



УДК 681.5.015.63-192

© 2005 г. Г.Б. Диго,
Н.Б. Диго

(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВА ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА НА ОСНОВЕ РАЗВЕРТОК ПЕАНО¹

Анализируется возможность использования метода неравномерных сеток в задачах параметрического синтеза. Рассматривается алгоритм сведения многомерной задачи поиска экстремума к поиску экстремума одномерных задач на основе многошаговой схемы редукции размерности. Используются развертки Пеано.

Введение

Проектирование технических систем с учетом случайности процессов изменения их параметров связано с необходимостью решения ряда сложных и трудоемких задач. К их числу относятся задачи параметрического синтеза, в частности, оптимального выбора номинальных значений параметров проектируемых объектов. Основные трудности их решения обусловлены вероятностным характером критерия оптимальности и дефицитом информации о случайных закономерностях процессов изменения параметров проектируемых систем. Кроме того, приходится находить в области работоспособности экстремум целевой функции, когда она и ограничения на нее являются нелинейными функциями управляемых параметров.

Основные трудности, возникающие при решении таких задач, изложены в [1, 2]. Высокая вычислительная трудоемкость решения оптимизационных задач по стохастическим критериям заставляет искать способы более быстрого получения желаемых результатов, – например, методы поисковой оптимизации. Одним из путей уменьшения временных затрат при решении перечисленных задач является распараллеливание методов

¹ Работа выполнена в рамках проектов, получивших грант конкурса «Конкурс проектов ДВО РАН 2005 г.» по программе №16 Отделения энергетики, машиностроения, механики, процессов управления РАН «Проблемы анализа синтеза интегрированных технических и социальных систем управления» и по программе №17 Президиума РАН «Параллельные вычисления и многопроцессорные вычислительные системы».

оптимизации. Здесь возможны различные стратегии, среди них – применение параллельных аналогов методов случайного поиска, относящихся к методам иерархической оптимизации, и параллельного аналога метода сканирования (слепого поиска).

Сущность метода сканирования заключается в том, что вся допустимая область пространства параметров разбивается на элементарные ячейки, в каждой из которых по определенному алгоритму выбирается точка: в центре ячейки, на ребрах или вершинах, случайно. Последовательно просматриваются значения целевой функции, и среди них находится экстремум. Основное достоинство этого метода заключается в том, что при достаточно густом расположении точек всегда гарантируется отыскание глобального экстремума [2].

Основная трудность при использовании метода перебора состоит в том, что с увеличением размерности пространства поиска число узлов сетки растет экспоненциально. Сократить число точек перебора можно, используя априорную информацию. Например, если известно, что целевая функция непрерывна и обладает ограниченной константой Липшица в своей области определения, для решения задачи можно использовать методы покрытий или метод сведения многомерной задачи к одномерной на основе разверток Пеано [3, 4].

В данной статье рассматривается возможность использования разверток Пеано для анализа пространства поиска экстремума.

Постановка задачи

Задача оптимального параметрического синтеза состоит в выборе номинальных значений внутренних параметров исследуемого устройства $x_{ном} = (x_{1ном}, \dots, x_{nном})$, обеспечивающих максимум вероятности его безотказной работы в течение заданного времени:

$$x_{ном} = \arg \max P\{X(x_{ном}, t) \in D_x, \forall t \in [0, T]\}, \quad (1)$$

где $X(x_{ном}, t)$ – случайный процесс изменения параметров; D_x – область работоспособности; T – заданное время эксплуатации устройства.

Область работоспособности D_x , как правило, неизвестна, поэтому условия работоспособности обычно задаются системой неравенств:

$$a_j \leq y_j(\mathbf{x}) \leq b_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где $y = \{y_j\}_{j=1}^m$ – вектор выходных параметров устройства, причем $y_j = F_j(x_1, \dots, x_n)$, а $F_j(\bullet)$ – известный оператор, зависящий от топологии исследуемого устройства.

Пространство поиска экстремума

$$\Omega_x = \{X \in R^n \mid x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

содержит множество возможных (из условий физической реализуемости)

значений внутренних параметров.

В качестве количественного показателя надежности принимается вероятность:

$$P(\mathbf{y} \in D_{\mathbf{y}}, \forall t \in [0, T]) = P\left(\bigcap_{j=1}^m y_j \in [a_j, b_j]\right) = \varphi(\mathbf{y}). \quad (3)$$

Задача, описываемая (1) – (3), является классической оптимизационной, в ней целевой функцией выступает вероятность безотказной работы объекта $P(T)$ из (3), а ограничениями являются условия работоспособности (2) и ограничения на внутренние параметры. Эта задача имеет свою специфику, заключающуюся в том, что критерий оптимизации стохастический, вычисляемый методом Монте-Карло. Поэтому используются методы поисковой оптимизации не выше нулевого порядка. Они требуют определения только значений целевой функции и являются достаточно общими. По сравнению с градиентными методами, различными методами линейного и нелинейного программирования эти методы поиска более грубые, однако имеют важное преимущество: они применимы ко многим типам задач.

Один из таких методов – метод сканирования. Он применим независимо от конкретных свойств целевой функции и функций, ограничивающих область работоспособности. В этом методе можно достичь сокращения числа точек перебора, используя априорную информацию.

Предположим, что $\varphi(\mathbf{y})$ из (3) в своей области определения удовлетворяет условию Липшица ($\varphi(\mathbf{y}) \in L$), т.е.

$$\varphi(\mathbf{y}_k) - c\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\| \leq \varphi(\mathbf{y}) \leq \varphi(\mathbf{y}_k) + c\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|.$$

Многомерная многоэкстремальная задача состоит в оценке точки $\mathbf{y}^*$ и значения φ^* – максимума вещественной функции $\varphi(\mathbf{y})$ в n -мерном гиперкубе (или гиперпараллелепипеде) D , т.е.

$$\varphi^* = \varphi(\mathbf{y}^*) = \max_{\mathbf{y} \in D} \varphi(\mathbf{y}), \quad D = \{\mathbf{y} \in R^n : a_i \leq y_i \leq b_i, \quad 1 \leq i \leq n\}, \quad (4)$$

где $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Учитывая, что $\varphi(\mathbf{y}) \in L$, для решения (4) можно использовать многошаговую схему редукции размерности [4], т.е. сведение многомерной оптимизационной задачи к последовательности вложенных одномерных задач – ставится задача нахождения максимума $\varphi(\mathbf{y})$ из (4), используя редукцию с помощью разверток (кривых) Пеано.

Схема редукции размерности развертками Пеано

В силу $\varphi(\mathbf{y}) \in L$, φ^* из (4) можно представить в виде [4]

$$\max_{\mathbf{y} \in D} \varphi(\mathbf{y}) = \max_{y_1 \in [a_1, b_1]} \dots \max_{y_n \in [a_n, b_n]} \varphi(y_1, \dots, y_n). \quad (5)$$

Выражение (5) называется многошаговой схемой редукции размерности [4]. Его использование упрощает алгоритм многоэкстремальной максимизации, поскольку согласно (5) решение многомерной задачи сводится к решению одномерной задачи. Непрерывное и однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ вещественной оси на гиперкуб $D \subset R^n$ называется развертками Пеано [4].

Пусть функция $y(x), x \in [0,1]$ – кривая Пеано. Тогда из непрерывности $\varphi(y)$ и $y(x)$ и равенства

$$D = \{y(x) : 0 \leq x \leq 1\} \quad (6)$$

следует, что

$$\max_{y \in D} \varphi(y) = \max_{x \in [0,1]} \varphi(y(x)), \quad (7)$$

т.е. решение многомерной задачи максимизации функции $\varphi(y)$ сводится к максимизации одномерной функции $\varphi(y(x))$.

Схема редукции (7) обеспечивает построение постепенно уплотняющейся под заданную точность неравномерной сетки сразу по всей области D . В случае прерывания вычислений получается оценка максимума для всей области, но с точностью, меньшей заданной. Следует отметить, что при использовании схемы редукции (7) теряется часть информации о близости точек в многомерном пространстве (точки y' и y'' , близкие в гиперкубе из (6), могут иметь прообразы x' и x'' при соответствии $y(x)$, которые не являются близкими в отрезке $[0,1]$). Это можно устранить, если для точки y , в которой вычислено значение функции, восстанавливать все прообразы x [4].

Кривую Пеано определим как непрерывное однозначное отображение $y(x)$ отрезка $[0, 1]$ на гиперкуб

$$D = \{y \in R^n : -1/2 \leq y_i \leq 1/2, \quad 1 \leq i \leq n\} \quad (8)$$

(область D (4) приводима к виду (8) линейным преобразованием координат). Тогда алгоритм ее построения сводится к следующему.

Во-первых, гиперкуб D из (8), с длиной ребра 1, делится координатными плоскостями на 2^n кубов «первого разбиения» (длина ребра $1/2$), пронумерованных числами z_1 от 0 до $2^n - 1$. Гиперкуб первого разбиения с номером z_1 обозначается $D(z_1)$. Каждый гиперкуб первого разбиения, в свою очередь, также разбивается на 2^n гиперкубов второго разбиения (длина ребра $1/4$) гиперплоскостями, параллельными координатным и проходящими через серединные точки ребер гиперкуба, ортогонального к этим гиперплоскостям. Гиперкубы второго разбиения, входящие в $D(z_1)$, нумеруются числами z_2 от 0 до $2^n - 1$, причем гиперкуб второго разбиения с номером z_2 , входящий в $D(z_1)$, обозначается $D(z_1, z_2)$. Процесс

продолжается до построения гиперкубов любого m -го разбиения с длиной ребра $(1/2)^m$, обозначаемых $D(z_1, z_2, \dots, z_m)$, причем

$$D(z_1) \supset D(z_1, z_2) \supset \dots D(z_1, z_2, \dots, z_m)$$

и $0 \leq z_j \leq 2^n - 1$, $1 \leq j \leq m$.

Во-вторых, осуществляется аналогичное деление отрезка $[0,1]$ на 2^n равных частей, нумеруемых в каждом разбиении слева направо числами z_j (j – номер разбиения) от 0 до $2^n - 1$. Интервалы m -го разбиения обозначаются $d(z_1, z_2, \dots, z_m)$, например, $d(z_1, z_2)$ – интервал второго разбиения с номером z_2 , являющийся частью интервала $d(z_1)$ первого разбиения с номером z_1 . При этом

$$d(z_1) \supset d(z_1, z_2) \supset \dots d(z_1, z_2, \dots, z_m)$$

и длина интервала $d(z_1, z_2, \dots, z_m)$ равна $(1/2)^{mn}$. Предполагается, что $d(z_1, z_2, \dots, z_m)$ содержит свой левый конец, а правый конец тогда и только тогда, когда $z_1 = z_2 = \dots z_m = 2^n - 1$.

В-третьих, принимается, что точка $y(x) \in D$, соответствующая $x \in [0,1]$, при любом $m \geq 1$ содержится в гиперкубе $D(z_1, z_2, \dots, z_m)$, если x принадлежит интервалу $d(z_1, z_2, \dots, z_m)$, т.е.

$$x \in d(z_1, z_2, \dots, z_m) \rightarrow y(x) \in D(z_1, z_2, \dots, z_m).$$

Построенное соответствие $y(x)$ является однозначным.

В-четвертых, для любого $x \in d(z_1, z_2, \dots, z_m)$ справедливо

$$x - (1/2)^{mn} \leq \sum_{j=1}^m z_j (1/2)^{jn} \leq x + (1/2)^{mn}.$$

В-пятых, для непрерывности построенного отображения накладываются требования на порядок нумерации гиперкубов каждого разбиения.

Определим вектор $z^m = (z_1, z_2, \dots, z_m)$, соответствующий гиперкубу $D(z_1, z_2, \dots, z_m)$ m -го разбиения, и условимся, что z^m предшествует вектору $\bar{z}^m$, если при $m \geq 1$ либо $z_1 < \bar{z}_1^m$, либо существует такое k , $1 \leq k \leq m$, что $z_j = \bar{z}_j^m$, $1 \leq j \leq k$, и $z_{k+1} < \bar{z}_{k+1}^m$. Отношение предшествования устанавливает строгий порядок на множестве 2^{mn} различных векторов z^m с минимальным $(0, 0, \dots, 0)$ и максимальным $(2^n - 1, 2^n - 1, \dots, 2^n - 1)$ элементом. Назовем векторы z^m и $\bar{z}^m$ (соответственно гиперкубы $D(z_1, z_2, \dots, z_m)$ и $D(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m)$) смежными, если один из них предшествует другому и не существует вектора $\tilde{z}^m$ такого, что $z^m \prec \tilde{z}^m \prec \bar{z}^m$ или $\bar{z}^m \prec \tilde{z}^m \prec z^m$, где

$\prec$ – символ отношения предшествования. Для непрерывности построенного отображения достаточно, чтобы смежные гиперкубы любого m -го разбиения имели общую грань.

Кривая Пеано $y(x)$ определена через соответствие между интервалами $d(z_1, z_2, \dots, z_m)$ и гиперкубами $D(z_1, z_2, \dots, z_m)$ разбиения с номером m ($m = 1, 2, \dots$) такое, что из $x \in d(z_1, z_2, \dots, z_m)$ следует $y(x) \in D(z_1, z_2, \dots, z_m)$. Поэтому для любой заданной точности $\varepsilon > 0$ можно выбрать значение $m \geq 1$, удовлетворяющее условию $(1/2)^{m+1} \leq \varepsilon$, и принять в качестве оценки точки $y(x)$ центр $y(z_1, z_2, \dots, z_m)$ гиперкуба $D(z_1, z_2, \dots, z_m)$, содержащего точку $y(x)$.

Точность такого приближения по любой координате будет не хуже ε , так как

$$|y_i(x) - y_i(z_1, \dots, z_m)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \leq \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Поэтому приближенное вычисление точки $y(x)$ сводится к определению центра $y(z_1, \dots, z_m)$ гиперкуба $D(z_1, \dots, z_m)$, соответствующего последовательности номеров

$$z_j = \sum \alpha_{nj-i} (2^i), \quad 1 \leq j \leq m,$$

где $\alpha_{nj-i} = 0$ или 1 из двоичного представления z_j .

Схема параллельного алгоритма

Предлагаемый алгоритм реализует идею параллельных вычислений при решении (4) путем одновременного решения всех одномерных задач вида (7) аналогично подходу, изложенному в [6]. При этом каждая одномерная задача решается на отдельном процессоре, и процессоры обмениваются информацией о результатах вычислений, полученных на каждом шаге. Такой обмен позволяет рассматривать результаты, полученные конкретным процессором, как результаты, полученные на всех остальных процессорах, что ускоряет процесс решения. Для организации взаимодействия на всех используемых процессорах создаются очереди, в которые конкретный процессор помещает информацию о проведенных вычислениях для других процессоров. Сам он берет информацию о результатах, полученных в других задачах, из начала закрепленных за ним очередей на других процессорах и из начала закрепленной за ним очереди на нем самом. Алгоритм выбора точек на каждом шаге приближения одинаков для всех процессоров. Первый шаг осуществляется в заданной начальной точке, при этом для каждой одномерной задачи эти точки разные. Выбор точки для любого следующего приближения, выполняемого отдельным процессором, производится согласно алгоритму и этапам, приведенным в пре-

дыдущем разделе. Поскольку функция $\varphi(y)$ из (3) задана алгоритмически, ее значения оцениваются методом Монте-Карло [2]. Для этого предлагается использовать распределенный параллельный метод Монте-Карло.

Заключение

Предложенный в статье подход призван сократить вычислительные затраты процесса параметрического синтеза за счет сокращения количества точек перебора при анализе пространства поиска экстремума. Проведенные исследования показывают, что использование многошаговой схемы редукции размерности упрощает алгоритм многоэкстремальной максимизации сведением решения многомерной задачи к решению одномерной задачи. Проанализирована возможность использования распределенных параллельных вычислений при решении многоэкстремальной задачи оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов О.В.* Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. М.: Наука, 1992.
2. *Абрамов О.В., Катыева Я.В.* Использование технологии параллельных вычислений в задачах анализа и оптимизации. // Проблемы управления. 2003. №4. С. 11-15.
3. *Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г.* Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991.
4. *Стронгин Р.Г.* Численные методы в многоэкстремальных задачах. М.: Наука, 1978.
5. *Александров В.В., Горский Н.Д., Поляков А.О.* Рекурсивные алгоритмы обработки и представления данных // Алгоритмы и системы автоматизации исследований и проектирования. М.: Наука, 1980. С. 40-78.
6. *Стронгин Р.Г.* Параллельная многоэкстремальная оптимизация с использованием множества разверток // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т.31. №8. С. 1173-1185.
7. *Абрамов О.В., Диго Г.Б., Диго Н.Б., Катыева Я.В.* Параллельные алгоритмы построения области работоспособности // Информатика и системы управления. 2004. №2(8). С. 121-133.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.В. Абрамовым.