



УДК 536.46

© В. К. Булгаков, А. В. Пассар, Н. Е. Ершов, 2013

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ
(ДИНАМИЧЕСКИХ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК)
НЕСЖИМАЕМОЙ, ВЯЗКОЙ, ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ**

Булгаков В. К. – д.-р. физ.-мат. наук, проф. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», тел.: (4212) 37-52-03 (ТОГУ);
Пассар А. В. – канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, тел. 8-914-204-30-58, e-mail: passar_av@mail.ru; *Ершов Н. Е.* – канд. физ.-мат. наук, зам. директора, тел. (4212) 22-73-09 (ВЦ ДВО РАН)

В рамках гидродинамического подхода дана математическая модель внутренних течений вязкой теплопроводной, несжимаемой жидкости. В неравновесном термодинамическом приближении излагаются динамические и энергетические процессы в жидкости.

Within the limits of the hydrodynamic approach the mathematical model of internal currents of viscous, incompressible, thermal conductivity fluid is developed. In nonequilibrium thermodynamic approach dynamic and power processes in a liquid are given.

Ключевые слова: математическая модель течения, динамические и энергетические процессы в гидродинамическом, квазиравновесном приближении, совершенный газ.

Введение

Рассмотрим внутреннее течение в области $\Omega \cup \tilde{A} = \bar{\Omega}$, где Ω - открытое связанное множество с достаточно гладкой границей \tilde{A} . Введем в $\bar{\Omega}$ физическое пространство R^3 заполненное несжимаемой жидкостью. Физическое пространство R^3 вещественных координат x_1, x_2, x_3 имеет метрику, индуцированную метрикой трехмерного вещественного евклидова пространства E^3 [1]. Будем считать, что в физическом пространстве R^3 можно ввести единую декартову систему координат.



Для однородной несжимаемой жидкости можно считать, что плотность жидкости $\rho = const$, $R^3 \times R_t$, где $R_t = [0, T]$. Используя соотношение Гиббса-Дюгема на случай неравновесной жидкости:

$$\frac{dE}{dt} = T \frac{dS}{dt} - P \frac{dV}{dt}. \quad (1.1)$$

Для несжимаемой жидкости получаем

$$dE = TdS, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = T \frac{\partial S}{\partial t}, \quad \nabla E = T \nabla S. \quad (1.2-1.4)$$

Если при процессе объем тела остается постоянным, то есть количество получаемого телом тепла равно изменению его энергии $dQ = dE$, то очевидно $dQ = d(E + \rho V)$, учитывая, что $w = (E + \rho V)$ - энтальпия (теплосодержащая функция), следовательно $dQ = dw$.

Уравнения движения

В рамках гидродинамического подхода уравнения движения вязкой теплопроводной жидкости в декартовой прямоугольной системе координат x_1 , x_2 , x_3 при использовании элементов тензорного и векторного анализа можно записать в виде [1,2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k + P \delta_{ik}) = \frac{\partial \sigma_{ik}^{(v)}}{\partial x_k}. \quad (2.2)$$

Здесь P - гидростатическое давление, δ_{ik} - символ Кронекера, $\sigma_{ik}^{(v)}$ - тензор вязких напряжений.

Для несжимаемой жидкости $\rho = const$, тензор вязких напряжений $\sigma_{ik}^{(v)}$ равен

$$\sigma_{ik}^{(v)} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (2.3)$$

уравнение неразрывности (2.1)

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \quad (2.4)$$



Используя (2.3, 2.4) и $\nabla \cdot (\varphi \vec{f}) = \vec{f} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{f}$ получаем уравнение движения несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности [2]

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_k} = 0 \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Здесь $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ - кинематическая вязкость.

Уравнение для энергетических характеристик

Для несжимаемой жидкости закон сохранения полной энергии (кинетической плюс внутренней) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho E \right) + \nabla \cdot \left[\vec{u} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho E + P \right) \right] - \\ - \nabla \cdot \left(\vec{u} \sigma^{(v)} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\eta c_p}{Pr} \nabla T \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho E \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_k \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho E + P \right) \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_i \sigma_{ik}^{(v)} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\eta c_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_k} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрим $\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\vec{u} \sigma^{(v)}) = \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right]$, проведя ряд преобразований получаем

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] = \nu \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\nu}{2} \vec{\Delta} \cdot \vec{a} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) - \\ - \nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Используя соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[u_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \\
 &+ 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + u_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + u_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \\
 &+ 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + u_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3},
 \end{aligned}$$

приходим к

$$\begin{aligned}
 v \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] &= v \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{v}{2} \bar{\Delta} \cdot \bar{a} + 2v \left(\frac{\partial^2 u_1 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) - \\
 - v \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[u_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right].
 \end{aligned}$$

Продолжим, воспользовавшись уравнением неразрывности

$$v \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] = v \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) + v \bar{\Delta} \cdot \bar{a} + 2v \left(\frac{\partial^2 u_1 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right).$$

Окончательно получим уравнение сохранения полной энергии несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} + E \right) + \nabla \left[\bar{u} \cdot \left(\frac{u^2}{2} + E + \frac{p}{\rho} \right) \right] - v \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) - v \bar{\Delta} \cdot \bar{a} - \\
 - 2v \left(\frac{\partial^2 u_1 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) - \frac{v c_p}{Pr} \Delta T = 0.
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

В работе [4], используя уравнение сохранения импульса [5], получено уравнение переноса кинетической энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_k \left(\rho \frac{u^2}{2} + P \right) \right] - P \frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{ik}^{(v)} u_i \right) + \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0. \quad (3.4)$$

Входящий в уравнения переноса кинетической энергии член $\sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ описывает диссипацию кинетической энергии в тепло благодаря вязкости.

Диссипативный член для несжимаемой жидкости может быть записан в виде

$$\sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$



Вычисление в правой части приводит к формуле

$$\sigma_{ik}^{(\nu)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \eta \Phi,$$

где Φ - диссипативная функция [6,7], для несжимаемой жидкости равная

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2.$$

Тогда уравнение переноса кинетической энергии можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} - \nu \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) - \nu \vec{\Delta} \cdot \vec{a} - \\ & - 2\nu \left(\frac{\partial^2 u_1 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \nu \Phi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Вычитая из закона сохранения полной энергии (3.3) уравнение переноса кинетической энергии (3.5), получим уравнение переноса внутренней энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla E - \frac{\nu c_p}{Pr} \Delta T - \nu \Phi = 0. \quad (3.6)$$

Рассмотрим удельную внутреннюю энергию (единицы массы) E . Пусть единице массы соответствует удельный объем V , тогда $dE = TdS - pdV$. Если

$E = E(S, V)$, то $dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S dV$ следовательно

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V, \quad P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_V.$$

Из определения теплоемкостей имеем

$$c_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V, \quad c_P = \left(\frac{\partial w}{\partial T} \right)_P.$$

Используя вышеприведенные соотношения получаем

$$\frac{\partial E}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial t} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \frac{\partial T}{\partial t} = c_P \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.7)$$

$$\nabla E = T \nabla S = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \nabla T = c_P \nabla T. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.7, 3.8) в уравнение переноса внутренней энергии (3.6) получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T - \frac{\nu}{Pr} \Delta T - \frac{\nu}{c_p} \Phi = 0. \quad (3.9)$$



Знание закономерностей изменения энтропии в потоке необходимо как составная анализа физических процессов происходящих при течении. Исходя из уравнений переноса внутренней энергии (3.6) и используя термодинамические соотношения Гиббса (1.4) получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla S = \frac{\nu c_p}{Pr} \frac{1}{T} \Delta T + \frac{\nu}{T} \Phi. \quad (3.10)$$

Таким образом, авторами разработана полная математическая модель течения несжимаемого, вязкого, теплопроводного газа, для которого предстоит разработать алгоритм расчета и реализовать его на ЭВМ. В результате авторы планируют провести количественный анализ сложных физических процессов, заложенных в модели.

Библиографические ссылки

1. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – 4-е изд., испр. – СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004. – 816 с.: ил.
2. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика в 10 т. Т. VI Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М., Наука, 1988.
3. *Зубарев Д.Н.* Статистическая механика неравновесных процессов / Д.Н. Зубарев, В.Г. Морозов, Г. Рёнке. В 2-х т. Т. 2. – М.: Физико-математическая литература, 2002. – 296 с., ил.
4. *Булгаков В.К.* Математическое моделирование течения сжимаемого, вязкого, теплопроводного газа / В.К. Булгаков, А.В. Пассар // Вестник Тихоокеанского государственного университета. – 2009. - № 2(13). – С. 13-24.
5. *Левич В.Г.* Курс теоретической физики Т. II / В.Г. Левич, Ю.А. Вдовин, В.А. Мямлин. М., 1971. – 936 с., ил.
6. *Бекнев В.С.* Газовая динамика. Механика жидкости и газа / В.С. Бекнев, В.М. Епифанов, А.И. Леонтьев и др.; Под общей ред. А.И. Леонтьева. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 671 с., ил.
7. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с., ил.