УДК 338:001.891.573

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕГИОНАЛЬНОЙ МАКРОЭКОНОМИКИ

Стригунов В. В. – канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой «Информатика», e-mail: strigunov@mail.ru (ТОГУ)

На основе решения задачи оптимального управлении динамикой региональной макроэкономики проводится исследование оптимальных траекторий. Получены выражения траекторий сбалансированного роста для размерных макроэкономических переменных, инвариант исследуемой макроэкономической модели.

On the basis of the solution of a task optimum management of regional macroeconomic dynamics research of optimum trajectories is carried out. Expressions of trajectories of the balanced growth for dimensional macroeconomic variables, an invariant of studied macroeconomic model are obtained.

Ключевые слова: математическая модель, макроэкономическая система, оптимальное управление, оптимальные траектории, прогнозирование.

Введение

Пусть $w(t) = \dfrac{W(t)}{g(t)\,N(t)}$ – среднедушевое потребление, отнесенное к среднегодовому доходу одного работника. Рассмотрим множество функций $w(t)$, удовлетворяющих неравенству

$$\pi_1 B(x(t)) \le w(t) \le \pi_2 B(x(t)),\ \text{для}\ \ \forall t \in [0, T], \tag{1}$$

которое имеет в экономике содержательный смысл [1]. Здесь

$$B(x) = b\left(1 - e^{-x}\right) + (1-b)\,x\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) \tag{2}$$

производственная В-функция [2], $x(t) = B\dfrac{\mu K(t)}{g(t)\,N(t)}$ – фазовая переменная, $0 < b < 1$, $B > 0$ – постоянные В-функции, $0 < \pi_1 < \pi_2$ – постоянные, $0 < T < \infty$ – конечный горизонт планирования.

Введем функцию управления

$$u(t) = \frac{w(t)}{B(x(t))}, \tag{3}$$

где функция $B(x)$ строго вогнутая на полупрямой $[0, \infty)$, имеет асимптоту $B(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$.

Начальное и конечное состояния фазовой переменной $x(t)$ удовлетворяют неравенству $0 < x_1, x_2 < \infty$. Для любого $t \in [0, T]$, $B(x(t)) > 0$. Обозначим через $\overline{R}_u$ – множество значений u функции управления $u(t)$, при $0 \le t \le T$; $\overline{R}$ – множество вещественных чисел отрезка $[\pi_1, \pi_2]$. Учитывая (1), (3), введем множество функций допустимых управлений

$$\overline{U} = \{u(t) \in C[0, T]:\ \overline{R}_u = \overline{R}\}. \tag{4}$$

При использовании управления $u(t)$, уравнение для фазовой переменной $x(t)$ имеет вид [1]:

$$\frac{dx}{dt} = a_0\, B(x) - \lambda\, x - p\, B(x) u, \tag{5}$$

здесь $x(t) \in C^1[0, T]$; a_0, λ, p – положительные постоянные.

В работах [3, 4] исследована и решена задача нахождения оптимального управления (функции $u^*(t) \in \overline{U}$), которое переводит экономическую систему (5) из одного фиксированного состояния $x(0) = x_1$ в другое фиксированное состояние $x(T) = x_2$ при условии максимизации функционала благосостояния

$$J(u) = \int_0^T B^{\alpha}(x(t)) u^{\alpha}(t)\, dt. \tag{6}$$

Здесь α – постоянная, $0 < \alpha < 1$.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\max_{u(t) \in \overline{U}} \int_0^T B^{\alpha}(x(t)) u^{\alpha}(t)\, dt \\ &\frac{dx}{dt} = a_0\, B(x) - \lambda\, x - p\, B(x) u \\ &x(0) = x_1, \qquad x(T) = x_2 \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Разработанный алгоритм решения краевой задачи оптимального управления для случая А при $x_{\min} < x_1 < x_2 < x_s$ и случая В при $x_s < x_2 < x_1 < x_{\max}$ [4] реализован в программном комплексе [5].

Численные исследования оптимальных траекторий

Рассмотрим результаты численных исследований оптимальных траекторий развития динамики региональной макроэкономики на примере Хабаровского края. В нашем примере вычисления дают [4]:

$$x_s = 1.585314\,,\ \psi_s = 7.0876\,.$$

Исходные данные вариантов x_1, x_2, рассчитанные значения сопряженной переменной ψ^1, ψ^2, интеграла благосостояния (6), времени перехода из состояния x_1 в состояние x_2 приведены в табл. 1, 2.

Таблица 1

Вариант	x_1	x_2	ψ^1	ψ^2	J	T
1	0.33	1.585304	23.596304	7.087574	111.49	39.17
2	0.33	1.4	23.432188	7.103178	19.24	9.92
3	0.33	1.2	22.827570	7.161670	12.84	7.44
4	0.33	1.0	21.658529	7.279479	9.05	5.74
5	0.33	0.8	19.745293	7.487083	6.19	4.25

Таблица 2

Вариант	x_1	x_2	ψ^1	ψ^2	J	T
1	3.5	1.585324	4,362504	7.087574	121.44	34.63
2	3.5	1.9	4,458129	7.125609	32.68	7.57
3	3.5	2.2	4,696151	7.223321	24.67	5.69
4	3.5	2.5	5,044209	7.374619	18.75	4.44
5	3.5	2.8	5,480861	7.580301	13.79	3.48

На рис. 1 в плоскости ψ, x показаны оптимальные траектории $x^*(\psi^*)$ между начальным (ψ^1, x_1) и конечным (ψ^2, x_2) состояниями экономической системы случаев A и B. Номера кривых соответствуют номерам вариантов табл. 1, 2.

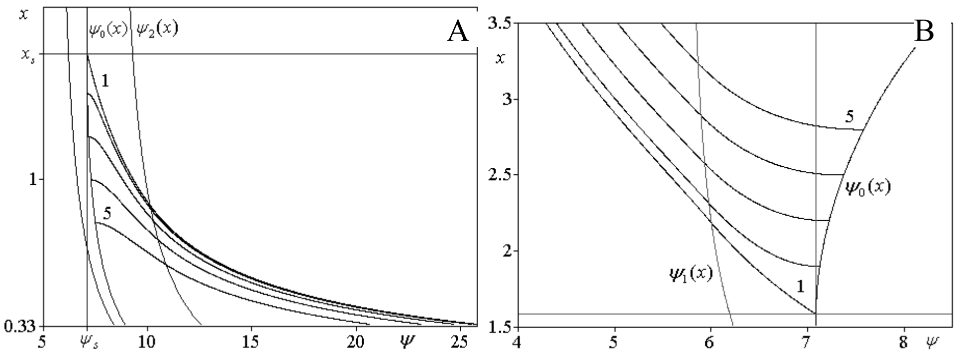

Рис. 1.

На рис. 2, 3 показаны оптимальные траектории как функции времени $x^*(t)$ между начальным и конечным состояниями системы, оптимальные потребления $w^*(t) = B(x^*(t))u^*(t)$ для вариантов 1–5 табл. 1, 2, соответственно кривыми 1–5.

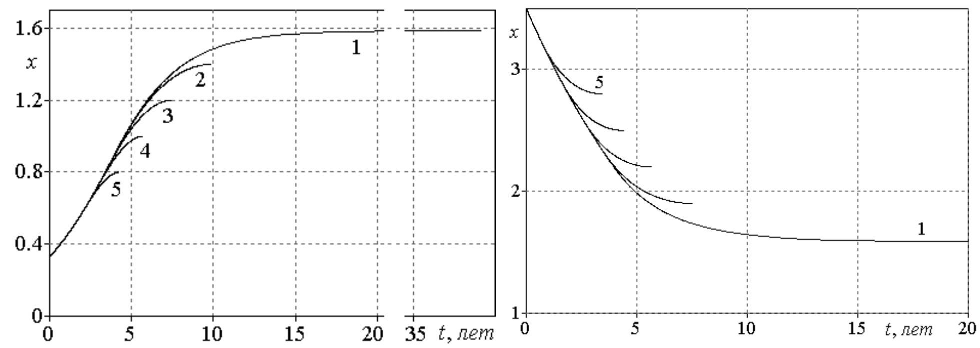

Рис. 2.

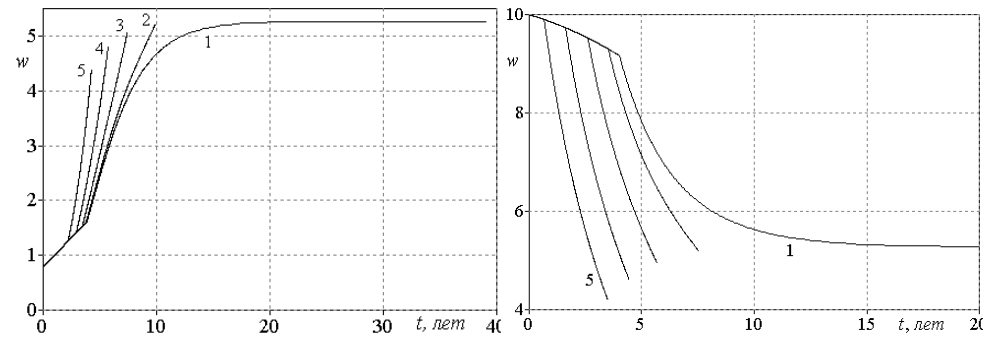

Рис. 3.

Из анализа оптимальных кривых рис. 2 можно отметить, что оптимальные траектории $x^*(t)$, оптимальные потребления $w^*(t)$ (см. рис. 3) в каждом из случаев A и B имеют два характерных участка:

– I-ый участок соответствует для случая A оптимальному потреблению, находящемуся на предельно низком уровне, определяемом фазовой переменной $x^*(t)$ в соответствии с зависимостью $w^*(t) = \pi_1 B\left(x^*(t)\right)$ (см. рис. 3), или потреблению, равному максимально возможному, определяемому фазовой переменной $x^*(t)$ по формуле $w^*(t) = \pi_2 B\left(x^*(t)\right)$ для случая B;

– II-ой участок оптимальных траекторий $x^*(t)$ характерен тем, что величина оптимального потребления $w^*(t)$ определяется сопряженной переменной $\psi(t)$ согласно зависимости: $w^*(t) = \pi \ \psi^{-\frac{1}{1-\alpha}}(t)$. Из анализа кривых $w^*(t)$ рис. 3 видно, что решающий вклад в значение интеграла благосостояния на оптимальных траекториях происходит на втором участке.

Как видно, при достижении оптимальной траекторией $x^*(t)$ h-окрестности особой точки x_s (в наших расчетах $h = 10^{-5}$), фазовая переменная $x^*(t)$, потребление $w^*(t)$ выходят на стационарные значения: $x^*(t) = x_r = x_s = \underset{t}{const}$, $w^*(t) = w_r = w_s = \pi \psi_s^{-\frac{1}{1-\alpha}} = \underset{t}{const}$. Выражая безразмерные переменные x^*, w^* через размерные, получаем, что в h-окрестности особой точки (ψ_s, x_s) имеют место инварианты:

$$B \frac{\mu K(t)}{g(t) N(t)} = x_r = \underset{t}{const} \ , \tag{8}$$

$$\frac{W(t)}{g(t) N(t)} = w_r = \underset{t}{const} \ . \tag{9}$$

Рассмотрим задачи Коши для уравнений, определяющих средний годовой доход работника $g(t)$, среднюю численность работников, участвующих в производственном процессе региона $N(t)$, исследуемой модели региональной макроэкономики:

$$\frac{1}{g} \ \frac{dg}{dt} = \tau \ , \qquad g(0) = g_0 \ , \tag{10}$$

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \nu \ , \qquad N(0) = N_0 \ . \tag{11}$$

Введем t_r – время достижения оптимальными кривыми 1 вариантов А и В h-окрестности особой точки x_s. Тогда из уравнений (10), (11) следует:

– для $0 \le t < t_r$

$$g(t) = g_0 e^{\tau t} \ , \tag{12}$$

$$N(t) = N_0 e^{\nu t}; \tag{13}$$

– для $t \ge t_r$

$$g(t) = g_r e^{\tau (t - t_r)} \ , \tag{14}$$

$$N(t) = N_r e^{\nu (t - t_r)}, \tag{15}$$

где $g_r = g_0 e^{\tau t_r}$, $N_r = N_0 e^{\nu t_r}$. Поэтому для $t \ge t_r$ можем записать

$$g(t)\,N(t) = g_r N_r\, e^{(\nu+\tau)(t-t_r)}, \qquad (16)$$

где N_r, g_r – число рабочих, занятых в производстве, и среднегодовой доход работника в момент достижения региональной экономической системой h-окрестности особой точки.

Из определения инвариантов (8), (9) и выражения (16) следует, что в h-окрестности особой точки (ψ_s, x_s) размерные макроэкономические переменные $K(t)$ – основной капитал, $W(t)$ – непроизводственное потребление, $Y(t)$ – валовой региональный продукт, $I(t)$ – инвестиции в производственный процесс переходят на стационарные "траектории сбалансированного роста":

$$\left.\begin{aligned}
&K(t) = x_s \frac{1}{B\mu} g_r\, N_r\, e^{(\nu+\tau)(t-t_r)}\\
&W(t) = \pi \psi_s^{-\frac{1}{1-\alpha}}\, g_r\, N_r\, e^{(\nu+\tau)(t-t_r)}\\
&Y(t) = C_\infty\, B(x_s)\, g_r\, N_r\, e^{(\nu+\tau)(t-t_r)}\\
&I(t) = \left(q\, C_\infty\, B(x_s) - \pi \psi_s^{-\frac{1}{1-\alpha}} \right) g_r\, N_r\, e^{(\nu+\tau)(t-t_r)}\\
&N(t) = N_r\, e^{\nu(t-t_r)}\\
&g(t) = g_r\, e^{\tau(t-t_r)}
\end{aligned}\right\} . \qquad (17)$$

В предложенной модели на траекториях сбалансированного роста темпы роста размерных макроэкономических переменных различные. Для переменной $N(t)$ темп роста равен ν, для $g(t)$ темп роста τ, для $K(t)$, $W(t)$, $Y(t)$, $I(t)$ темп роста $\nu+\tau$.

Длительное пребывание экономической системы на стационарных траекториях сбалансированного роста (в h-окрестности особой точки (ψ_s, x_s)) мало оправдано, т. к. за время ~ 30 лет могут быть получены значительные результаты в научно-техническом прогрессе, могут появиться новые более эффективные технологии, которые не учитываются в математической модели производственного процесса. Стратегия макроэкономического прогнозирования должна строиться как череда "краткосрочных" прогнозов ($T \sim 5$ лет) с постоянным уточнением параметров производственного процесса.

Также при макроэкономическом прогнозировании актуальной является проблема моделирования новых научных достижений, на их основе новых эффективных технологий (повышение качества основного и живого капитала, участвующих в производственном процессе).

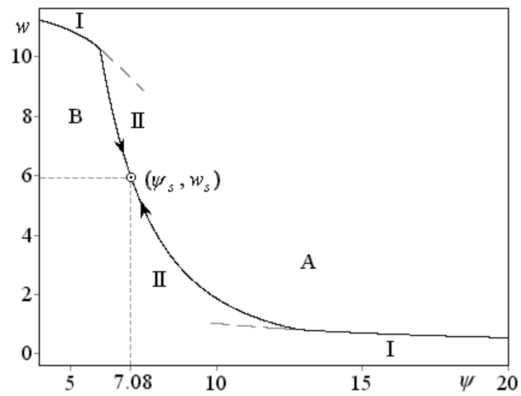

Рис. 4.

На рис. 4 в переменных ψ^*, w^* показаны оптимальные потребления $w^*(\psi^*)$ для вариантов 1 для случаев A и B. Кривая A соответствует случаю A, кривая B – случаю B. Здесь же показаны обсуждавшиеся выше первый и второй участки кривых.

С точки зрения макроэкономики наиболее содержательным является нахождение экономической системы на вторых участках, когда оптимальное потребление w^* больше минимально допустимого и меньше максимально возможного.

Инвариант макроэкономической системы

Как известно [6], если задача является автономной, то функция Гамильтона постоянна в точках оптимальных траекторий

(18)

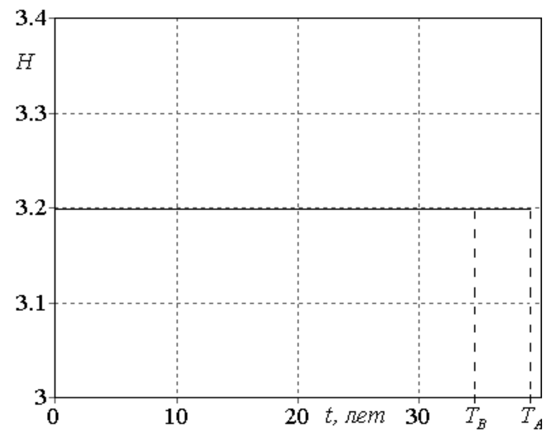

Рис. 5.

На рис. 5 представлена зависимость функции Гамильтона $H(t)$ от времени для вариантов 1 случая А и В (см. табл. 1, 2). Время достижения конечного состояния (h–окрестности) для случая А равно $T_A = 39.17$ лет, для случая В равно $T_B = 34.63$ года.

В области Ψ [4] сопряженная переменная является однозначной функцией оптимального потребления: $\psi = p^{-1}\, \alpha\, w^{*\,\alpha-1}$. На части каждой оптимальной траектории $a_{i_1} \subset \Psi$, $b_{i_2} \subset \Psi$ ($i_1 = \overline{1, n_1}$, $i_2 = \overline{1, n_2}$) функцию Гамильтона H можно записать в форме

$$H = w^{\alpha}\left[\,1-\alpha+\frac{\alpha}{p}\,a_0\left(B(x)-\frac{\lambda}{a_0}\,x\right)\frac{1}{w}\,\right].$$

Откуда следует, что выражение

$$\left\{\, w^{\alpha}\left[\,1-\alpha+\frac{\alpha}{p}\,a_0\left(B(x)-\frac{\lambda}{a_0}\,x\right)\frac{1}{w}\,\right]\right\}_{a_{i_1}(b_{i_2})\subset\Psi} = \underset{t}{const}\,,$$

т.е. является инвариантом во времени на a_{i_1} $(b_{i_2}) \subset \Psi$.

Выражая безразмерные переменные через размерные $x = B\dfrac{\mu K}{gN}$, $w = \dfrac{W}{gN}$ и учитывая, что $p = \mu B$, $a_0 = q\,\mu\, C_\infty\, B$, $Y = C_\infty\, g\, N\, B(x)$, где B, C_∞ – параметры производственной В-функции, получаем следующий инвариант исследуемой макроэкономической модели

$$\left\{\left(\frac{W}{g\,N}\right)^{\alpha}\left[\,1-\alpha+\alpha\, q\left(Y-\frac{\lambda}{q}\,K\right)\frac{1}{W}\,\right]\right\}_{a_{i_1}(b_{i_2})\subset\Psi} = \underset{t}{const}\,. \qquad (19)$$

Библиографические ссылки

1. *Булгаков В. К., Стригунов В. В.* Модель и исследование макроэкономики региона на основе производственной В-функции // Вестник Тихоокеанского государственного университета. – 2005. - № 1.
2. *Булгаков В. К., Булгаков О. В.* Моделирование динамики обобщающих показателей развития региональных экономических систем России // Экономика и мат. методы. – 2006. - Т. 42. № 1. - С. 32 – 49.
3. *Булгаков В. К., Стригунов В. В.* Решение задачи оптимального управления динамикой экономической системы региона РФ для конечного горизонта планирования // Вестник ИжГТУ. – 2007. - № 2.
4. *Булгаков В. К., Стригунов В. В.* Об оптимальном управлении и оптимальных траекториях динамики региональной макроэкономики на основе принципа максимума Понтрягина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. - Т. 49. № 5.
5. *Стригунов В. В.* Программный комплекс для расчета оптимальных траекторий математической модели макроэкономики региона. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011615125 от 29.06.2011 г.
6. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975.