ФИЗИКА

ВЕСТНИК ТОГУ. 2012. № 2(25)



УДК 536.25:539.14

© С. В. Соловьев, 2012

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ЖИДКОМ ЯДРЕ ЗЕМЛИ

Соловьев С. В. – д-р ф.-м. наук, проф. кафедры «Прикладная математика», e-mail: solovjovsv@rambler.ru (ТОГУ)

В работе представлены результаты конвективного теплообмена в жидком ядре Земли при наличии внутренних источников тепла. Для температуры рассматривались граничные условия I, II, III рода. Исследовано влияние внутренних источников теплоты на гидродинамику и теплообмен в жидком ядре Земли. Рассчитаны критические числа Релея.

The paper presents the results on convective heat transfer in the liquid core of the Earth with internal sources of heat. For temperature the boundary conditions of I, II, III sort are considered. The influence of internal heat sources on hydrodynamics and heat transfer in the liquid Earth's core is investigated. The critical Reynolds numbers are calculated.

Ключевые слова: теплообмен, конвекция, жидкое ядро Земли.

Введение

Современная теория геомагнитного поля предполагает, что в жидком ядре Земли происходит непрерывное перемещение вещества [1]. В настоящее время не вызывает сомнений, что тепловая или гравитационная конвекция в земном ядре является именно той причиной, которая приводит к созданию геомагнитного поля [2]. Теория геомагнитного поля получила название гидромагнитного динамо (ГД) по аналогии с действием обычной динамомашины с самовозбуждением. Математическая трактовка теории вихревого движения в ядре и возникновения в нем индукционных токов чрезвычайно затруднена и в общем виде до сих пор не получила своего решения [1], так как решение уравнений магнитной гидродинамики сопряжено с большими трудностями. Поэтому теория ГД, в основном, развивается путем исследования кинематических моделей, в которых скорость движения жидкости считается заданной, а определяется только магнитное поле [3].

Согласно этой концепции такой подход можно сравнить с электродинамикой слабых полей, которая ограничивается случаем заданных гидродинамических скоростей и не учитывает влияния электромагнитных полей на

движение [3]. В этой связи исследование гидродинамики жидкого ядра Земли при конвективном теплообмене без учета магнитных сил представляет самостоятельный интерес, который в дальнейшем позволит оценить влияние магнитного поля на гидродинамику и обратно при решении системы уравнений магнитной гидродинамики (уравнения Навье-Стокса, энергии и магнитной индукции).

С учетом сказанного в работе рассматривается конвективный теплообмен с учетом внутренних источников в жидком ядре Земли, которое считается неэлектропроводной ньютоновской жидкостью. Используется приближение Буссинеска. Ускорение свободного падения направлено к центру ядра. Жидкое ядро рассматривается как сферический слой, заключенный между внутренним твердым ядром Земли и граничной зоной мантии с жидким ядром [4].

Математическая постановка задачи

Математическая модель в переменных температура - вихрь - функция тока в сферической системе координат с учетом симметрии по долготе описывается следующими безразмерными уравнениями [5]:

$$\frac{1}{Ho}\frac{\partial 9}{\partial \tau} + \frac{1}{r^{2}\sin\theta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial 9}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial 9}{\partial \theta} \right) =$$

$$= \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^{2} 9}{\partial r^{2}} + \frac{2}{r} \frac{\partial 9}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2} 9}{\partial \theta^{2}} + \frac{ctg\theta}{r^{2}} \frac{\partial 9}{\partial \theta} + Q_{v} \right),$$

$$\frac{1}{Ho}\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{r^{2}\sin\theta} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \omega ctg\theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] =$$

$$= \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^{2} \omega}{\partial r^{2}} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2} \omega}{\partial \theta^{2}} + \frac{ctg\theta}{r^{2}} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r^{2}\sin^{2}\theta} \right] - \frac{Gr}{Re^{2}} \frac{1}{r} \frac{\partial 9}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial^{2} \Psi}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2} \Psi}{\partial \theta^{2}} - \frac{ctg\theta}{r^{2}} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -\omega rsin\theta.$$
(1)
(1)
(1)
(1)
(1)
(1)
(2)
(2)
(3)

Для температуры рассматривались граничные условия I, II и III рода. Граничные условия I рода:

$$\vartheta|_{\Gamma_1} = 1; \vartheta|_{\Gamma_2} = 0; \\ \vartheta = (T - T_2)/(T_1 - T_2); \\ Gr = \frac{g\beta(T_1 - T_2)r_1^3}{\nu^2}; \\ Q_\nu = \frac{q_\nu r_1^2}{\lambda(T_1 - T_2)},$$

где λ – коэффициент теплопроводности вещества ядра Земли; $q_{\rm v}$ – внутренний источник теплоты.

Граничные условия II рода:

 на внутренней границе ядра задается тепловой поток q по закону Фурье, а на внешней границе – температура (или наоборот)

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 1; \vartheta\Big|_{\Gamma_2} = 0. \ \exists \text{десь} \ \vartheta = (T - T_2)\lambda/(qr_1); \ Gr = \frac{g\beta qr_1^4}{\nu^2\lambda}; \ Q_\nu = \frac{q_\nu r_1}{q}$$

Граничные условия III рода:

 на границах ядра теплообмен осуществляется по закону Ньютона-Рихмана

$$\begin{split} \mathbf{B}\mathbf{i}_{1}\vartheta\Big|_{\Gamma_{1}} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{1}}; \frac{\partial \vartheta}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{2}} = \mathbf{B}\mathbf{i}_{2}\left(1-\vartheta\Big|_{\Gamma_{2}}\right), \ \mathbf{B}\mathbf{i}_{k} = \frac{\alpha_{k}r_{1}}{\lambda}; k=1,2.\\ \vartheta &= \frac{T_{c1}-T}{T_{c1}-T_{c2}}; \mathbf{G}\mathbf{r} = -\frac{g\beta r_{1}^{3}(T_{c1}-T_{c2})}{\nu^{2}}; \mathbf{Q}_{v} = -\frac{q_{v}r_{1}^{2}}{\lambda(T_{c1}-T_{c2})}. \end{split}$$

 T_{c1}, T_{c2} – заданные размерные температуры жидкости, которая омывает границу ядра Γ_1 (изнутри) и Γ_2 (извне) соответственно; α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи со стороны жидкости, омывающей границы Γ_1 и Γ_2 соответственно. Следует отметить, что возможна комбинация граничных условий для температуры.

Для решения задачи (1)-(3) в качестве начальных условий задавались нулевые значения функции тока, напряженности вихря и температуры, либо стационарное распределение температуры с источником тепла (или без, если он отсутствовал) в случае чистой теплопроводности.

Граничные условия для функции тока:

$$\Psi\Big|_{\Gamma_{1,2}} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}\Big|_{\Gamma_{1,2}} = 0; \quad \Psi\Big|_{\theta=0,\pi} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}\Big|_{\theta=0,\pi} = 0$$

Граничные условия для напряженности вихря на стенках предполагают линейное изменение ω по нормали, а на оси симметрии взято из работы [5]. Для оценки интенсивности естественной конвекции рассчитывались локальные и осредненные числа Нуссельта:

- локальные
$$\operatorname{Nu}_{in} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\Big|_{\Gamma_1}, \operatorname{Nu}_{out} = -\frac{r_2}{r_1}\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\Big|_{\Gamma_2};$$

- осредненные $\overline{\operatorname{Nu}}_{in} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{Nu}_{in} \sin \theta d\theta; \overline{\operatorname{Nu}}_{out} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{Nu}_{out} \sin \theta d\theta.$

Тестирование осредненных чисел Нуссельта осуществлялось для режима теплопроводности. Эти соотношения приведены ниже:

– граничные условия I рода на обеих границах Γ_1 , Γ_2 : $\vartheta|_{\Gamma_1} = 1; \vartheta|_{\Gamma_2} = 0.$

Ì

$$\begin{split} \frac{\overline{\mathrm{Nu}_{\mathrm{in}}}}{\overline{\mathrm{Nu}_{\mathrm{out}}}} &= \frac{\frac{Q_{v}}{3} + \frac{1 - \frac{Q_{v}}{6} \left(R_{0}^{2} - 1\right)}{R_{0} - 1} R_{0}}{\frac{Q_{v}}{3} R_{0}^{2} + \frac{1 - \frac{Q_{v}}{6} \left(R_{0}^{2} - 1\right)}{R_{0} - 1}}, R_{0} = r_{2}/r_{1}. \\ \overline{\mathrm{При}} & Q_{v} = \frac{q_{v}r_{1}^{2}}{\lambda(T_{1} - T_{2})} = 0; \overline{\mathrm{Nu}_{\mathrm{in}}} = R_{0} \overline{\mathrm{Nu}_{\mathrm{out}}}. \\ - \mathrm{граничные условия II и I рода:} & -\frac{\partial 9}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{1}} = 1; 9\Big|_{\Gamma_{2}} = 0; \\ \overline{\mathrm{Nu}_{\mathrm{in}}} / \overline{\mathrm{Nu}_{\mathrm{out}}} = \left[l/R_{0} - Q_{v} \left(l/R_{0} - R_{0}^{2} \right) / 3 \right]^{-1}. \\ \overline{\mathrm{При}} & Q_{v} = q_{v}r_{1}/q = 0; \overline{\mathrm{Nu}_{\mathrm{in}}} = R_{0} \overline{\mathrm{Nu}_{\mathrm{out}}}. \\ - \mathrm{граничные условия I и III рода:} & 9\Big|_{\Gamma_{1}} = 0; \frac{\partial 9}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{2}} = \mathrm{Bi}_{2} \left(l - 9\Big|_{\Gamma_{2}} \right); \\ \frac{\overline{\mathrm{Nu}_{\mathrm{in}}}}{\overline{\mathrm{Nu}_{\mathrm{out}}}} = \frac{\left[1 + \frac{Q_{v}}{6} \left(1 - R_{0}^{2} - \frac{2R_{0}}{\mathrm{Bi}_{2}} \right) \right] \frac{R_{0}}{R_{0} - 1 + l/R_{0}\mathrm{Bi}_{2}} + \frac{Q_{v}R_{0}^{2}}{3}. \\ \\ \overline{\mathrm{Nu}_{\mathrm{out}}} = \frac{\left[1 + \frac{Q_{v}}{6} \left(1 - R_{0}^{2} - \frac{2R_{0}}{\mathrm{Bi}_{2}} \right) \right] \frac{1}{R_{0} - 1 + l/R_{0}\mathrm{Bi}_{2}} + \frac{Q_{v}R_{0}^{2}}{3}. \\ \\ \overline{\mathrm{При}} & Q_{v} = \frac{q_{v}r_{1}^{2}}{\lambda(T_{1} - T_{c2})} = 0; \overline{\mathrm{Nu}_{\mathrm{in}}} = R_{0} \overline{\mathrm{Nu}_{\mathrm{out}}}. \\ \\ - \mathrm{граничные условия III и I рода: } \mathrm{Bi}_{1}9\Big|_{\Gamma_{1}} = \frac{\partial 9}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{1}}; 9\Big|_{\Gamma_{2}} = 1; \\ \end{array}$$

$$\begin{split} \frac{\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{in}}}{\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{out}}} = & \frac{\left[1 + \frac{\mathrm{Q}_{\mathrm{v}}}{6} \left(1 - \mathrm{R}_{0}^{2} - \frac{2}{\mathrm{Bi}_{1}}\right)\right] \frac{\mathrm{R}_{0}}{(\mathrm{l}/\mathrm{Bi}_{1})\mathrm{R}_{0} + \mathrm{R}_{0} - 1} + \frac{\mathrm{Q}_{\mathrm{v}}}{3}}{\left[1 + \frac{\mathrm{Q}_{\mathrm{v}}}{6} \left(1 - \mathrm{R}_{0}^{2} - \frac{2}{\mathrm{Bi}_{1}}\right)\right] \frac{1}{(\mathrm{l}/\mathrm{Bi}_{1})\mathrm{R}_{0} + \mathrm{R}_{0} - 1} + \frac{\mathrm{Q}_{\mathrm{v}}\mathrm{R}_{0}^{2}}{3}}{\mathrm{\Pi}\mathrm{p}\mathrm{\mu}} \\ \Pi\mathrm{p}\mathrm{\mu} \qquad \mathrm{Q}_{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{q}_{\mathrm{v}}\mathrm{r}_{1}^{2}}{\lambda(\mathrm{T}_{\mathrm{cl}} - \mathrm{T}_{2})} = 0; \overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{in}} = \mathrm{R}_{0}\,\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{out}}. \end{split}$$

Система дифференциальных уравнений (1)-(3) решалась численно [6]. **Результаты расчетов**

В результате численного решения задачи были получены поля температуры, функции тока, локальные и осредненные числа Нуссельта. В качестве



примера рассматривался установившийся режим: Re = Pe = 1; $Gr/Re^2 = 10^3$ [1, 2, 4].

Результаты для отношения r₂/r₁=2 представлены на рис. 1-3. На рис. 1 изображены расчетные поля для температурных граничных условий І рода. Число Релея $Ra = 10^3$. Теплообмен в ядре осуществляется теплопроводностью (рис. 1, *a*). Поле температуры для всех трех режимов (Q_v/Pe=0;1;2) представляет собой концентрические окружности, сгущающиеся у внутренней границы ядра (рис. 1, *a*, A для Q_v /Pe=0, здесь $\overline{Nui}_{in} > \overline{Nu}_{out}$. Распределение температуры по толщине ядра представлено кривой 1 на рис. 1, а, В) и сгущающиеся у его внешней границы для значений Q_v/Pe=1; 2. Здесь происходит возрастание чисел Нуссельта на внешней границе ядра, Nu_{out} > Nu_{in}. Изменение температуры по толщине прослойки представлено кривой 2 для Q_v/Pe=1 и кривой 3 для $Q_v/Pe=2$ на рис. 1, a, B. И хотя в ядре для всех режимов имеет место четырехъячеистое течение (рис. 1, а, Б), интенсивность его мала, максимальное значение функции тока $\left|\Psi_{max}\right|$ порядка 10⁻¹⁴, 10⁻¹⁵. При Q_v/Pe=1 $|\Psi_{\text{max}}| = 1,44 \cdot 10^{-14}, \qquad \overline{\text{Nu}_{\text{in}}} = 1,323; \ \overline{\text{Nu}_{\text{out}}} = 1,829, \qquad a$ для $O_v/Pe=2$

 $|\Psi_{\text{max}}| = 2,23 \cdot 10^{-14}$, $\overline{\text{Nu}}_{\text{in}} = 0,666$; $\overline{\text{Nu}}_{\text{out}} = 2,662$. Для результатов рис. 1, *а* локальные числа Нуссельта совпадают с осредненными. Последние, полученные при численном решении задачи, с абсолютной погрешностью 10^{-2} удовлетворяют тестовым соотношениям для соответствующих режимов ($Q_v=0$ и $Q_v\neq 0$). На рис. 1, *б* приведены расчетные поля для значения числа Релея Ra=3000 при отсутствии внутреннего источника тепла. Как видно из рисунка теплообмен для этого режима осуществляется конвекцией.

Поле температуры приобретает ярко выраженный для развитой конвекции характер. Интенсивность движения и теплообмена возрастает, о чем свидетельствует увеличение функции тока ($|\Psi_{max}|=3,29$) и осредненных чисел Нуссельта ($\overline{\text{Nu}}_{\text{in}} = 2,924$; $\overline{\text{Nu}}_{\text{out}} = 1,478$). На внутренней и наружной поверхности ядра образуются тепловые пограничные слои. Изменение локальных чисел Нуссельта носит "волновой характер" с симметрией относительно угла $\theta=90^{\circ}$ (рис. 1, δ , В). Значение угла $\theta=90^{\circ}$ соответствует "Южному полюсу", а $\theta=180^{\circ}$ – "Северному полюсу". Картина течения в слое та же, что и для рассмотренных выше режимов (рис. 1, a, δ).

Значение критического числа Релея Ra^{*} [7], отвечающее области устойчивости может быть численно найдено непосредственно из дифференциальной формулировки задачи. В этой связи с целью нахождения критического числа Релея были проделаны численные расчеты, которые позволили определить Ra^{*}~2000. Можно полагать, что найденное критическое число представляет нижний уровень спектра неустойчивости, определяющий начало конвекции в слое. Известно, что для плоского горизонтального слоя с твердыми

границами минимальное критическое число Релея на основном уровне неустойчивости равно Ra^{*} = 1707,762 [7]. Возможно, различие в значениях критических чисел связано с кривизной рассматриваемой области.



Рис. 1. Расчетные поля: *a* - А - поле температуры; Б - функция тока; В - распределение температуры по толщине ядра; Ra=1000; $|\Psi_{max}| = 6,60 \cdot 10^{-15}$; $\overline{Nu}_{in} = 1,979$;

Nu_{out} = 0,996; *б* - А, Б - поле и распределение температуры по толщине ядра; В - распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границах ядра в зависимости от широты; 3000; 3,29; 2,924; 1,478; *в* - А, Б - поле и распределение температуры по толщине ядра; В - распределение локальных чисел Нуссельта в зависимости от широты; 2300; 0,78; 2,096; 1,060

На рис. 1, *в* приведены результаты расчета для Ra=2300 свидетельствующие о том, что при Ra > Ra^{*}=2000 в слое начинает развиваться конвективный механизм переноса энергии. Поле температуры уже отлично от концентрических окружностей (рис. 1, *в*, A), по толщине ядра имеет место



трических окружностей (рис. 1, e, A), по толщине ядра имеет место расслоение температуры (рис. 1, e, Б), изменение локальных чисел Нуссельта носит "волновой" характер, но для данного режима (по сравнению с результатом рис. 1, δ , B) кривые Nu_{in} и Nu_{out} не пересекаются.

Были проведены расчеты полей для граничных условий вида $\frac{\partial \vartheta}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = -1; \vartheta\Big|_{\Gamma_2} = 0$. Анализ полученных результатов показал, что для

 $Q_v/Pe=0$ теплообмен осуществляется теплопроводностью, локальные и осредненные числа Нуссельта совпадают между собой. При $Q_v/Pe=1$ температура на внутренней границе ядра возрастает. Поле температуры представляет собой концентрические окружности аналогичные приведенным на рис. 1, *a*, A, сгущающиеся у внутренней границы при $Q_v=0$ ($\overline{Nu}_{in} > \overline{Nu}_{out}$), а для $Q_v \neq 0$ ($\overline{Nu}_{out} > \overline{Nu}_{in}$) – у внешней. Интенсивность конвекции незначительна, во всех случаях имеет место двухвихревое течение. Рассчитанные осредненные числа Нуссельта с абсолютной погрешностью 10⁻² удовлетворяют тестовым соотношениям. Для данного типа граничных условий и $Q_v=0$ численно найдено значение критического числа Релея Ra^{*}~3300.

На рис. 2 показаны результаты для $Q_v=0$; Ra=4000 > Ra^{*}. В ядре преобладает конвективный механизм переноса энергии. Поле температуры отлично от концентрических окружностей, по толщине ядра имеет место расслоение температуры, на границах ядра формируются тепловые пограничные слои.



Рис. 2. Расчетные поля: Q_v/Pe=0; А, Б - поле и распределение температуры; В - распределение локальных чисел Нуссельта в зависимости от широты; $|\Psi_{max}| = 1,188$;

$$Nu_{in} = 1,079$$
; Nu_{out} = 0,544

Изменение локальных чисел Нуссельта (особенно на внешней границе) носит "волновой" характер. В слое имеют место четыре вихря с интенсивностью $|\Psi_{max}| = 1,188$. Численно рассчитанные осредненные числа Нуссельта превышают соответствующие тестовые значения для режима теплопроводности.

Были получены результаты для граничных условий вида ($\vartheta|_{\Gamma_2} = 0$; $Q_v/Pe=1$):

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{1}} = -\mathfrak{P}|_{\Gamma_{1}}; \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{1}} = -2\mathfrak{P}|_{\Gamma_{1}}; \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{1}} = -3\mathfrak{P}|_{\Gamma_{1}}$$

Для первого условия перенос энергии в прослойке осуществляется теплопроводностью. Для второго условия теплообмен осуществляется конвекцией, происходит перестройка поля температуры, особенно в области экватора и полюсов. В области имеет место четырехъячеистое течение. Изменение локальных чисел Нуссельта носит "волновой" характер, причем кривые Nu_{in} и Nu_{out} различаются незначительно, но еще не пересекаются. Дальнейший рост мощности подводимого изнутри теплового потока ($Bi_1 = 3$; рис. 3) увеличивает интенсивность конвекции $|\Psi_{max}| = 4,47$, перестройка поля температуры в прослойке продолжается, что приводит к возрастанию чисел Нуссельта. Кривые Nu_{in} , Nu_{out} (рис. 3, В) имеют общие точки, характеризующиеся равенством локальных тепловых потоков. Теплообмен в ядре осуществляется конвекцией.



Рис. 3. Расчетные поля: А, Б - поле и распределение температуры по толщине ядра; В - распределение локальных чисел Нуссельта в зависимости от широты; $|\Psi_{max}| = 4,47; \ \overline{Nu}_{in} = 10,413; \ \overline{Nu}_{out} = 6,378$

Результаты для отношения г₂/г₁=3 для граничных условий I рода представлены на рис. 4. Перенос энергии в ядре осуществляется конвекцией, о чем можно судить по характерному для конвективного теплообмена изменению поля и распределению температуры (рис. 4, *a*, A, Б и 4, *б*, A, Б). Интенсивность движения и теплоперенос увеличиваются, когда в ядре имеют место внутренние источники: при $Q_v=0$ $|\Psi_{max}|=8,64$; при $Q_v=1$ $|\Psi_{max}|=11,22$. Наличие внутренних источников теплоты увеличивает градиенты температуры у внешней границы ядра (рис. 4, *б*, A) по сравнению с результатом, показанным на рис. 4, *a*, A ($Q_v=0$), что приводит к возрастанию чисел Нуссельта на внешней поверхности. Расслоение температуры по толщине слоя становится более заметным для $Q_v=1$ (рис. 4, *б*, Б). Изменение чисел Нуссельта носит



"волновой" характер (рис. 4, *a*, Γ и 4, *б*, В). Для рассмотренных режимов имеет место развитое четырехъячеистое течение (рис. 4, *a*, В), причем в экваториальной области $\Theta \sim 90^{\circ}$ вихри более интенсивные, чем в области полюсов $\Theta \sim 0$: 180°.



Рис. 4. Расчетные поля: *a* - A, Б - поле и распределение температуры; В - функция тока; Г- распределение локальных чисел Нуссельта; $Q_v/Pe = 0; |\Psi_{max}| = 8,64$; $\overline{Nu}_{in} = 2,740; \overline{Nu}_{out} = 0,922; \ 6$ - A, Б - поле и распределение температуры; В - распределение локальных чисел Нуссельта в зависимости от широты; 1; 11,22; 1,624; 3,476

Критическое число Релея для $Q_v=0$, полученное в результате численного эксперимента, составляет величину Ra^{*}~300. Расчет Шермана [7] для шаровой полости (не прослойки, как в данной работе) привел к значению Ra^{*} = 745,9. В табл. 7 [7] приведено критическое число Релея для горизонтального цилиндра Ra^{*} = 408,2. В табл. 4 [7] для некоторых вариантов граничных условий (к сожалению ни один не подходит для сравнения с результатами настоящей работы) даны критические значения Ra^{*} горизонтального слоя, диапазон изменения которых 120-816,4. В этой связи анализ и сопоставление порядка величин критических чисел Релея Ra^{*}, численно рассчитанных в данной работе и приведенных в [7], позволяет судить о достоверности полученных результатов.

Были проведены расчеты для граничных условий вида: $\frac{\partial \vartheta}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = -1; \vartheta\Big|_{\Gamma_2} = 0$. Также как и в предыдущем случае для $Q_v=0$ критиче-

Соловьев С. В.

ВЕСТНИК ТОГУ. 2012. № 2 (25)

ское число Релея Ra^{*}~300. Численный эксперимент для граничных условий вида: $\vartheta|_{\Gamma_1} = 1; \frac{\partial \vartheta}{\partial n}|_{\Gamma_2} = -2\vartheta|_{\Gamma_2}; \frac{\partial \vartheta}{\partial n}|_{\Gamma_2} = -3\vartheta|_{\Gamma_2}$ позволил для Q_v=0 рассчитать критическое число Релея Ra^{*}~250.

Заключение

Из анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы:

 наличие внутренних источников теплоты интенсифицирует конвекцию в ядре;

- при г₂/г₁=2; Ra = 10^3 теплообмен в слое осуществляется теплопроводностью. Для граничных условий I рода в области формируются четыре конвективные ячейки, а при подводе тепла снизу – две. При г₂/г₁=3; Ra = 10^3 в ядре развитая конвекция, картина течения представлена четырьмя вихрями;

- для разных типов граничных условий и толщины слоя рассчитаны критические числа Релея.

Предложенная модель и полученные результаты могут быть использованы при исследовании гидромагнитного динамо для электродинамики слабых полей, а также дополняют существующую информацию о движении и теплообмене в жидком ядре Земли.

Библиографические ссылки

1. Яновский Б.М. Земной магнетизм. Л.: Изд-во Ленигр. ун-та, 1978. - 592 с., ил.

2. Жарков В.Н., Трубицын В.П., Самсоненко Л.В. Физика Земли и планет. Фигуры и внутреннее строение. М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1971. - 384 с.

3. *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо /Пер. с англ. А.Г.Муслимова, Н.А.Силантьева; под ред. А.З.Доминова. - М.: Мир, 1984. - 314 с.

4. Жарков В.Н. Внутреннее строение Земли и планет. М.: Наука. Гл. ред. физ.мат.лит., 1983. - 414 с.

5. Соловьев С.В., Гринкруг Л.С., Цой Р.И. Моделирование теплообмена в ядре с учетом джоулевой диссипации. Вестник Тихоокеанского государственного университета. – 2010. - №2 (17). – С. 19-28.

6. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 152 с., ил.

7. Гершуни Г.З., Жуковицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. - 392 с.