаться. Диаметр составляет уже порядка 40 м, а высота – 600 м. Максимальная вертикальная скорость равна 12 м/с.

Дополнительно была рассчитана масса тела, которое сможет поднять смерч в зависимости от скорости ветра. Разница между подъемной силой F_p и силой сопротивления воздуха F_q даст нам массу, ее можно вычислить по следующей формуле [13]:

$$\theta = F_p - F_q = \rho_F s v_s^2 (C_y - C_x). \quad (31)$$

Здесь s – площадь тела, v_s – скорость движения, θ – масса объекта, $\rho_F = 0,125 \text{ (кг}\cdot\text{с}^2\text{)/м}^4$ – массовая плотность воздуха на уровне моря, $C_y = 0,36$ и $C_x = 0,23$ – соответственно коэффициенты силы сопротивления воздуха и подъемной силы для угла атаки в 30° .

Результаты приведены для тела прямоугольной формы, имеющего площадь $s = 8 \text{ м}^2$, что примерно соответствует размерам легкового автомобиля (рис. 2).

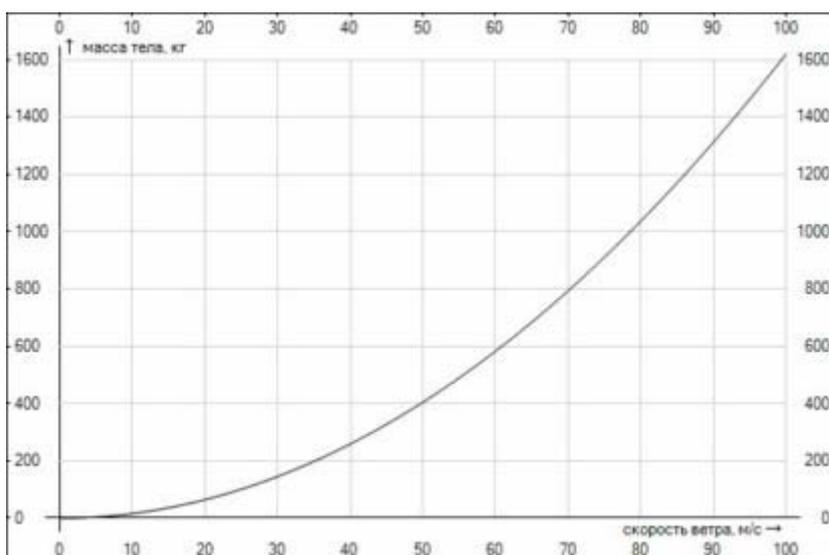


Рис. 2. Зависимость между скоростью ветра в вихре и массой тела, которое он сможет поднять

Как видно из графика, при скоростях порядка вихрь 80 м/с уже в состоянии поднять тело массой в 1000 кг.

Заключение

В статье предложена система уравнений, описывающая движение вихря, а также метод ее решения. Для Дальнего Востока такая работа имеет больше



теоретический интерес, хотя в последнее время на территории Приамурья образуется все больше смерчей.

Библиографические ссылки

1. *Веселов Е. П.* К расчету скорости ветра в смерче // Гидрология и метеорология. – № 2. – 2008.
2. *Российский гидрометеорологический энциклопедический словарь.* – Т. 3. – СПб.: Летний сад, 2009.
3. *Гутман Л. Н., Мальбахов В. М.* К теории атмосферных вихрей с вертикальной осью // Изв. АН СССР. – № 6. – 1968.
4. *Snow J.* The Tornado // Scientific American. – 1984. – Vol. 250. – № 114.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. – Т. 6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
6. *Thunis P., Bornstein R.* Hierarchy of mesoscale flow assumptions and equations // Journal of the Atmospheric Sciences. – 1996. – Vol. 53.
7. *Ooyama V.* A Thermodynamic Foundation for Modeling the Moist Atmosphere // Monthly Weather Review. – 1990. – Vol. 47
8. *ГОСТ 4401–81.* Атмосфера стандартная. Параметры. – М.: Изд-во стандартов, 2004.
9. *Klemp J.* Dynamics of thornadic thunderstorms // Annual reviews Fluid Mechanics. – 1987. – Vol. 19.
10. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука – сибирское отделение, 1967.
11. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – Л.: Гидрометиздат, 1987.
12. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
13. *Висленев Б. В., Кузьменко Д. В.* Теория Авиации. – М.: Из-во наркомата обороны СССР, 1939.