



УДК 621.391

© 2005 г. **Цинь Хуну**
(Чанчуньский университет, КНР),

Чье Ен Ун, д-р техн. наук
(Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА АРСС-МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассматриваются вопросы моделирования случайных сигналов с использованием АРСС-моделей, определения их параметров и погрешностей модельного представления.

Введение

Моделирование случайных процессов может проводиться различными методами. Одним из них является использование моделей авторегрессии-скользящего среднего (АРСС). Это объясняется широкими возможностями такого метода и малым числом параметров, которыми необходимо оперировать.

Большинство исследований, связанных с АРСС-моделями [1 – 4], сводится к определению их параметров для описания конкретных случайных процессов и в качестве отправной точки имеют гипотезу о том, что исследуемый процесс порождается отбеленным шумом. Поэтому спектральные свойства АРСС-реализаций измерительного сигнала будут прямо зависеть от аналогичных свойств реализаций белого шума.

Спектральные характеристики АРСС-моделей

В общем виде дискретный случайный процесс $x(t)$ можно описать обобщенным операторным уравнением авторегрессии-скользящего среднего [1]:

$$x(t) = A_p^{-1}(B)C_q(B)E(t),$$

где $A_p(B)$ – оператор авторегрессии порядка p ; $C_q(B)$ – оператор скользящего среднего порядка q ; $E(t)$ – последовательность независимых случайных величин с нулевым средним значением и единичной дисперсией, имеющих одинаковое распределение.

Для ряда приложений важной характеристикой сигнала является спектральная характеристика. Спектральная плотность АРСС-процесса определяется выражением [2]:

$$S_{APCC}(\omega) = \sigma_t^2 \frac{(1 - \sum_{i=1}^q c_i \cos i\omega)^2 + (\sum_{i=1}^q c_i \sin i\omega)^2}{(1 - \sum_{k=1}^p d_k \cos k\omega)^2 + (\sum_{k=1}^p d_k \sin k\omega)^2},$$

где c_i – i -й коэффициент скользящего среднего; d_i – i -й коэффициент авторегрессии; q и p – соответственно порядки формирующих фильтров скользящего среднего и авторегрессии.

Из приведенной выше формулы, с учетом единичной дисперсии исходного белого гауссовского шума, для АР-процессов первого порядка следует:

$$S(\omega) = \frac{1}{1 - 2a_1 \cos(\omega) + a_1^2}.$$

Графики $S(\omega)$ при a_1 , изменяющемся в диапазоне $[-0,99; 0,99]$, приведены на рис. 1, причем диапазон изменений a_1 выбран из требования стационарности выходного АР-процесса.

Как следует из рисунка, при $a_1 > 0$ с помощью процесса АР(1) можно моделировать сигналы, содержащие постоянную составляющую, со спектральной плотностью, сосредоточенной в области низких частот (НЧ).

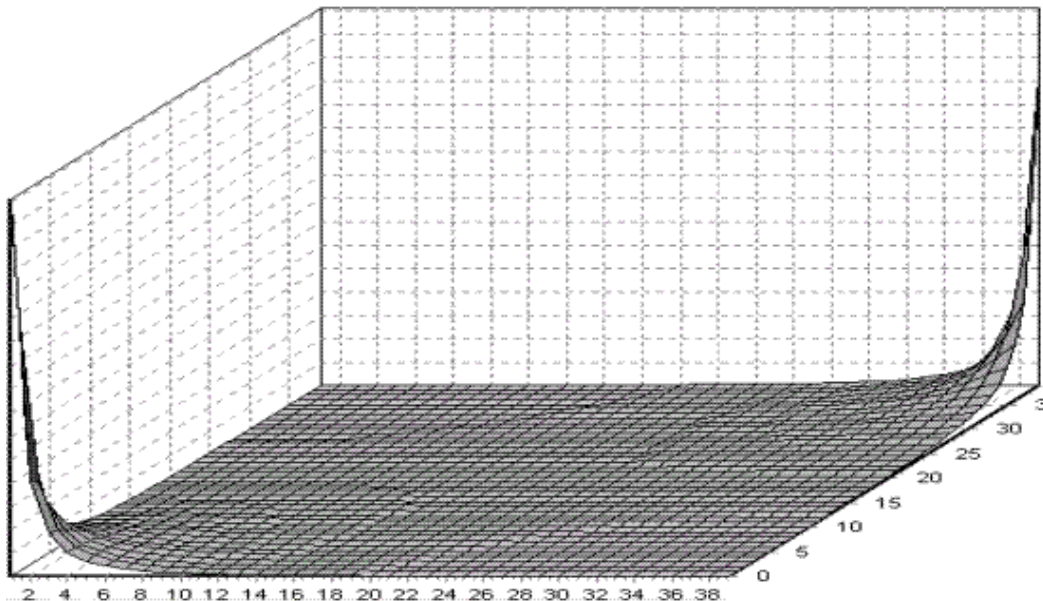


Рис. 1. Теоретические АЧХ для АР(1)-процесса.

Уровень постоянной составляющей и уровень высокочастотных (ВЧ) составляющих в спектре сигнала задаются величиной a_1 :

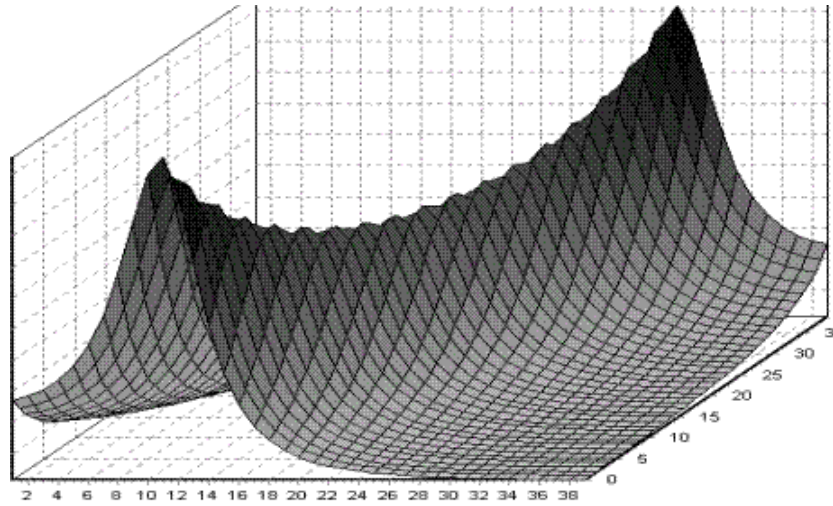
$$S(0) = \frac{1}{1 - 2a_1 + a_1^2};$$

аналогично для $a_1 < 0$ АР-модель описывает сигнал с преобладанием ВЧ области спектра.

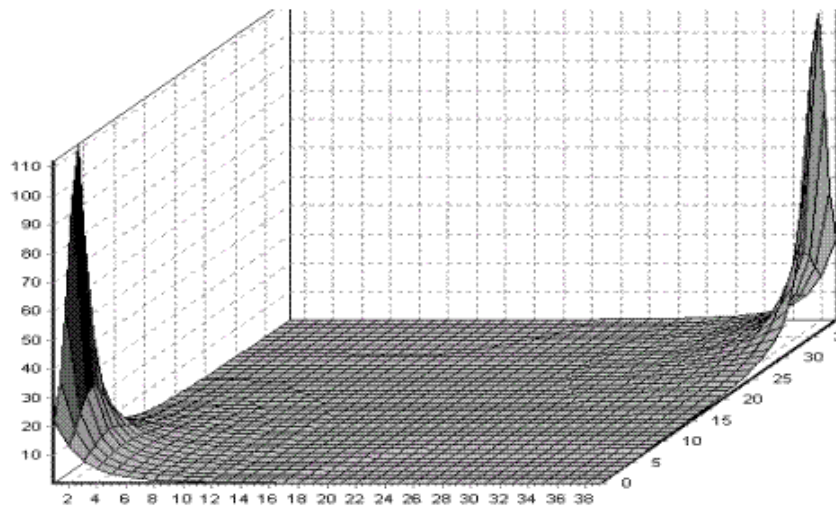
Для процесса АР(2) имеем:

$$S(\omega) = \frac{1}{1 - 2[a_1 \cos(2\omega) + a_1(1 - a_2) \cos(\omega)] + a_1^2 + a_2^2}.$$

Зависимости $S(\omega)$ для двух фиксированных значений a_2 приведены на рис. 2.



а) $a_2 = 0,6$



б) $a_2 = -0,2$

Рис. 2. Примеры теоретических АЧХ для АР(2)-процессов.

Следует отметить, что в отличие от процессов АР(1) с помощью процесса АР(2) можно моделировать случайные процессы со спектральной плотностью, сосредоточенной в более узкой полосе частот. Так, при $a_2 < 0$ зависимость $S(\omega)$ приобретает резонансный характер, что позволяет на базе процесса АР(2) моделировать узкополосные сигналы, спектральные составляющие которых сосредоточены вокруг относительной угловой частоты ω_0 :

$$\omega_0 = \arccos\left(\frac{1}{4}a_1 - \frac{a_1}{a_2}\right).$$

Изменение ω_0 за счет варьирования параметров a_1 и a_2 приводит к изменению избирательности формирующего фильтра, что несколько ограничивает возможности моделирования узкополосных сигналов с заданной спектральной плотностью.

Для частоты ω_0 имеем [4]:

$$S(\omega_0) = \left[1 + a_1^2 + a_2(2 + a_2) + \frac{1}{4a_2}(a_1 - a_1a_2)^2 \right]^{-1}.$$

В качестве примера на рис. 3. приведены теоретическая спектральная плотность $S_T(\omega)$, определяемая по АЧХ формирующего фильтра и оценка спектральной плотности $S_1(\omega)$, произведенная по алгоритму БПФ для $N = 1024$ и числа реализаций $N_p = 1$, а также оценка $S_{10}(\omega)$ для $N = 1024$ и $N_p = 10$. Флуктуирующий характер оценок спектральной плотности $S_1(\omega)$ и $S_{10}(\omega)$ можно объяснить “неидеальностью” используемой модели белого гауссовского шума.

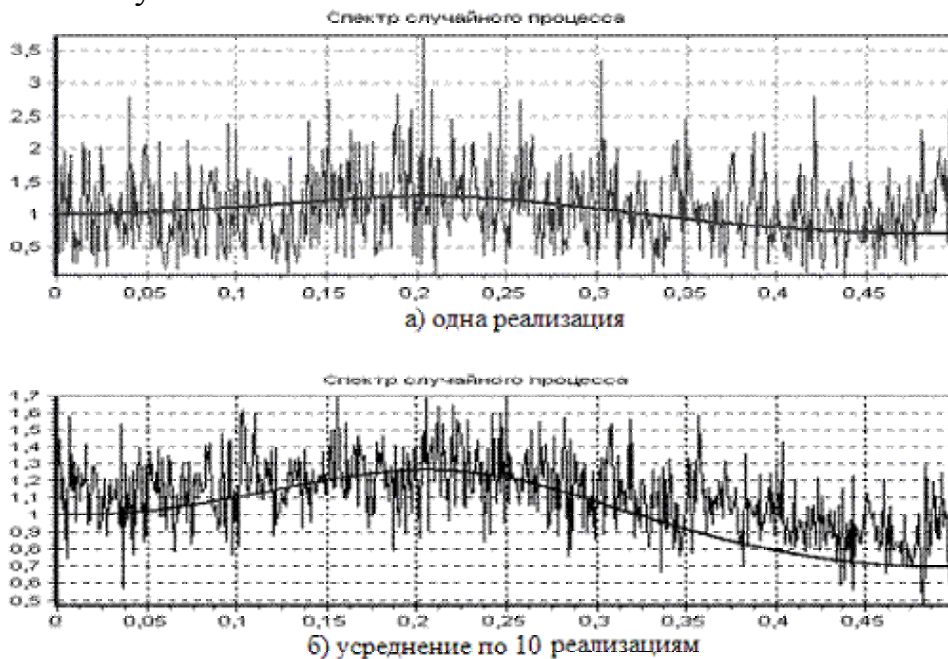


Рис. 3. Спектр реализации АР(2)-процесса.

Для СС-процессов АЧХ формирующего фильтра будет записываться аналогичным образом. На рис. 4 приведены графики $S(\omega)$ для СС-процесса первого порядка, а на рис. 5 – примеры АЧХ для СС(2)-процесса при нескольких фиксированных параметрах c_2 .

Теоретическая и реальная спектральные функции промоделированного СС(2)-процесса с параметрами $c_1 = 0,4$; $c_2 = -0,65$ приведены на рис. 6. Аналогичные графики для примеров АРСС(1)-процесса представлены на рис. 7, а для АРСС(2)-процесса – на рис. 8.

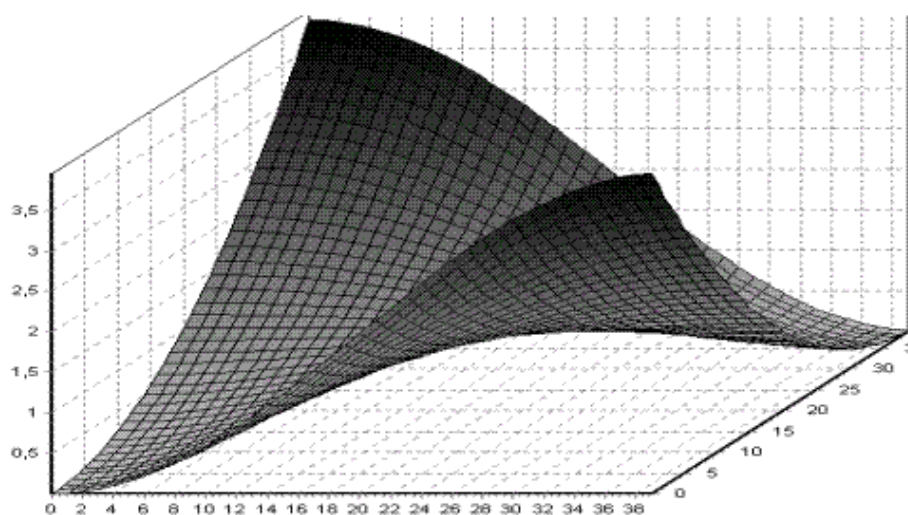
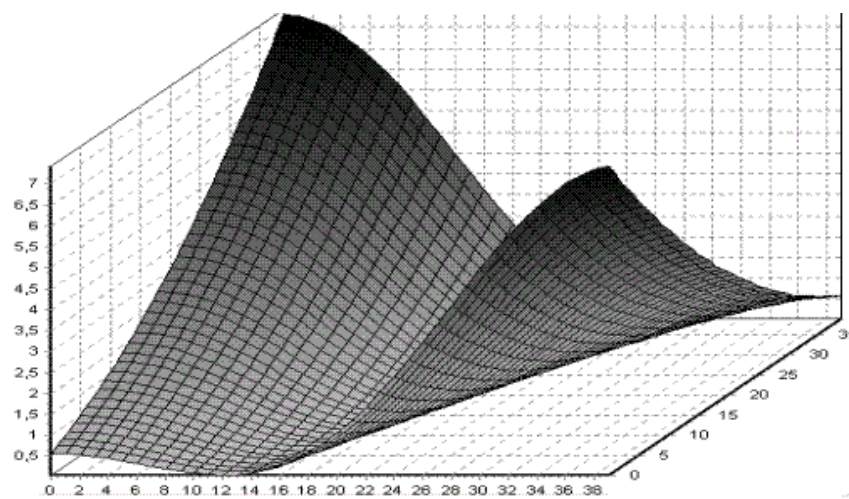
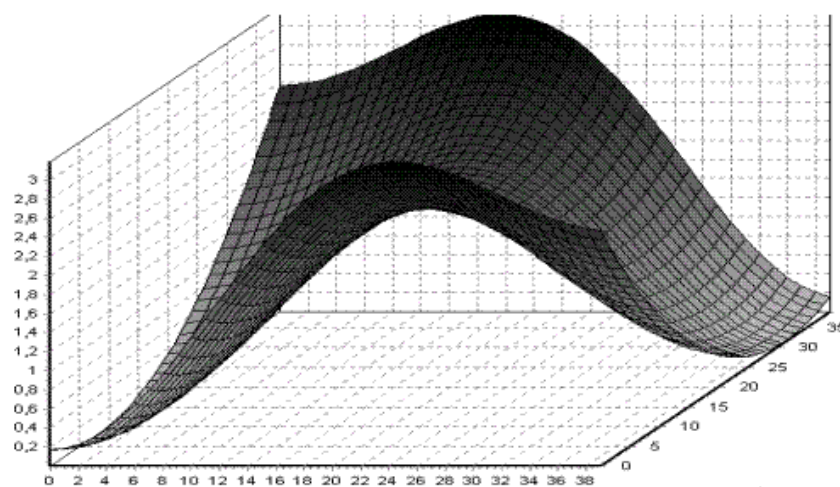


Рис. 4. Теоретические АЧХ для СС(1)-процесса.



а) $c_2 = 0,74$



б) $c_2 = -0,42$

Рис. 5. Примеры теоретических АЧХ для СС(2)-процессов.

В целом, можно отметить схожий характер поведения погрешностей СС-процессов и АР-процессов. Однако следует отметить, что, так как для СС-процессов свойственны более пологие спектральные характеристики, то графики свойственных им погрешностей будут иметь более пологий вид. Спектральные функции АРСС-моделей случайных процессов имеют комбинированный характер, что приводит к общему увеличению значений свойственных им погрешностей. Это связано с наличием в АЧХ формирующего фильтра, как областей пропускания, так и областей подавления входного сигнала с достаточно крутыми переходными областями.

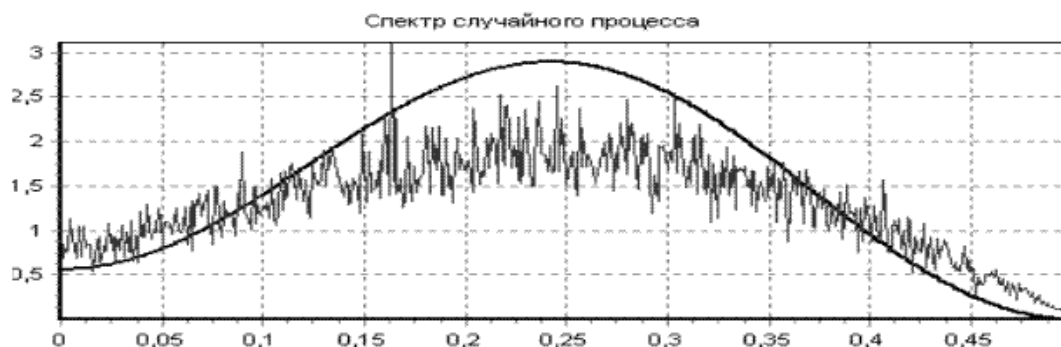


Рис. 6. АЧХ модели СС(2)-процесса.

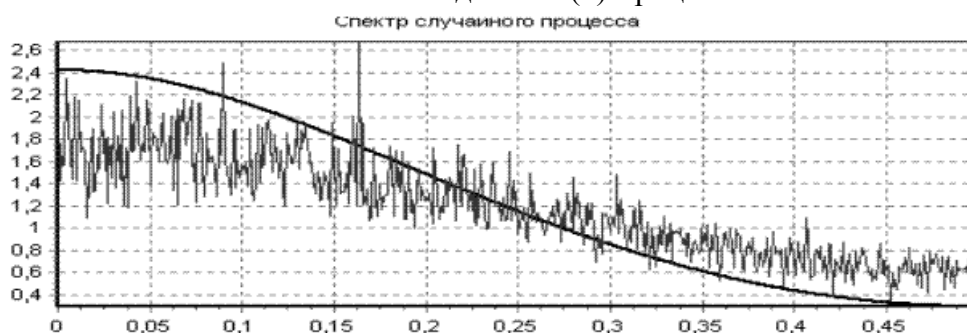


Рис. 7. АЧХ модели АРСС(1)-процесса.

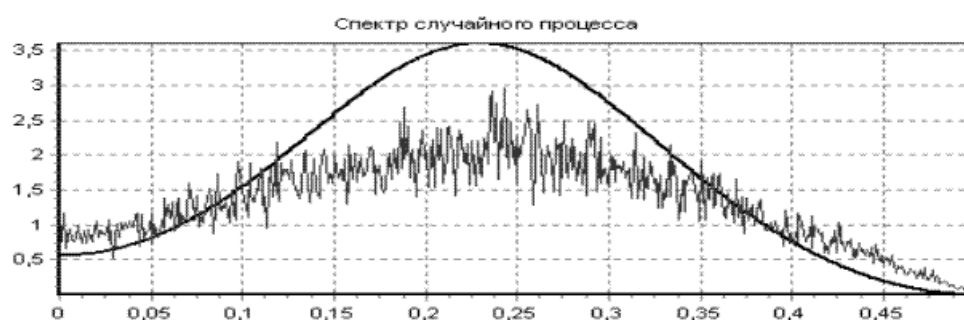


Рис. 8. АЧХ модели АРСС(2)-процесса.

Заключение

Из анализа полученных результатов следует, что наибольшее отклонение модели процесса от теоретической кривой – в областях с максимальной спектральной плотностью. В первую очередь это связано с конечным размером выборки моделируемого процесса и с «неидеальными» параметрами входного белого шума.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991.
2. *Кармалита В.А.* Цифровая обработка случайных колебаний. М.: Машиностроение, 1986.
3. *Шалыгин А.С., Палагин Ю.И.* Прикладные методы статистического моделирования. Л.: Машиностроение, 1986.
4. *Chye En Un.* Modelling Signals With Giving Spektral and Statistic Performences // The Actual Problems of The Scientific and Technological Progress of The Far Eastern Region /Proceedings of Third Russian-China Simposium. Khabarovsk, 1993. P.5-9.