



УДК 681.5.015.63-192

© 2005 г. **Я.В. Катуева**, канд. техн. наук
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ НОМИНАЛОВ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА¹

Рассматривается задача выбора оптимальных параметров аналоговых технических устройств и систем по стохастическим критериям, возникающая в процессе проектирования и управления с учетом параметрических возмущений. Для ее решения предложен параллельный алгоритм дискретной оптимизации на множестве номиналов параметров, ориентированный на массивно-параллельные суперкомпьютеры.

Введение

Создание и развитие многопроцессорных систем массивно-параллельного типа с распределенной памятью обеспечивает новые возможности применения параллельных алгоритмов для эффективного поиска решений в сложных многомерных задачах анализа и оптимизации. К классу подобных задач относится задача оптимального параметрического синтеза, возникающая на этапе схмотехнического моделирования и заключающаяся в принятии наилучших проектных решений с учетом производственных и эксплуатационных отклонений параметров проектируемых систем от их номинальных (расчетных) значений. Для поиска эффективных вариантов проектных решений необходимы алгоритмические и программные средства многовариантного анализа и оптимизации по стохастическим критериям.

Постановка задачи

Задача оптимального параметрического синтеза [1] состоит в выборе номинальных значений внутренних параметров исследуемого устройства $x_{ном} = (x_{1\ ном}, ..., x_{n\ ном})$, обеспечивающих максимум вероятности его безот-

¹ Работа выполнена в рамках проектов, получивших грант конкурса «Конкурс проектов ДВО РАН 2005 г.» по программе №16 Отделения энергетики, машиностроения, механики, процессов управления РАН «Проблемы анализа синтеза интегрированных технических и социальных систем управления» и по программе №17 Президиума РАН «Параллельные вычисления и многопроцессорные вычислительные системы».

казной работы в течение заданного времени эксплуатации:

$$x_{ном} = \arg \max P\{X(x_{ном}, t) \in D_x, \forall t \in [0, T]\}, \quad (1)$$

где $X(x_{ном}, t)$ – случайный процесс изменения параметров; D_x – область работоспособности; T – заданное время эксплуатации устройства. Область работоспособности D_x , как правило, неизвестна, поэтому условия работоспособности обычно задаются системой неравенств:

$$a_j \leq y_j(\mathbf{x}) \leq b_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где $\mathbf{y} = \{y_j\}_{j=1}^m$ – вектор выходных параметров устройства, причем $y_j = F_j(x_1, \dots, x_n)$, а $F_j(\bullet)$ – известный оператор, зависящий от топологии исследуемого устройства.

В качестве количественного показателя надежности принимается вероятность:

$$\begin{aligned} P(Y(t) \in D_y, \forall t \in [0, T]) &= P(\mathbf{y}(X(t)) \in D_y, \forall t \in [0, T]) = \\ &= P\left(\bigcap_{j=1}^m y_j(X(t)) \in [a_j, b_j] \forall t \in [0, T]\right). \end{aligned}$$

При $t = 0$ данное выражение служит для оценки серийнопригодности.

Поскольку номинальные значения параметров схемных элементов должны принадлежать ряду стандартных значений, регламентированных техническими условиями или ГОСТами, иногда предпочтительнее искать оптимальный вектор номиналов параметров на дискретном множестве номиналов $D_n^{ен}$, соответствующем стандартным значениям типономиналов параметров.

Пусть известны множества типономиналов для каждого из n варьируемых параметров схемных элементов исследуемого устройства:

$$\begin{aligned} nom_1 &= \{x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^{r_1}\}, \quad x_1^1 < x_1^2 < \dots < x_1^{r_1}; \dots; \\ nom_n &= \{x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^{r_n}\}, \quad x_n^1 < x_n^2 < \dots < x_n^{r_n}. \end{aligned}$$

Определим дискретное множество D_n как множество возможных сочетаний типономиналов параметров:

$$\begin{aligned} D_n &= \{\mathbf{x}_n: x_1 \in nom_1, \dots, x_n \in nom_n\}, \\ L &= \prod_{i=1}^n r_i - \text{число элементов множества } D_n. \end{aligned}$$

Тогда задача (1) будет эквивалентна задаче поиска номинала на дискретном множестве возможных сочетаний типономиналов

$$\mathbf{x}_n^{opt} = \max_{\mathbf{x}_n \in D_n} P_r(\mathbf{x}_n). \quad (3)$$

Приведенную выше задачу можно считать классической оптимизационной задачей, в качестве целевой функции выступает вероятность без-

отказной работы объекта, а ограничениями являются условия эксплуатации и область реализуемых значений параметров устройства.

Методы вычисления целевой функции и оптимизации параметрической надежности

Для вычисления целевой функции используются методы статистического анализа (Монте-Карло) и метод критических временных сечений [1].

Метод Монте-Карло позволяет получить оценку вероятности безотказной работы устройства (оценка вероятности по частоте).

При вычислении оценки серийнопригодности устройства достаточно проверить выполнение условий (2) для реализаций случайной величины $X_0(x_{ном})$. Если условия работоспособности выполняются, то реализация относится к числу «хороших», в противном случае – «плохих».

При вычислении оценки вероятности безотказной работы устройства в течение заданного времени привлекается метод критических сечений [1], который основан на возможности представления случайного процесса $Y(t)$ конечным числом случайных величин, получаемых во временных t -сечениях исследуемого процесса. Использование данного метода позволяет отнести реализацию системы к «хорошим» или «плохим» для всего заданного времени эксплуатации.

Если реализация процесса обладает вышеописанным свойством, то

$$P(T) = P\{[a \leq Y(t_0) \leq b \cap a \leq Y(t_1) \leq b \cap \dots \cap a \leq Y(t_K) \leq b]\},$$

где a, b – заданные границы допуска; $t_0, t_1, \dots, t_K$ – точки локальных экстремумов реализации на интервале $[0, T]$ (критические временные сечения); $t_0=0, t_K=T$.

Для монотонных случайных процессов изменения выходных параметров системы $Y(t)$ вероятность невыхода $Y(t)$ за пределы $[a, b]$, в течение заданного времени определится следующим образом:

$$P(T) = P\{[a \leq Y(0) \leq b \cap a \leq Y(T) \leq b]\}.$$

Аналогично получаются соотношения для оценки параметрической надежности и при аппроксимации случайных процессов более сложного вида.

Таким образом, для определения работоспособности реализации системы рассчитываются выходные параметры устройства для реализации случайной величины $X_0(x_{ном})$, проверяются условия (2). Если эти условия не выполняются, то реализация относится к числу «плохих». Иначе вычисляется реализация случайного процесса $X(X_0(x_{ном}), t_i)$ изменения параметров элементов для следующего временного сечения, вычисляются выходные параметры, проверяются условия работоспособности и т.д. в зависимости от числа критических сечений. Как было показано выше, чтобы отнести реализацию к числу «хороших», необходимо, чтобы она удовлетворяла условиям (2) на всех критических временных сечениях.

Оценкой параметрической надежности (серийнопригодности) служит отношение числа «хороших» реализаций к общему числу реализаций случайных параметров элементов. Число расчетов N , равное числу реализаций случайного вектора параметров $X_0(x_{ном})$, определяется из условия обеспечения необходимой точности оценки критерия [2]. Обычно для этого на каждом шаге поиска проводится полный расчет системы от нескольких сотен до тысячи раз.

Число моделирований системы в точке при использовании метода критических сечений для линейных процессов изменения параметров можно представить как

$$N(1 + P(X(x_{ном}))) = N + n_{g1},$$

где $P(X(x_{ном}))$ – серийнопригодность системы; n_{g1} – число точек, попавших в область работоспособности («хорошие») на первом временном сечении. Общие временные затраты решения задачи параметрического синтеза можно оценить следующим образом:

$$t_I + M(t_o + Nt_m) \leq t \leq t_I + M(t_o + KNt_m),$$

где t_I – накладные расходы на ввод-вывод, инициализацию системы, чтение данных, формирование модели устройства; N – число моделирований системы методом Монте-Карло; K – число критических временных сечений; t_m – время однократного расчета системы и проверки условий работоспособности; M – число шагов оптимизации; t_o – накладные расходы на один шаг оптимизации.

Распараллеливание вычислений на этапе получения оценки целевой функции дает высокую эффективность и ускорение, близкое к линейному при решении данной задачи на вычислителях массивно-параллельного типа с использованием специальных библиотек параллельных генераторов случайных чисел [3]. Однако эффективность данных алгоритмов часто ограничена характеристиками времени выполнения типового процесса, при большом количестве пробных точек (шагов оптимизации) будут существенно увеличиваться доля и время межпроцессорных обменов, поэтому более эффективной с точки зрения параллельных вычислений будет декомпозиция алгоритма на более высоком уровне – непосредственно на этапе оптимизации.

В настоящее время имеется достаточно широкий круг работ и исследований, посвященных проблемам и методам распараллеливания алгоритмов поисковой оптимизации [4]. Однако большинство данных разработок ориентированно на решение задач линейного программирования, методы расчета транспортных сетей, некоторые задачи нелинейного программирования.

Из-за того, что целевая функция вычисляется методом Монте-Карло с использованием метода критических сечений, не представляется воз-

можным изучить специфику области допустимых решений и рельеф целевой функции. Поэтому применение к задаче (1) методов оптимизации с порядком выше нулевого (различных форм дифференциального спуска или его рандомизированных аналогов) невозможно. Такие методы оптимизации требуют определения только значений целевой функции и являются достаточно общими. По сравнению с градиентными методами, различными методами линейного и нелинейного программирования эти методы поиска более грубые, однако имеют важное преимущество: они применимы ко многим типам задач.

Процедура полного перебора множества номиналов параметров соответствует дискретной (комбинаторной) оптимизации в задаче (1) или методу сканирования пространства поиска.

Данный метод не зависит от вида и характера целевой функции, имеет цикличную поисковую процедуру и всегда предоставляет возможность найти глобальный экстремум.

Метод решения

Решение данной задачи предлагается провести как двухэтапную параллельную процедуру.

На первом этапе предлагается ограничить пространство поиска в брус допусков, проведя аппроксимацию области работоспособности описанным параллелепипедом. Для этого определим брус допусков в пространстве параметров R^n :

$$B_d = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid x_i^1 \leq x_i \leq x_i^{r_n}, i = \overline{1, n} \}.$$

Используя изложенный в [5] параллельный алгоритм построения описанного бруса построим брус $B_0 \subseteq B_d$

$$B_0 = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid a_i^0 \leq x_i \leq b_i^0, i = \overline{1, n} \},$$

где $a_i^0 = \min_{\mathbf{x} \in D_x} x_i$; $b_i^0 = \max_{\mathbf{x} \in D_x} x_i$.

Сформируем дискретное множество внутренних типономиналов параметров:

$$D_n^{6H} = B_0 \cap D_n,$$

$$D_n^{6H} = \{ \mathbf{x}_n^{6H} : a_i^0 \leq x_i^1 \leq b_i^0, x_i \in \text{nom}_i, i = \overline{1, n} \}.$$

Произведем упорядочивание типономиналов параметров:

$$a_1^0 \leq x_1^1 < x_1^2 < \dots < x_1^{l_1} \leq b_1^0,$$

...

$$a_n^0 \leq x_n^1 < x_n^2 < \dots < x_n^{l_n} \leq b_n^0.$$

Число R элементов множества D_n^{6H} вычисляется по формуле

$$R = \prod_{i=1}^n l_i.$$

В общем случае $R < L$.

В каждой точке $\mathbf{x}_n^{6H}$ дискретного множества D_n^{6H} необходимо найти оценку $P_r(\mathbf{x}_n^{6H})$. Искомый оптимальный вектор номиналов $\mathbf{x}_n^{opt}$ находим, решая задачу:

$$\mathbf{x}_n^{opt} = \max_{\mathbf{x}_n^{6H} \in D_n^{6H}} P_r(\mathbf{x}_n^{6H}). \quad (4)$$

Задача (4) эквивалентна задаче (3) и доставляет решение задачи параметрического синтеза (1) на дискретном множестве типономиналов параметров.

В простейшем случае нахождение решения задачи (4) сводится к полному перебору элементов множества D_n^{6H} , для каждого из которых ищется оценка вероятности $P_r(\mathbf{x}_n^{6H})$. Данный процесс полного дискретного перебора составляет суть метода сканирования, относящегося к регулярным методам поиска.

Оценим общую трудоемкость задачи дискретной оптимизации в случае полного перебора элементов множества D_n^{6H} . Если для получения оценки методом Монте-Карло для каждого элемента множества D_n^{6H} необходимо провести N испытаний, то общее число испытаний схемы составит от RN в случае оптимизации серийнопригодности до RNK при оптимизации параметрической надежности (где K – число критических временных сечений).

Рис. 1 иллюстрирует процедуру построения дискретного множества внутренних значений типономиналов параметров.

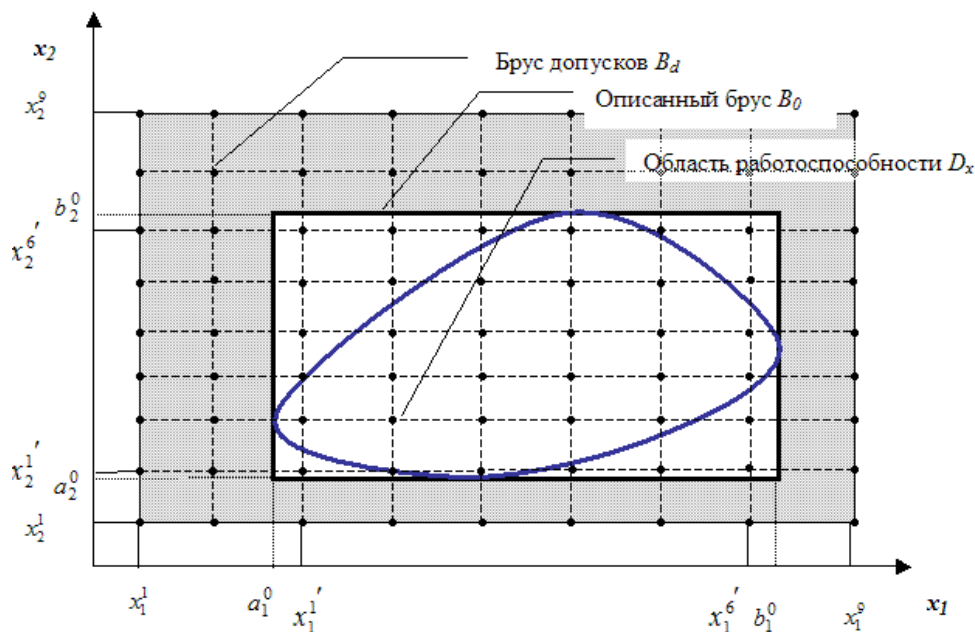


Рис. 1. Построение дискретной области возможных типономиналов параметров.

Учитывая цикличность процедуры вычисления целевой функции, можно применить параллелизм по данным.

На втором этапе параллельной процедуры поиска решения задачи (1) на дискретном множестве возможных значений номиналов параметров множество D_n^{6H} разбивается на непересекающиеся подмножества $D_n^{6H} = \bigcup_{i=1}^k \{D_n^{6H}{}_i\}$, каждому j -му процессору назначается свое подмножество $D_n^{6H}{}_j$ исходных данных. Таким образом, каждый из процессов последовательно находит оптимальный вектор номиналов параметров для своей подобласти, результаты передаются одному из процессов и производится выбор оптимального вектора номиналов по всей области D_n^{6H} .

Данный параллельный подход обладает очень высокими характеристиками производительности, так как обмен между процессорами сводится к однократной заключительной передаче результатов, выполнение испытаний на процессорах не синхронизируется.

При одинаковых размерах подобластей и равных временных затратах на вычисление целевой функции (оптимизация серийнопригодности) ускорение параллельного алгоритма сканирования практически достигает линейного. Наличие внутренних циклов порождает высокую масштабируемость алгоритма, главным условием его эффективной реализации является пропорциональная загрузка всех участвующих в вычислениях процессоров.

Недостатком данного алгоритма является его большая вычислительная трудоемкость. Если число параметров достаточно велико и при этом каждый из них имеет ряд типоминималов не меньше 10 значений, то даже при использовании большого числа процессоров общее время вычислений будет достаточно большим.

Другим существенным недостатком данного параллельного метода является неравномерность загрузки процессоров из-за различной трудоемкости вычисления целевой функции для разных точек. Эта особенность возникает при оптимизации параметрической надежности и использовании метода критических временных сечений.

Для разных подмножеств $D_n^{6H}{}_j$ исходных данных, назначенных разным процессорам, число точек, лежащих внутри области работоспособности, будет различным. Поэтому будет различным и число точек, в которых будет необходимо проверять выполнение условий работоспособности для второго и последующих временных сечений, например, на рис.1 при разбиении множества точек по первому параметру для 6 процессоров, каждому из процессоров достанутся равные подмножества из 6 точек.

Пусть число критических сечений равно 2 (линейный процесс изменения параметров). Тогда первому процессору при фиксированном $x_1 = x_1^{1'}$ необходимо провести около $8N$ сеансов моделирования системы (т.к. только две точки лежат в области работоспособности), а четвертому

при $x_1 = x_1^{4'}$ – около $12N$ сеансов. При этом особо не оговаривается случай, когда сама рабочая точка (вектор номиналов без учета технологических и эксплуатационных возмущений) лежит вне области работоспособности, то есть условия (2) для нее не выполняются. Если исключить из процесса статистического анализа точки, лежащие вне области работоспособности D_x , разбалансировка вычислительного процесса будет еще больше, так как тогда в приведенном выше примере первому процессору придется проводить $5+2N$ сеансов моделирования и проверок условий (2), четвертому – около $10N$ сеансов.

Таким образом, чем больше соотношение объемов описанного бруса и находящейся в нем области работоспособности [5], тем меньше будет простоев компонент вычислительного комплекса.

Заключение

Общая эффективность предложенных параллельных алгоритмов при разбиении пространства поиска экстремума на равные подпространства для каждого из процессоров обратно пропорциональна числу критических временных сечений.

Возможными путями повышения эффективности параллельного алгоритма сканирования могут быть предварительный анализ области работоспособности, разбиение описанного бруса на подобласти с соответствующими весовыми коэффициентами, дополнительная диспетчеризация вычислительного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов О.В.* Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. М.: Наука, 1992.
2. *Брусленко Н.П., Шрейдер Ю.А.* Метод статистических испытаний. М.: Наука, 1961.
3. *Абрамов О.В., Катусева Я.В.* Использование технологии параллельных вычислений в задачах анализа и оптимизации. Проблемы управления. 2003. №4. С. 11-15.
4. *Барский А.Б.* Параллельные технологии решения оптимизационных задач. М.: Машиностроение, 2001.
5. *Абрамов О.В., Диго Г.Б., Диго Н.Б., Катусева Я.В.* Параллельные алгоритмы построения области работоспособности. Информатика и системы управления. 2004. №2(8). С. 121-132.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.В. Абрамовым.