



УДК 621.372.542

© А. Г. Шоберг, К. А. Шоберг, 2013

## СИММЕТРИЧНАЯ СХЕМА КРАТНОМАСШТАБНОГО АНАЛИЗА: МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

*Шоберг А. Г.* - канд. техн. наук, доц. кафедры «Вычислительная техника», тел.: (4212) 22-43-53, e-mail: shoberg@rambler.ru; *Шоберг К. А.* – инженер ХабЦНИТ, тел.: (4212) 74-46-02, e-mail: shoberg@bmail.ru (ТОГУ)

Предлагается симметричная схема кратномасштабного анализа. Приводится матричное описание алгоритма. Рассматривается базис Хаара. Предложенная схема инвариантна к направлению обработки. Проведено моделирование. Имеет место низкий уровень ошибок при реконструкции сигналов.

Multiresolution analysis with symmetric scheme is proposed. Matrix description of this analysis is given. The Haar basis is considered. The proposed scheme is invariant to the direction. Simulation shows a low level of error in the signals reconstruction.

*Ключевые слова:* вейвлеты, преобразования, кратномасштабный анализ, реконструкция, одномерный сигнал, симметрия.

### Введение

Практическое применение вейвлет-преобразований и кратномасштабного анализа в значительном количестве случаев требует наличия обратимости, т.е. восстановления сигнала. Вейвлет-преобразование и субполосное кодирование являются двумя очень близкими методами. Исходный сигнал делится чаще всего на две субполосы, каждая из которых вдвое меньше размером, чем исходная. При хранении результата в виде вектора низкочастотные и высокочастотные компоненты записываются последовательно. В результате последующего рекурсивного повторения этого процесса получается древовидное разбиение спектра на определенное количество уровней [1].

Данная статья посвящена рассмотрению возможности внесения в данный процесс элементов симметрии, которая рассматривается относительно центра сигнала конечной длины. Подобный подход может позволить снизить объем вычислений в различных алгоритмах обработки таких как предложенный в [2]. Матричное представление модели выбрано в силу наглядности и достаточной простоты.

### Матричное представление кратномасштабного анализа

Процесс декомпозиции сигнала в усредняющие и детализирующие значения при различных масштабах представляет собой суть кратномасштабного анализа.

Для того чтобы упростить реализацию алгоритма и иметь более наглядное представление результатов для многоуровневого вейвлет-преобразования, необходимо отделять аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты друг от друга и сохранять их в различных частях результирующей последовательности.

Использование базиса Хаара при прямом вейвлет-преобразовании [3] приводит к следующим значениям результирующих коэффициентов

$$\begin{aligned} a_{n-1,j} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2j+1} + x_{2j+2}), j = 0, \dots, 2^{n-1} - 1, \\ d_{n-1,j} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2j+1} - x_{2j+2}), j = 0, \dots, 2^{n-1} - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a_{n-1,j}$  и  $d_{n-1,j}$  – аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты вейвлет-разложения  $n-1$  уровня, соответственно;  $\mathbf{x}$  – вектор дискретных значений сигнала длиной  $2^n$ .

В соответствии с (1)  $n-1$  уровень преобразования может быть представлен в матричном виде

$$\mathbf{H}_n \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \\ \mathbf{D}_n \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{n-1} \\ \mathbf{d}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{A}_n$  и  $\mathbf{D}_n$  – части квадратной блочной матрицы преобразования  $\mathbf{H}_n$  размером  $2^n \times 2^n$ ;  $\mathbf{a}_{n-1}$  и  $\mathbf{d}_{n-1}$  – аппроксимирующие и детализирующие части вектора-столбца прямого преобразования, каждая длиной  $2^{n-1}$ .

При посредстве выражения (2) вектор-столбец исходных значений  $\mathbf{x}$  преобразуется в два типа коэффициентов. Следующий уровень преобразования применяется к аппроксимирующим коэффициентам  $\mathbf{a}_{n-1}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-1} \\ \mathbf{D}_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{a}_{n-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{n-2} \\ \mathbf{d}_{n-2} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Блочная матрица преобразования, содержащая  $\mathbf{A}_{n-1}$  и  $\mathbf{D}_{n-1}$ , будет иметь половинное количество строк и столбцов. Аппроксимирующие и детализирующие компоненты  $\mathbf{a}_{n-2}$  и  $\mathbf{d}_{n-2}$  составят результирующий вектор-столбец длиной  $2^{n-1}$ . Чтобы оставлять неизменными детализирующие коэффициенты, вычисленные на предыдущих уровнях разложения полная матрица преобразования  $\mathbf{H}_{n-1}$  должна содержать блок, представляющий собой единичную матрицу  $\mathbf{E}$ , что может быть реализовано с помощью прямой суммы двух квадратных матриц (рис. 1).

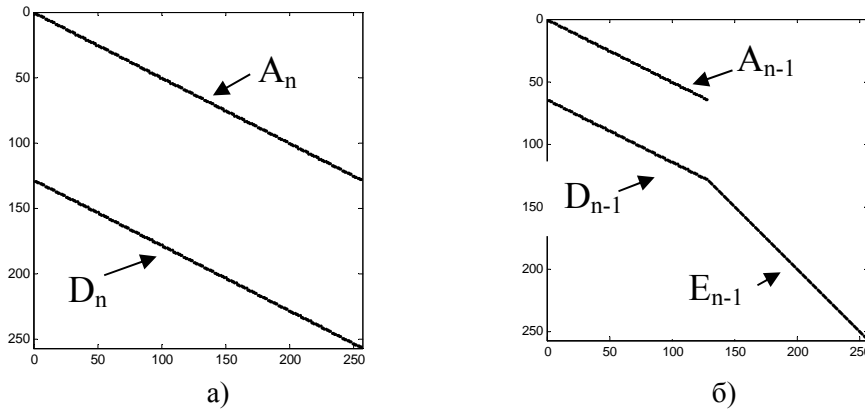


Рис. 1. Формирование матриц преобразования  $H_n$  и  $H_{n-1}$  (а и б - соответственно)

Продолжение реализации алгоритма предполагает формирование последующих матриц  $H_{n-k}$ . В матричном виде результирующее преобразование будет иметь следующий вид

$$W_n = H_1 H_2 \dots H_n x. \quad (4)$$

На заключительном шаге сохраняется среднее значение  $a_0$ , которое будет являться скаляром, т.е. имеет единственный компонент  $a_{0,0}$ . Результирующее транспонированное вейвлет-преобразование  $W_n$  будет иметь вектор-строки с  $2^n$  элементами

$$W_n = [a_0 \quad d_0 \quad d_1 \quad \dots \quad d_{n-1}]. \quad (5)$$

При восстановлении сигнала используются обратные матрицы, которые для ортогональных базисов совпадают с транспонированными [3].

### Формирование симметричной схемы кратномасштабного анализа

Из выражения (5) видно, что смещение низкочастотных коэффициентов в одну из сторон результирующего вектора не позволяет произвести восстановление при изменении прямого порядка следования элементов на обратный (от  $d_{n-1}$  до  $a_0$ ).

Модифицируем (1) следующим образом

$$\begin{aligned} d1_{n-1,j} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2j+1} - x_{2j+2}), \quad j = 0, \dots, 2^{n-2} - 1 \\ a1_{n-1,j} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2j+1} + x_{2j+2}), \quad j = 0, \dots, 2^{n-2} - 1 \\ a2_{n-1,j} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2j+1} + x_{2j+2}), \quad j = 2^{n-2}, \dots, 2^{n-1} - 1 \\ d2_{n-1,j} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2j+1} - x_{2j+2}), \quad j = 2^{n-2}, \dots, 2^{n-1} - 1 \end{aligned} \quad (6)$$



Это соответствует разделению  $x$  на две равные части, к каждой из которых будет применяться вейвлет-преобразование со следующими особенностями:

1. Количество разложений сигнала будет на единицу меньше, чем при традиционной схеме кратномасштабного анализа, поэтому индексы у последних аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов будут равны единице.

2. Порядок следования значений вейвлетов и масштабирующих функций для левой и правой части  $x$  противоположный. Для базиса Хаара это приводит лишь к смене знака вейвлета. Масштабирующая функция, с помощью которой формируются аппроксимирующие коэффициенты, не изменяется.

3. Наборы аппроксимирующих коэффициентов размещаются в середине результирующего вектор-столбца производимого очередного уровня разложения.

С учетом выражения (2) это может быть представлено матричным произведением в следующем выражении для первого уровня преобразования

$$\mathbf{Sh}_n \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{D1}_n \\ \mathbf{A1}_n \\ \mathbf{A2}_n \\ \mathbf{D2}_n \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d1}_{n-1} \\ \mathbf{a1}_{n-1} \\ \mathbf{a2}_{n-1} \\ \mathbf{d2}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{Sh}_n$  – квадратная блочная матрица преобразования размером  $2^n \times 2^n$  с симметричным размещением частей относительно центра;

$\mathbf{D1}_n$ ,  $\mathbf{A1}_n$ ,  $\mathbf{A2}_n$  и  $\mathbf{D2}_n$  – части матрицы преобразования  $\mathbf{Sh}_n$ , каждая размером  $2^n \times 2^{n/2}$ ;

$\mathbf{a1}_{n-1}$ ,  $\mathbf{a2}_{n-1}$  и  $\mathbf{d1}_{n-1}$ ,  $\mathbf{d2}_{n-1}$  – аппроксимирующие и детализирующие части вектора-столбца прямого преобразования, каждая длиной  $2^{n-2}$ .

Матрица  $\mathbf{Sh}$  при  $n=3$  размером  $8 \times 8$  для базиса Хаара выглядит следующим образом

$$\mathbf{Sh}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Из примера (8) видно, что нижняя половина матрицы представляет собой верхнюю половину матрицы с обращенным порядком строк и столбцов. Кроме того данную матрицу можно представить в виде прямой суммы двух квадратных матриц размером  $4 \times 4$ . При этом вторая матрица также представляет собой первую матрицу с обращенным порядком строк и столбцов.

Для вычисления преобразования на последующих уровнях используются матрицы преобразований с симметричным размещением блоков относитель-



но центра, но количество строк и столбцов будет в два раза меньше, чем на предыдущем уровне

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D1}_k \\ \mathbf{A1}_k \\ \mathbf{A2}_k \\ \mathbf{D2}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a1}_k \\ \mathbf{a2}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d1}_{k-1} \\ \mathbf{a1}_{k-1} \\ \mathbf{a2}_{k-1} \\ \mathbf{d2}_{k-1} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Аппроксимирующие и детализирующие компоненты  $\mathbf{a1}_{k-1}$ ,  $\mathbf{a2}_{k-1}$  и  $\mathbf{d1}_{k-1}$ ,  $\mathbf{d2}_{k-1}$  составляют результирующий вектор-столбец длиной  $2^{k-1}$ . Чтобы оставлять неизменными детализирующие коэффициенты, вычисленные на предыдущих уровнях разложения полная матрица преобразования  $\mathbf{Sh}$  должна содержать блоки, единичных матриц  $\mathbf{E}$ , размещаемые симметрично относительно центра, занимаемого двумя видами блоков  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{D}$ .

На рис. 2 схематично представлено формирование матриц  $\mathbf{Sh}_n$  и  $\mathbf{Sh}_{n-1}$ . Для базиса Хаара расположение коэффициентов в  $\mathbf{D1}$  и  $\mathbf{D2}$  разрывное, а концы линий  $\mathbf{A1}$  и  $\mathbf{A2}$  совпадают в середине. На рис. 2.б значения матриц  $\mathbf{E}$  прижимают к блокам  $\mathbf{D1}$  и  $\mathbf{D2}$ .

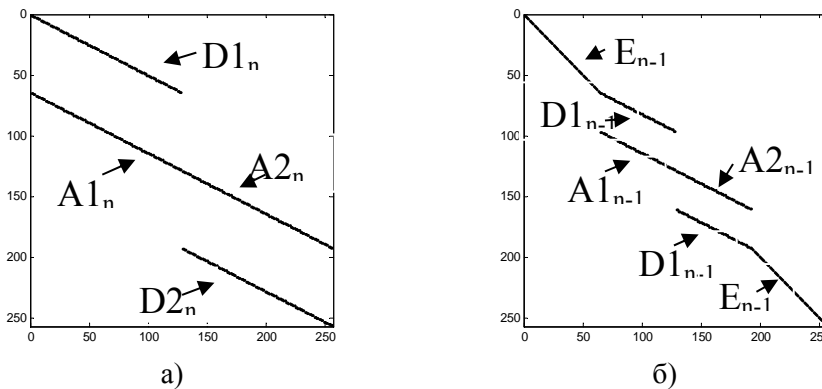


Рис. 2. Формирование матриц преобразования  $\mathbf{Sh}_n$  и  $\mathbf{Sh}_{n-1}$  (а и б - соответственно)

Продолжение реализации алгоритма предполагает формирование последующих матриц  $\mathbf{Sh}$ . При этом центральная часть будет, каждый раз уменьшаться вдвое, стягиваясь к центру. Результирующее преобразование представляет собой произведение  $n$  матриц  $\mathbf{Sh}$ , сформированных по схеме, представленной выше, на вектор  $\mathbf{x}$ .

$$\mathbf{Sw}_n = \mathbf{Sh}_2 \mathbf{Sh}_3 \dots \mathbf{Sh}_n \mathbf{x}. \quad (10)$$

На заключительном шаге будут вычислены средние значения  $a1_1$  и  $a2_1$ , а также детализирующие коэффициенты  $d1_1$  и  $d2_1$ . Таким образом, результирующее транспонированное вейвлет-преобразование  $\mathbf{Sw}_n$  будет иметь вид вектор-строки с  $2^n$  элементами

$$\mathbf{Sw}_n = [\mathbf{d1}_{n-1} \dots \mathbf{d1}_2 \mathbf{d1}_1 \mathbf{a1}_1 \mathbf{a2}_1 \mathbf{d2}_1 \mathbf{d2}_2 \dots \mathbf{d2}_{n-1}]. \quad (11)$$

По рис. 1 и 2 и выражениям (5) и (11) видно различие между традиционным подходом к кратномасштабному анализу и предлагаемой схемой, где ап-

проксимирующие коэффициенты размещены в центре, а детализирующие коэффициенты одинакового уровня разложения расположены симметрично.

Обратное преобразование (восстановление сигнала) для базиса Хаара модифицированной схемы с симметричным размещением коэффициентов с учетом (6) будет основываться на следующем выражении

$$\begin{aligned}
 a1_{k,2j+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a1_{k-1,j} - d1_{k-1,j}), j = 0, \dots, 2^{k-1} - 1 \\
 a1_{k,2j} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a1_{k-1,j} + d1_{k-1,j}), j = 0, \dots, 2^{k-1} - 1 \\
 a2_{k,2j} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a2_{k-1,j} + d2_{k-1,j}), j = 2^{k-1}, \dots, 2^k - 1 \\
 a2_{k,2j+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a2_{k-1,j} - d2_{k-1,j}), j = 2^{k-1}, \dots, 2^k - 1
 \end{aligned} \tag{12}$$

Это соответствует матричному выражению

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a1}_k \\ \mathbf{a2}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D1}_k \\ \mathbf{A1}_k \\ \mathbf{A2}_k \\ \mathbf{D2}_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{d1}_{k-1} \\ \mathbf{a1}_{k-1} \\ \mathbf{a2}_{k-1} \\ \mathbf{d2}_{k-1} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Здесь с использованием обратной матрицы на каждом уровне восстановления рассчитываются вектора-столбцы аппроксимирующих коэффициентов  $\mathbf{a1}$  и  $\mathbf{a2}$ . Процедура заканчивается, когда восстанавливается исходный сигнал  $\mathbf{x}$ .

### Результаты моделирования и сравнение традиционной и предлагаемой схем кратномасштабного анализа

В выражениях (4) и (10) присутствуют произведения последовательности квадратных матриц размерами  $n \times n$ .

На рис 3 схематично представлены произведения четырех матриц от  $n$  до  $n-3$ , рассчитанных по традиционной и предлагаемой схемам.

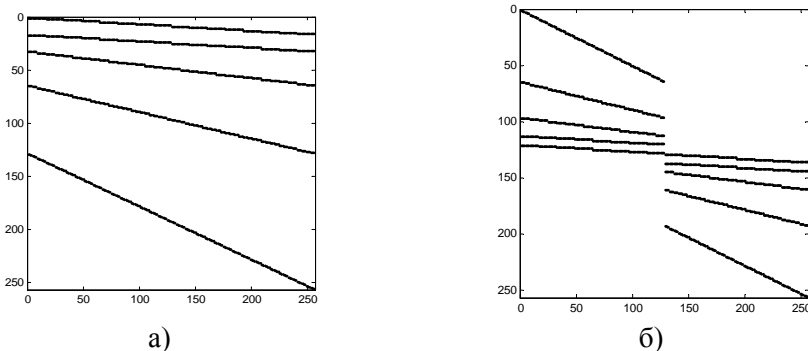


Рис. 3. Формирование матриц 4-х уровневго преобразования для традиционной H и предлагаемой симметричной Sh схем (а и б - соответственно)



В первом случае рис. 3а имеются пять групп коэффициентов, представленных в виде непрерывных линий, углы наклона которых увеличиваются при удалении их от начала. При этом первые две линии параллельны.

Во втором случае рис. 3б для результирующую матрицу размером  $256 \times 256$ , можно представить в виде прямой суммы двух квадратных матриц размерами  $128 \times 128$ . При этом вторая матрица может быть получена из первой путем обращения столбцов и строк.

Обратные матрицы  $S_h$ , благодаря особенностям формирования (выражения (6),(7),(9),(10)) равны транспонированным, что подтверждает сохранение свойства ортогональности в симметричной схеме.

Далее производилось прямое и обратное преобразование реальных сигналов длиной от 128 до 4096 отсчетов.

На рис. 4 представлены результаты прямого, обратного преобразования реального сигнала по традиционной схеме и ошибка его восстановления. На рис. 4а показано графическое представление коэффициентов прямого вейвлет-преобразования, сигнал восстанавливается (рис. 4в) с высокой точностью (рис. 4д). Порядок ошибки  $10^{-14}$ .

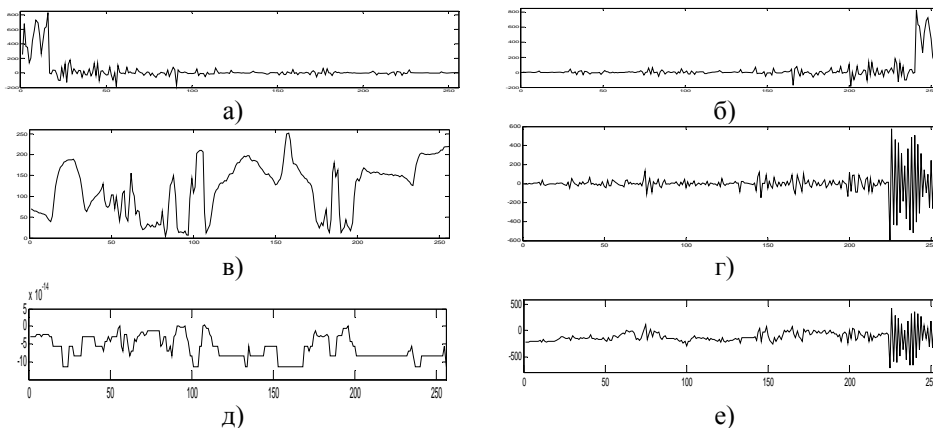


Рис. 4. Результаты прямого, обратного преобразования реального сигнала и ошибка его восстановления (традиционная схема кратномасштабного анализа)

В правом столбце рис. 4 показаны результаты описанной процедуры для обратного порядка коэффициентов прямого вейвлет-преобразования по традиционной схеме. Сигнал разрушается полностью, что видно по результату обратного преобразования (рис. 4г) и ошибке восстановления (рис. 4е), имеющей тот же порядок, что и сам сигнал.

В предлагаемой симметричной схеме кратномасштабного анализа для прямого и обратного порядка коэффициентов разложения реального сигнала (рис. 5а и 5б, соответственно) осуществляется восстановление сигнала во всех случаях (рис. 5в и 5г). Ошибка восстановления здесь в обоих случаях имеет порядок  $10^{-14}$ . Реконструированный сигнал и форма ошибки для прямого и обратного порядка следования коэффициентов вейвлет-преобразования, также имеют

прямой и обратный порядок следования значений. Результаты выполнения предлагаемого симметричного преобразования  $Sw$  для обращенного порядка ( $Rev$ ) сигнала и обратный порядок коэффициентов такого же преобразования исходного сигнала равны.

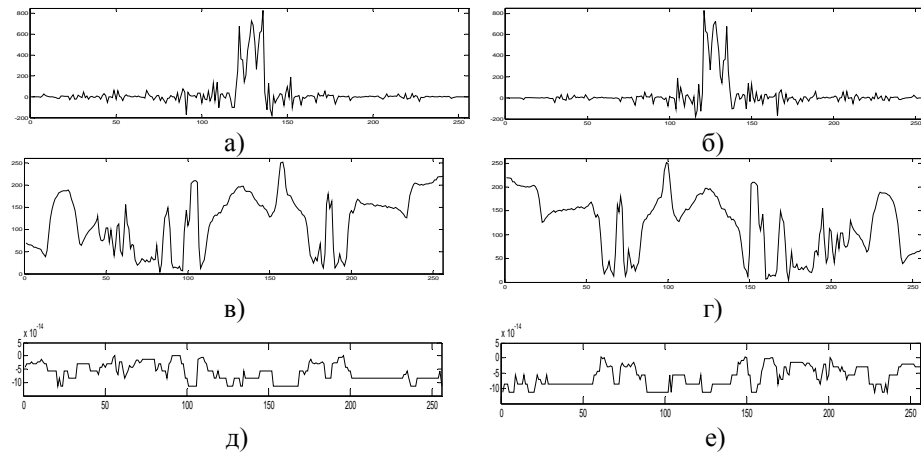


Рис. 5. Результаты прямого, обратного преобразования реального сигнала и ошибки его восстановления (предлагаемая симметричная схема кратномасштабного анализа)

$$Sw(Rev(x)) = Rev(Sw(x)). \quad (14)$$

Выражение (14) соответствует инвариантности предлагаемой симметричной схемы кратномасштабного анализа к направлению обработки.

### Выводы

Разработана симметричная схема кратномасштабного анализа инвариантная к направлению обработки. Предложено матричное описание данной схемы. Представлены выражения для реализации предложенного симметричного прямого и обратного вейвлет-преобразования для базиса Хаара. Результаты моделирования на реальных сигналах подтверждают работоспособность предложенных алгоритмов.

### Библиографические ссылки

1. Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. // IEEE Trans. on PAMI. 1989. Vol. 11. № 7. P. 674-693.
2. Сай С.В., Перегуда Е.С. Методы сокращения объема вычислений в алгоритмах сжатия изображений. // Вестник ТОГУ. – 2006. - №1(2). - С.9-14.
3. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. М.:Триумф, 2003. 320 с.