УДК 519.853.2 + 519.632

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ДВОЙСТВЕННОСТИ[1]

Максимова Н. Н. – канд. физ.-мат. наук, доц., и.о. зав. кафедрой «Математический анализ и моделирование», e-mail: knnamursu@mail.ru (АмГУ)

В статье рассмотрены методы двойственности для решения вариационной задачи, соответствующей модельной задаче механики с трением. Численная реализация алгоритмов проведена при конечно-элементной аппроксимации задач. Приведены результаты численных расчетов.

The article describes the duality methods for solving the variational problem corresponding to a model problem of mechanics with friction. Numerical implementation of the algorithms is performed with the finite element approximation of the problem. The results of the numerical calculations are presented.

Ключевые слова: модельная задача механики с трением, схема двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа, алгоритм Удзавы, метод множителей, метод конечных элементов.

Постановка задач

Пусть Ω – ограниченная область в R^2 с достаточно гладкой границей Γ. Рассмотрим следующую полукоэрцитивную вариационную задачу с недифференцируемым функционалом (модельная задача механики с трением на границе) [1]

$$\begin{cases} J(v) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left|\nabla v\right|^2 d\Omega - \int\limits_{\Omega} f\, v\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma} g\left|\gamma v\right| d\Gamma \to \min, \\ v \in W_2^1(\Omega), \end{cases} \tag{1}$$

где $f \in L_2(\Omega)$; $g > 0$ на границе Γ области Ω; $\gamma\, v \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ – след функции $v \in W_2^1(\Omega)$ на Γ. В дальнейшем значок γ следа опустим.

---

[1] Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.A18.21.2014) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-90807-мол_рф_нр)

Решение задачи описывает движение жидкости в бесконечной трубе с поперечным сечением Ω с заданным трением на границе. Подобные задачи с заданным трением встречаются в теории упругости.

Минимизируемый функционал не является сильно выпуклым в $W_2^1(\Omega)$ и задача (1) может не иметь решения. Однако если выполнено условие

$$g\, mes\, \Gamma - \left| \int_\Omega f\, d\Omega \right| > 0, \tag{2}$$

то решение v задачи (1) существует, и функционал является коэрцитивным, то есть

$$J(v) \to +\infty \text{ при } \|v\|_{W_2^1(\Omega)} \to \infty .$$

Приближенное решение задачи (1) существенно осложняется недифференцируемостью минимизируемого функционала.

Если $f \le 0$ в Ω, то решение v будет неположительным в области Ω и, в частности, на границе Г. Тогда задача (1) безусловной минимизации недифференцируемого функционала эквивалентна задаче условной минимизации дифференцируемого функционала [2, 3]:

$$\begin{cases} \tilde{J}(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\, d\Omega - \int_\Omega f\, v\, d\Omega - \int_\Gamma g\, v\, d\Gamma \to \min, \\ v \in G = \{w \in W_2^1(\Omega) : w \le 0 \ \ на \ \ \Gamma\}. \end{cases} \tag{3}$$

Для решения задач (3) рассмотрим схему двойственности, основанную на модифицированном функционалах Лагранжа. Данный подход состоит в замене исходной задачи поиска условного экстремума задачей поиска седловой точки функционала Лагранжа. Для решения задачи (1) применим сглаживающий метод множителей Лагранжа.

Схема двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа для модельной задачи с трением (3)

Определим в $W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ модифицированный функционал Лагранжа [4-7]

$$M(v,l) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\, d\Omega - \int_\Omega f\, v d\Omega - \int_\Gamma g\, v d\Gamma + \frac{1}{2r}\int_\Gamma \left\{ \left[\left(l + r\, v \right)^+ \right]^2 - l^2 \right\} d\Gamma, \tag{4}$$

где $r > 0$ – const, $\left(l + r\, v \right)^+ = \max\left\{0, l + r\, v\right\}$.

Пару $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ будем называть седловой точкой для $M(v, l)$, если выполняется двустороннее неравенство

$$M(v^*, l) \le M(v^*, l^*) \le M(v, l^*), \quad \forall\, v \in W_2^1(\Omega),\ \forall l \in L_2(\Gamma).$$

Легко показать, что функционал $M(v, l)$ является выпуклым по v при фиксированном l и вогнутым по l при фиксированном v.

Для поиска седловой точки модифицированного функционала можно применить алгоритм Удзавы. Подробное описание сходимости алгоритма и результаты численных расчетов, в том числе с одновременной проксимальной регуляризацией функционала, приведены в [3, 8, 9]. При численной реализации метода выделяются два итерационных процесса: внутренний – для минимизации по прямой переменной конечномерного аналога функционала $M(v, l)$ при фиксированной двойственной переменной (первый шаг алгоритма Удзавы), и внешний – для пересчета компонент двойственной переменной при фиксированной первой компоненте (второй шаг алгоритма Удзавы). При реализации первого шага применялся метод спуска.

Здесь рассмотрим несколько иной подход. Аппроксимируем модифицированный функционал (4) по методу конечных элементов. Введем следующие обозначения. F_h – триангуляция области Ω, h – параметр триангуляции, P – множество индексов узлов триангуляции, I – множество индексов граничных узлов триангуляции, $V_h = \left\{ v_h = \sum\limits_{i \in P_h} v_i \varphi_i \right\}$ – линейная оболочка соответствующих кусочно-аффинных базисных функций φ_i. Через y_i обозначим приближенное значение решения v в узле $M_i \left(i \in P \right)$, a_i – приближенное значение двойственной переменной l в узле $M_i \left(i \in I \right)$.

Во всех численных примерах в качестве расчетной области выберем единичный квадрат $\Omega = \left[-1/2, 1/2 \right] \times \left[-1/2, 1/2 \right]$ и триангуляцию области проведем с помощью равномерной сетки. Счет будем проводить на сетках с шагами $h_N = 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64$, где $N = \overline{1,5}$ – номер сетки.

Конечномерный аналог модифицированного функционала Лагранжа (4) имеет вид

$$\tilde{M}(y,a) = \frac{1}{2} \left\langle A y, y \right\rangle - \left\langle F, y \right\rangle + \frac{h}{2r} \sum_{i \in I} \left\{ \left[\left(a_i + r y_i \right)^{+} \right]^2 - a_i^2 \right\}, \qquad (5)$$
$$y \in R^{|P|}, a \in R^{|I|}.$$

Согласно алгоритму метода множителей [4] седловая точка конечномерного функционала (5) является решением системы уравнений

$$\nabla_y \tilde{M}(y,a) = 0, \nabla_a \tilde{M}(y,a) = 0 .$$

Продифференцируем функционал $\tilde{M}(y,a)$ по компонентам прямой переменной ($i \in P$) и приравняем производные к нулю:

$$\frac{\partial \tilde{M}(y,a)}{\partial y_i} = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{j\in P} A_{ij} y_j - F_i, \quad i \in P \setminus I, \\ \sum\limits_{j\in P} A_{ij} y_j - F_i + h\left(a_i + r y_i\right)^+, \quad i \in I. \end{array} \right\} = 0 .$$

Из этого выражения легко получить расчетные формулы для компонент прямой переменной: для внутренних узлов ($i \in P / I$)

$$y_i^{(n+1)} = -\frac{1}{A_{ii}} \left(\sum_{j<i} A_{ij} y_j^{(n+1)} + \sum_{j>i} A_{ij} y_j^{(n)} - F_i \right); \qquad (6)$$

для граничных узлов ($i \in I$) вычисляем

$$\psi_i = -\frac{1}{A_{ii}} \left(\sum_{j<i} A_{ij} y_j^{(n+1)} + \sum_{j>i} A_{ij} y_j^{(n)} - F_i \right), \qquad (7)$$

далее полагаем

$$y_i^{(n+1)} = \begin{cases} \psi_i, \quad \textit{если} \quad \psi_i \le -\dfrac{a_i^{(n)}}{r}, \\ -\dfrac{1}{A_{ii} + hr} \left(\sum\limits_{j<i} A_{ij} y_j^{(n+1)} + \sum\limits_{j>i} A_{ij} y_j^{(n)} - F_i + h a_i^{(n)} \right), \\ \qquad\qquad \textit{если} \quad \psi_i > -\dfrac{a_i^{(n)}}{r}. \end{cases} \qquad (8)$$

Вычислим производные по компонентам двойственной переменной ($i \in I$) и также приравняем к нулю:

$$\frac{\partial \tilde{M}(y,a)}{\partial a_i} = h\left\{ \left(a_i + r y_i\right)^+ - a_i \right\} = 0 ,$$

откуда получаем формулу для расчета

$$a_i^{(n+1)} = \left(a_i^{(n)} + r y_i^{(n+1)} \right)^+ , \ i \in I , \qquad (9)$$

которая, очевидно, совпадает с конечномерным аналогом формулы второго шага алгоритма Удзавы. Кроме того, эта же формула представляет собой реализацию метода проекции градиента максимизации модифицированного функционала по двойственной переменной с шагом сдвига, равным параметру двойственности r.

Согласно [5] итерационный процесс (6)-(9) можно назвать методом Эрроу-Гурвица, в котором для нахождения седловой точки применяются метод проекции антиградиента для минимизации по прямой переменной и метод проекции градиента для максимизации по двойственной переменной. В данном подходе вместо метода проекции антиградиента для минимизации функционала используется метод спуска.

В качестве критерия останова итерационного процесса по формулам (6)-(9) выберем следующее условие

$$\max_i \left| \frac{\partial \tilde{M}(y^{(n)}, a^{(n)})}{\partial y_i} \right| \le 10^{-N}. \tag{10}$$

Очевидно, что данный критерий демонстрирует сходимость итерационного процесса по прямой переменной, поэтому, чтобы показать сходимость по двойственной переменной, будем вычислять величину

$$\Delta a^{(n)} = \max_i \left| a_i^{(n)} - a_i^{(n-1)} \right|,$$

где n – число итераций метода. В расчетных таблицах 1-4 данная величина представлена для последней сетки с номером N=5.

В качестве начального вектора на первой сетке в самом начале вычислений брался нулевой вектор. При переходе к более мелкой сетке начальный вектор брался равным линейной аппроксимации решения, полученного на последней внешней итерации предыдущей сетки.

Зададим параметры для численных расчетов. Силу трения g на границе Г положим равной единице для всех расчетов. Функцию f выберем постоянной (f = –3) в расчетной области Ω (назовем ее задачей 1). Кроме этого, методами двойственности исследуем задачу с непрерывной функцией $f(x_1, x_2) = -\cos x_1 \cos x_2$, заданной в квадрате $\left[-1/2, 1/2\right] \times \left[-1/2, 1/2\right]$ (задача 2). Очевидно, для всех видов задания параметров условие разрешимости (2) выполняется.

Результаты численных расчетов представлены в таблицах 1-2. Графики полученных решений (на последней сетке) представлены на рис. 1.

Таблица 1

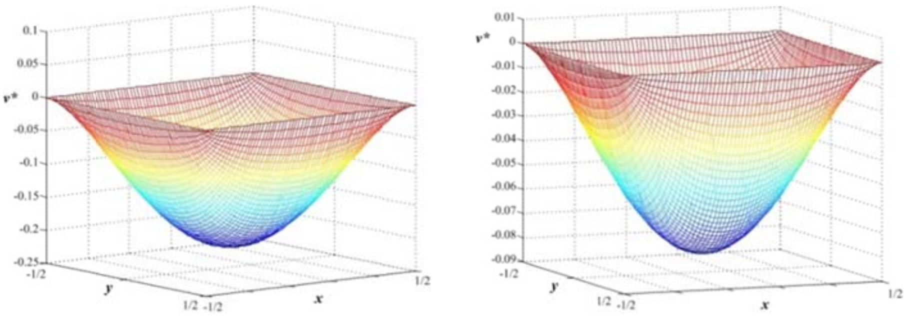
Число итераций метода множителей для задачи 1

Номер сетки, N		1	2	3	4	5	$\Delta a^{(n)}$
Шаг, h_N		1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	
Параметр двойственности	$r = 10^6$	2	8	25	105	414	$4{,}8 \cdot 10^{-5}$
	$r = 10$	2	9	23	105	409	$4{,}7 \cdot 10^{-5}$
	$r = 5$	3	7	21	102	407	$4{,}5 \cdot 10^{-5}$
	$r = 1$	2	20	8	38	71	$2{,}8 \cdot 10^{-4}$
	$r = 0{,}5$	2	27	10	87	101	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2

Число итераций метода множителей для задачи 2

Номер сетки, N		1	2	3	4	5	$\Delta a^{(n)}$
Шаг, h_N		1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	
Параметр двойственности	$r = 10^6$	2	1	19	100	386	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$
	$r = 10$	3	3	24	95	383	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$
	$r = 5$	3	9	16	81	378	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$
	$r = 1$	1	24	8	67	37	$1{,}2 \cdot 10^{-4}$
	$r = 0{,}5$	1	33	10	119	36	$2{,}1 \cdot 10^{-4}$



а) Задача 1 б) Задача 2

Рис. 1. Графики решений модельной задачи с трением

В отличие от алгоритма Удзавы, данный метод является менее затратным: во-первых, организуется один итерационный процесс, в котором одновременно решаются задача минимизации по прямой переменной и задача максимизации по двойственной переменной, во-вторых, нетрудно видеть, что уменьшение параметра двойственности r влечет уменьшение числа итераций. Значение величины $\Delta a^{(n)}$ (на последней сетке) показывает, что имеет место сходимость итерационного процесса и по двойственной компоненте.

Устойчивый сглаживающий алгоритм решения модельной задачи с трением (1)

Устойчивый сглаживающий алгоритм для решения полукоэрцитивной модельной задачи с трением (1) подробно рассмотрен в [10, 11]. Здесь ограничимся рассмотрением основной идеи метода и для решения конечномерной задачи применим рассмотренный выше алгоритм.

Очевидно задача (1) равносильна задаче

$$\begin{cases} \bar{J}(v,w) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left|\nabla v\right|^2 d\Omega - \int\limits_{\Omega} f\, v\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma} g\left|v-w\right| d\Gamma \to \min, \\ \left(v,w\right) \in W_2^1(\Omega)\times L_2\left(\Gamma\right); \qquad w=0 \ \textit{на} \ \Gamma. \end{cases} \tag{11}$$

Определим модифицированный функционал Лагранжа следующим образом

$$M\left(v,w;l\right) = \bar{J}(v,w) + \int\limits_{\Gamma} lw\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma} w^2\, d\Gamma.$$

Точка $\left(v^*, w^*; l^*\right) \in W_2^1(\Omega)\times L_2\left(\Gamma\right)\times L_2\left(\Gamma\right)$ называется седловой точкой для модифицированного функционала Лагранжа, если выполнено двухстороннее неравенство

$$M\left(v^*, w^*; l\right) \le M\left(v^*, w^*; l^*\right) \le M\left(v, w; l^*\right),$$

$$\forall\left(v, w; l\right) \in W_2^1(\Omega)\times L_2(\Gamma)\times L_2(\Gamma).$$

Первая компонента $\left(v^*, w^*\right)$ седловой точки является решением задачи (11).

Ниже будем считать, что $g > 0$ – const. Рассмотрим задачу минимизации модифицированного функционала Лагранжа по w при фиксированном v [10]:

$$\inf_{w}\left\{M(v,w;l)\right\} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left|\nabla v\right|^2 d\Omega - \int\limits_{\Omega} fv d\Omega + g\int\limits_{\Gamma}\inf_{w}\left\{\left|v-w\right| + \frac{lw}{g} + \frac{r}{2g}w^2\right\} d\Gamma.$$

Известно [4, 12], что $F\left(v\right) = \inf\limits_{w}\left\{\left|v-w\right| + \frac{lw}{g} + \frac{r}{2g}w^2\right\}$ выпуклая, непрерывно дифференцируемая функция. Она имеет явное представление

$$F\left(v\right) = \begin{cases} -v - \frac{g\left(1+l/g\right)^2}{2r}, & \textit{если}\, v < -\frac{1+l/g}{r/g}, \\ \frac{l}{g}v + \frac{r}{2g}v^2, & \textit{если} -\frac{1+l/g}{r/g} \le v \le \frac{1-l/g}{r/g}, \\ v - \frac{g\left(1-l/g\right)^2}{2r}, & \textit{если}\, v > \frac{1-l/g}{r/g}. \end{cases}$$

Обозначим $L(v,l) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left|\nabla v\right|^2 d\Omega - \int\limits_{\Omega} fv d\Omega + g\int\limits_{\Gamma} F(v) d\Gamma$. Сохраняя обозначения п. II, аппроксимируем $L(v, l)$. Через $\tilde{L}(y,a)$ обозначим его конечномерный аналог, через z_i – приближенное значение второй компоненты прямой переменной w в узле $M_i \left(i \in I\right)$. Дифференцируя $\tilde{L}(y,a)$ по переменной $y_i \, (i \in P)$ и приравнивая производные к нулю получаем расчетные формулы для компонент прямой переменной: для внутренних узлов ($i \in P / I$)

$$y_i^{(n+1)} = -\frac{1}{A_{ii}}\Big(\sum_{j<i} A_{ij} y_j^{(n+1)} + \sum_{j>i} A_{ij} y_j^{(n)} - F_i\Big), \tag{12}$$

для граничных узлов ($i \in I$)

$$y_i^{(n+1)} = \begin{cases} -\dfrac{1}{A_{ii}}\Big(\sum\limits_{j<i} A_{ij} y_j^{(n+1)} + \sum\limits_{j>i} A_{ij} y_j^{(n)} - F_i - gh\Big), \\ \qquad \textit{если} \;\; y_i^{(n+1)} < -\dfrac{g + a_i^{(n)}}{r}, \\ -\dfrac{1}{A_{ii} + rh}\Big(\sum\limits_{j<i} A_{ij} y_j^{(n+1)} + \sum\limits_{j>i} A_{ij} y_j^{(n)} - F_i + g a_i^{(n)}\Big), \\ \qquad \textit{если} \;\; -\dfrac{g + a_i^{(n)}}{r} \le y_i^{(n+1)} \le \dfrac{g - a_i^{(n)}}{r}, \\ -\dfrac{1}{A_{ii}}\Big(\sum\limits_{j<i} A_{ij} y_j^{(n+1)} + \sum\limits_{j>i} A_{ij} y_j^{(n)} - F_i + gh\Big), \\ \qquad \textit{если} \;\; y_i^{(n+1)} > \dfrac{g - a_i^{(n)}}{r}. \end{cases} \tag{13}$$

Далее пересчитываем вторую компоненту прямой переменной ($i \in I$)

$$z_i^{(n+1)} = \begin{cases} -\dfrac{g + a_i^{(n)}}{r}, & \textit{если} \;\; y_i^{(n+1)} < -\dfrac{g + a_i^{(n)}}{r}, \\ y_i^{(n+1)}, & \textit{если} \;\; -\dfrac{g + a_i^{(n)}}{r} \le y_i^{(n+1)} \le \dfrac{g - a_i^{(n)}}{r}, \\ \dfrac{g - a_i^{(n)}}{r}, & \textit{если} \;\; y_i^{(n+1)} > \dfrac{g - a_i^{(n)}}{r}. \end{cases} \tag{14}$$

Двойственную переменную рассчитываем по формуле ($i \in I$)

$$a_i^{(n+1)} = a_i^{(n)} + r z_i^{(n+1)}. \tag{15}$$

Эта формула представляет собой конечномерный аналог второго шага метода Удзавы поиска седловой точки. Возможность ее применения в данном случае очень просто объяснить. Дифференцируя функционал $\tilde{L}(y,a)$ по двойственной переменной ($i \in I$), получаем $\dfrac{\partial \tilde{L}(y,a)}{\partial a_i} = hz_i$. Таким образом, направление поиска максимума функционала $\tilde{L}(y,a)$ по двойственной переменной совпадает с направлением вектора z, и, если в методе градиентного поиска точки максимума положить произведение шага сдвига в выбранном направлении на шаг аппроксимации, равное параметру двойственности r, то получается в точности формула (15).

В качестве критерия останова итерационного процесса по формулам (12)-(15) выберем аналогичное (10) условие, и также будем вычислять (на последней сетке) величину $\Delta a^{(n)}$.

Параметры численных расчетов оставим такие же, что и в п. 2. Результаты численных расчетов представлены в таблицах 3-4. Графики полученных решений (на последней сетке) будут такие же, как и на рис. 1.

Таблица 3

Число итераций метода множителей для задачи 1

	Номер сетки, N	1	2	3	4	5	$\Delta a^{(n)}$
	Шаг, h_N	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	
Параметр двойственности	$r = 10^6$	2	8	25	105	414	$4{,}8 \cdot 10^{-5}$
	$r = 10$	3	4	13	92	411	$4{,}7 \cdot 10^{-5}$
	$r = 5$	3	4	9	24	135	$2{,}7 \cdot 10^{-4}$
	$r = 1$	5	3	31	30	76	$5{,}7 \cdot 10^{-4}$
	$r = 0{,}5$	6	4	5	8	15	0

Таблица 4

Число итераций метода множителей для задачи 2

	Номер сетки, N	1	2	3	4	5	$\Delta a^{(n)}$
	Шаг, h_N	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	
Параметр двойственности	$r = 10^6$	1	3	24	95	388	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$
	$r = 10$	1	4	17	85	381	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$
	$r = 5$	1	4	15	70	364	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$
	$r = 1$	1	7	13	55	59	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$
	$r = 0{,}5$	1	3	14	111	45	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$

Как видно из расчетных таблиц, скорость сходимости метода зависит как от параметра двойственности, так и от параметров самой задачи. Для задач 2 и 3 малое значение параметра двойственности ведет к резкому увеличению числа итераций на последней сетке. А значение величины $\Delta a^{(n)}$ говорит о том, что отклонение двойственной компоненты незначительно.

Заключение

В работе исследована вариационная задача механики с односторонними ограничениями на границе, соответствующая модельной задаче механики с трением. Для решения задачи реализован алгоритм, основанный на замене исходной вариационной задачи задачей поиска седловой точки модифицированного функционала Лагранжа, при конечно-элементной реализации алгоритма для поиска седловой точки используется метод, основанный на пошаговом спуске по прямой переменной и подъеме по двойственной переменной.

Показать сходимость применяемого метода поиска седловой точки конечномерного аналога модифицированного функционала Лагранжа, в отличие от алгоритма Удзавы, пока не удалось, однако для исследуемых задач построенный метод оказался эффективным в плане вычислительных затрат. Следует отметить, что эффективность будет зависеть от значения параметра двойственности.

Библиографические ссылки

1. *Гловински, Р.* Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979. – 574 с.

2. *Кушнирук Н.Н., Намм Р.В.* Метод множителей Лагранжа для решения полукоэрцитивной модельной задачи с трением // Сибирский журнал вычислительной математики, 2009. – Т. 12, № 4. – С. 409-420.

3. *Кушнирук Н.Н.* Оптимизационные методы решения вариационных неравенств // Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. – Хабаровск, 2010. – 109 с.

4. *Бертсекас, Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа / Д. Бертсекас. – М.: Радио и связь, 1987. – 400 с.

5. *Васильев, Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1980. – 518 с.

6. *Гольштейн, Е.Г.* Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации / Е.Г. Гольштейн, Н.В. Третьяков. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

7. *Гроссман К.* Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации / К. Гроссман, А.А. Каплан. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1981. – 183 с.

8. *Кушнирук Н.Н.* Метод Удзавы с модифицированной функцией Лагранжа для решения задачи о движении жидкости в бесконечной трубе с трением на границе // Информатика и системы управления. - 2009. – № 1(19). – С. 3-14.

9. *Максимова (Кушнирук) Н.Н., Намм Р.В.* Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа для решения полукоэрцитивной модельной задачи с трением // Сибирский журнал вычислительной математики. - 2011. – Т. 14, № 4. – С. 393-408.

10. *Кушнирук Н.Н., Намм Р.В., Ткаченко А.С.* Об устойчивом сглаживающем методе решения модельной задачи механики с трением // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2011. – Т. 51. – № 6. – С. 1032-1042.

11. *Кушнирук Н.Н., Намм Р.В.* О конечно-элементном решении модельной задачи механики с трением на основе сглаживающего метода множителей Лагранжа // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2012. – Т. 52. – № 1. – С. 24-34.

12. *Рокафеллар, Р.Т.* Выпуклый анализ / Рокафеллар Р.Т. – М.: Мир, 1973. – 469 с.