Моделирование систем
2005. №1(9)

УДК 539.3

© 2005 г. **Н.С. Астапов,** канд. физ.-мат. наук
(Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫПУЧИВАНИЯ ГИБКИХ СТЕРЖНЕЙ

В данной статье выявлены причины ошибки, распространенной в известных работах по устойчивости упругих систем. При описании формы выпучивания продольно сжатого гибкого стержня использован метод Бубнова-Галеркина. Для зависимости наибольшего прогиба стержня от нагрузки получены соотношения, превосходящие по точности формулы, приводимые в литературе.

Введение

Точная зависимость между нагрузкой P, продольно сжимающей гибкий упругий шарнирно опертый стержень длиной l, и прогибом f дана Эйлером в виде полного эллиптического интеграла первого рода [1, с. 440]

$$l = 2\sqrt{\frac{EI}{P}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\dfrac{f^2P}{4EI}\sin^2\psi}}$$

и в виде ряда

$$l = \pi\sqrt{\frac{EI}{P}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{f^2P}{4EI}+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\left(\frac{f^2P}{4EI}\right)^2+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\left(\frac{f^2P}{4EI}\right)^3+\dots\right\}, \quad (1)$$

где EI – изгибная жесткость стержня. Равновесные закритические формы сжатых стержней были впервые исследованы Лагранжем и подробно изучены с применением таблиц эллиптических интегралов [2, 3]. Однако для практического использования эти способы оказываются трудоемкими из-за необходимости вычисления величин, выражаемых через эллиптические интегралы первого и второго рода. Это явилось одной из причин вывода различными методами (решением линеаризованных дифференциальных уравнений, соответствующих исходным нелинейным; аппроксимацией эллиптических интегралов, выражающих точное решение, и др.) приближенных формул для прогибов и формы выпучивания стержня. Другой причиной постоянного обращения к задаче определения формы упругой линии является ее исключительная полезность благодаря наличию точного решения в качестве тестовой задачи при построении эффективных приближенных решений.

Способ Мизеса линеаризации дифференциального уравнения упругой линии

В работе [4] предложен следующий прием получения приближенных формул для прогибов стержня. Запишем дифференциальное уравнение упругой линии стержня в виде

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{P}{EI}\cos\theta\cdot y=0, \tag{2}$$

где θ – угол между касательной и осью Ox или первоначально прямолинейной осью стержня, а s – длина дуги упругой кривой. Принимая в первом приближении кривую прогиба за синусоиду вида

$$y=c\sin\frac{\pi s}{l}, \tag{3}$$

учитывая равенства $\sin\theta=dy/ds=c\pi\cos(\pi s/l)/l$ и малость величины c сравнительно с l, имеем

$$\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{c\pi}{l}\cos\frac{\pi s}{l}\right)^2}\approx 1-\frac{\pi^2c^2}{2l^2}\cos^2\frac{\pi s}{l}. \tag{4}$$

Подставляя равенства (3) и (4) в уравнение (2), получим

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{P}{EI}y=\frac{\pi^2c^3}{2l^2}\frac{P}{EI}\cos^2\frac{\pi s}{l}\sin\frac{\pi s}{l}. \tag{5}$$

Заменяя в правой части (5) P/EI близкой к ней величиной π^2/l^2 после тригонометрических преобразований окончательно получим

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{P}{EI}y=\frac{\pi^4c^3}{8l^4}\left(\sin\frac{\pi s}{l}+\sin\frac{3\pi s}{l}\right). \tag{6}$$

Интегралом этого уравнения, удовлетворяющим граничным условиям

$y(0)=y(l)=0$

рассматриваемой задачи, будет

$y = c\sin(\pi s/l) + c_1\sin(3\pi s/l)$,

$c^2 = 8l^2(P/P_* - 1)/\pi^2$,

где $P_* = EI(\pi/l)^2$ – критическая нагрузка Эйлера; с учетом приближенного равенства $P/EI \approx (\pi/l)^2$ при $P \approx P_*$ имеем приближенно $c_1 = -(\pi/l)^2c^3/64$. Отметим, что точно такое же соотношение между коэффициентами c и c_1 получено медом возмущений [5]. Кроме того, Мизес указывает, что в точке $s = l/2$ стержень имеет наибольший прогиб $y_m = c - c_1$, который, учитывая малость c_1 по сравнению с коэффициентом c, приближенно равен

$$y=c=\frac{\sqrt{8}l}{\pi}\sqrt{P/P_*-1}. \tag{7}$$

Анализ ошибок при выводе приближенных формул для прогибов стержня

В работе 1929 г. (перевод переиздан [6, с. 561]) полностью повторены выкладки Мизеса со ссылкой на [4], но коэффициент c_1 приведен с неверным знаком $c_1 = c(P/P_* - 1)/8$. В результате этой ошибки [7, с. 17], [8, с. 74], [9, с. 86] и [10, с. 129] опубликована ошибочная формула

$$y_m = \frac{2\sqrt{2}l}{\pi}\sqrt{P/P_* - 1}\left(1 - \frac{1}{8}(P/P_* - 1)\right) \tag{8}$$

для наибольшего прогиба в зависимости от нагрузки вместо необходимо следующей из соотношений $y_m = c - c_1$, $cc_1 < 0$ и выражений для c и c_1 формулы

$$y_m = \frac{2\sqrt{2}l}{\pi}\sqrt{P/P_* - 1}\left(1 + \frac{1}{8}(P/P_* - 1)\right). \tag{9}$$

При этом интересно отметить, что необоснованная формула (8) точнее формулы (9).

В работе [11, с. 37], переиздана [12, с. 25], также полностью повторены выкладки Мизеса со ссылкой на [4] и упоминанием работы 1929 г. [6] в списке использованной литературы, однако для коэффициента c_1 ошибочно дано выражение

$$c_1 = c\sqrt{P/P_* - 1}/8,$$

хотя в вышедшей меньшим тиражом работе [13, с. 66] и справочнике [14, с. 636] приводится верное выражение $c_1 = -c(P/P_* - 1)/8$.

Автор работы 1939 г. (переиздано в [1]) показывает, что формула Мизеса (7) "уже содержится в более общем результате Эйлера", если в правой части (1) учесть только первые два члена, а "сохраняя в правой части (1) первые три члена, получим во втором приближении":

$$\frac{f}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{P/P_* - 1}\left(1 - \frac{19}{16}(P/P_* - 1)\right). \tag{10}$$

Далее, ссылаясь на работу [7] и критикуя формулу (8), автор работы [1, с. 443] заключает, что "приближенный вывод Мизеса, приводящий к правильной формуле первого приближения (7), оказывается недостаточным для получения формулы второго приближения" (10).

Сравнительный анализ аналогичных формул дан в [15], где приводится менее точная, чем (10), формула

$$\frac{f}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{P/P_* - 1}\left(1 - \frac{41}{64}(P/P_* - 1)\right),$$

полученная в 1931 г. [2, с. 501] с помощью рядов.

Удивительная "устойчивость формулы" (7) проявилась и в работе [16, с. 245], в которой с помощью теории катастроф дано похожее, но неверное соотношение

$$P \approx P_*\left(1+\frac{3\pi}{8}\left(\frac{f}{l_1}\right)\right)^2,$$

где l_1 – расстояние между концами стержня. При выводе этого соотношения допущены три ошибки: в выражении полной потенциальной энергии стержня необходимо было взять l, а не l_1; считалось, что величина l_1 не зависит от формы прогиба стержня; необоснованно отброшена часть членов одного порядка малости.

В учебнике [17, с. 356] предлагается следующее приближенное решение для исследования малоизогнутых равновесных состояний стержня. В дифференциальном уравнении упругой линии стержня

$$\frac{d^2y}{ds^2}/\sqrt{1-(dy/ds)^2}+\frac{P}{EI}y=0$$

сделаем замену

$$1\Big/\sqrt{1-(dy/ds)^2}=1+(dy/ds)^2/2+3(dy/ds)^2/8+\ldots\approx 1+(dy/ds)^2/2,$$

получим

$$\frac{d^2y}{ds^2}\left(1+(dy/ds)^2/2\right)+\frac{P}{EI}y=0.$$

Предполагая, что ось стержня при небольших отклонениях описывается одной полуволной синусоиды (3) и заменяя $(dy/ds)^2/2$ его средним значением на отрезке [0, l], имеем

$$\frac{d^2y}{ds^2}\left(1+(c\pi/2l)^2\right)+\frac{P}{EI}y=0.$$

Учитывая равенство (3), находим

$P/P_* \approx 1 + c^2\pi^2/(4l^2)$ или $c/l=2\sqrt{P/P_*-1}/\pi$.

Таким образом, получена более грубая зависимость наибольшего прогиба стержня от нагрузки, чем формула (7).

Приложение метода Бубнова-Галеркина

По существу, для получения формулы (7) Мизес применил метод Бубнова-Галеркина. Однако уточняя формулу (7) с помощью выражения $y_m = c - c_1$, необходимо, кроме вычисления коэффициента c_1, уточнить и коэффициент с, включая члены такого же порядка малости, как и c_1. Действительно, в дифференциальном уравнении упругой линии стержня

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{P}{EI}y\sqrt{1-(dy/ds)^2}=0$$

представим корень выражением в виде ряда

$$\sqrt{1-(dy/ds)^2}=1-\frac{1}{2}(dy/ds)^2-\frac{1}{8}(dy/ds)^4-\ldots$$

и перенесем нелинейные члены в правую часть. Тогда имеем

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{P}{EI}y=\frac{P}{EI}y\left(\frac{1}{2}(dy/ds)^2+\frac{1}{8}(dy/ds)^4+...\right). \tag{11}$$

Подставляя в уравнение (11) выражение (3) и учитывая в правой части лишь первые два члена, получим

$$\begin{gathered}\left(-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2+\frac{P}{EI}\right)c\sin\frac{\pi s}{l}=\frac{P}{EI}c\left\{\left(\frac{1}{8}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2+\frac{1}{64}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^4\right)\sin\frac{\pi s}{l}+\right.\\ \left.+\left(\frac{1}{8}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2+\frac{3}{128}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^4\right)\sin\frac{3\pi s}{l}+\frac{1}{128}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^4\sin\frac{5\pi s}{l}\right\}.\end{gathered} \tag{12}$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin(\pi s/l)$, выводим уравнение для определения зависимости прогиба от нагрузки

$$-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2+\frac{P}{EI}=\frac{P}{EI}\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2+\frac{1}{64}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^4\right\},$$

или $z^2 + z = p = (\lambda - 1)/\lambda$, где $z = (c\pi/l)^2/8$, $\lambda = P/P_* \geq 1$. Отсюда находим

$$z=\left(-1+\sqrt{1+4p}\right)/2\approx\left(-1+1+4p/2-(4p)^2/8\right)/2=p(1-p).$$

Следовательно:

$$\frac{y_m}{l}=\frac{c}{l}=\frac{\sqrt{8p(1-p)}}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{\pi\lambda}\sqrt{\lambda-1}\,. \tag{13}$$

Расчеты показывают, что формула (13), полученная с помощью квадратичной аппроксимации точного решения [18], существенно точнее упомянутых выше формул и отличается от (7) лишь множителем $\lambda = P/P_*$ в знаменателе. Таким образом, считая, что стержень принимает форму одной полуволны синусоиды (3) и не учитывая величину коэффициента c_1, получаем более точную формулу, чем (7) и (8).

Для уточнения формулы (13), предположим, что стержень принимает форму линейной комбинации двух синусоид с последовательными нечетными числами полуволн

$$y=c\sin\frac{\pi s}{l}+d\sin\frac{3\pi s}{l}. \tag{14}$$

Дифференциальный оператор

$$\left(()^{\prime 2}/2+()^{\prime 4}/8\right)()$$

преобразует (14) в

$$\begin{gathered}\left(\frac{\pi^2}{8l^2}\left(c^2-5cd+18d^2\right)+\frac{\pi^4}{128l^4}\left(2c^4-9c^3d+108c^2d^2-270cd^3+486d^4\right)\right)c\sin\frac{\pi s}{l}+\\ +\left(\frac{\pi^2}{8l^2}\left(c^3+2c^2d+9d^3\right)+\frac{3\pi^4}{128l^4}\left(2c^5+2c^4d+22c^3d^2+36c^2d^3+54d^5\right)\right)\sin\frac{3\pi s}{l},\end{gathered}$$

где отброшена линейная комбинация синусоид с числом полуволн большим 3. Таким образом, подставляя выражение (14) в уравнение (11), учитывая в правой части лишь первые два члена и приравнивая коэффициенты при $\sin(\pi s/l)$ и $\sin(3\pi s/l)$ соответственно, получим систему уравнений для определения коэффициентов c и c_1. Обозначая $a=\pi c/l$, и $b=\pi d/l$ и $\lambda=P/P_*$, окончательно имеем систему двух уравнений для определения a и b через λ вида

$$\frac{\lambda-1}{\lambda}=\left(a^2-5ab+18b^2\right)/8+\left(2a^4-9a^3b+108a^2b^2-270ab^3+486b^4\right)/128,$$

$$\frac{\lambda-9}{\lambda}b=\left(a^3+2a^2b+9b^3\right)/8+3\left(a^5+2a^4b+22a^3b^2+36a^2b^3+54b^5\right)/128,$$

или, исключая λ из второго уравнения и отбрасывая члены более высокого порядка малости:

$$\begin{aligned} &a^4/8+18b^2-5ab+a^2-8p=0,\\ &a^3-7a^2b+45ab^2-153b^3+64b=0, \end{aligned} \qquad (15)$$

где p = $(\lambda-1)\lambda$. Подставляя в первое уравнение системы (15) приближенное выражение $b\approx-a^3/64$, которое следует из второго уравнения, получим

$$a^4/8+18(a^3/64)^2+5a^4/64+a^2-8p=0,$$

или приближенно:

$$13a^4+64(a^2-8p)=0.$$

Отсюда имеем

$$a^2=\left(-32+32\sqrt{1+13p/2}\right)/13\approx 8p-13p^2,$$

$$a=2\sqrt{2p}\left(1-13p/16\right)$$

и, следовательно,

$$a-b=a\left(1+a^2/64\right)\approx 2\sqrt{2p}\left(1-13p/16\right)\left(1+p/8\right)\approx 2\sqrt{2p}\left(1-11p/16\right),$$

то есть наибольший прогиб приближенно равен

$$y_m=c-d=2\sqrt{2pl}\left(1-11p/16\right)/\pi. \qquad (16)$$

Расчеты подтверждают, что формула (16) точнее формул (10) и (13). Формулы (13) и (16) могут оказаться полезными для расчета механических регуляторов при создании механических управляющих систем.

Заключение

При решении нелинейных дифференциальных уравнений метод Бубнова-Галеркина приводит к значительным трудностям, так как возникает система нелинейных алгебраических уравнений. Однако на примере описания закритического поведения сжатого гибкого стержня показано, что при удачном выборе координатных функций для представления решения и аккуратном упрощении получаемой нелинейной алгебраической системы уравнений с учетом всех величин одного порядка малости метод Бубнова-Галеркина позволяет получить формулы, превосходящие по точности аналоги, выводимые другими методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николаи Е.Л.* О работах Эйлера по теории продольного изгиба//Труды по механике. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
2. *Крылов А.Н.* О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе / Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
3. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
4. *Mises R.V.* Ausbiegung eines auf Knicken beanspruchten Stabes //ZAMM. 1924. Bd.4.
5. *Астапов Н.С.* Закритическое поведение стержня // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ие. Ин-т гидродинамики. 1989. Вып. 92. С. 14-21.
6. *Тимошенко С.П.* Проблемы упругой устойчивости. / Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избранные работы под ред. Э.И. Григолюка. М.: Наука, 1971.
7. *Тимошенко С.П.* Вопросы устойчивости упругих систем. Пер. с нем. Л.: Изд-во КУБУЧ, 1935.
8. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.;Л.: ОГИЗ, 1946.
9. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1955.
10. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов, Т. II. Пер. с 3-о американского изд. М.: Наука, 1965.
11. *Динник А.Н.* Устойчивость упругих систем. М.;Л.: ОНТИ, 1935.
12. *Динник А.Н.* Избранные труды. Т. III. Киев: Изд-во АН Украинской ССР, 1956.
13. *Динник А.Н.* Продольный изгиб. М.;Л.: ГОНТИ, 1939.
14. Справочник по технической механике / Под ред. акад. *А.Н. Динника*. М.: ОГИЗ; Гостехиздат, 1949.
15. *Астапов Н.С.* Приближенные формулы для прогибов сжатых гибких стержней /Прикладная механика и техническая физика. 1996. Т. 37. N4. С. 135-138.
16. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Кн.1. М.: Мир, 1984.
17. *Терегулов И.Г.* Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности: Учебник для студентов вузов. М.: Высш. шк., 1984.
18. *Астапова Е.С., Астапов Н.С.* Несколько примеров квадратичного суммирования степенных рядов. //Известия вузов. Математика. 2003. №6. С. 23-27.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Л. Ереминым.