



УДК 684.511

© 2005 г. **Н.П. Семичевская**
(Амурский государственный университет, Благовещенск)

НЕЛИНЕЙНЫЕ РОБАСТНЫЕ АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ СКАЛЯРНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ¹

Рассматривается синтез нелинейных робастных алгоритмов в схемах управления скалярным существенно-нестационарным объектом без измерения его переменных состояния с явно-неявной эталонной моделью.

Введение

Существует ряд физических процессов, в которых будущее зависит от состояния процесса на некотором интервале времени в прошлом. Самое адекватное математическое описание в этом случае дают дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, в частности с запаздыванием по состоянию. Известно, что запаздывание во времени может привести к неустойчивости системы, но и в то же время оно часто может оказывать стабилизирующее влияние на систему автоматического регулирования. Теория систем с запаздыванием постепенно охватила многие вопросы теории автоматического регулирования по причинам теоретического характера, – например, желания расширить класс математических объектов, для которых справедливы уже известные результаты [1, 2]. Но большую роль играют причины практические – в разнообразных областях техники возникла потребность в изучении систем с запаздыванием, в частности ракетостроении, управлении летательными аппаратами, ядерными реакторами и др.

В работе исследуется проблема синтеза робастных алгоритмов управления для строго минимально фазового скалярного объекта (с одним входом и одним выходом) с запаздыванием по состоянию. При построении системы управления используются: во-первых, явно-неявная эталонная модель (ЯНЭМ) с простой структурой апериодического звена 1-го поряд-

¹ Работа выполнена в рамках плана НИР по заданию Федерального агентства по образованию в 2005 г. «Модели и алгоритмы непрерывных и гибридных систем управления априорно неопределенными нелинейно-нестационарными объектами».

ка; во-вторых, фильтр переменных состояния минимального $(n - 1)$ -го порядка, состоящий в частности из последовательного соединения упругих звеньев [3].

Постановка задачи

Пусть строго минимально-фазовый нестационарный объект управления (ОУ) с запаздыванием по состоянию описывается n дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + D(t)x(t-\tau) + B(t)u(t) + f(t), \quad y(t) = C^T x(t),$$

$$x(s) = \psi(s), \quad s \in [0, \tau], \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния, недоступный измерению; $y(t)$ и $u(t)$ – скалярные выход и управляющее воздействие; $\psi(s) \in C_\tau$ – начальная вектор-функция; C_τ – пространство ограниченных непрерывных функций; τ – заданное постоянное запаздывание; $A(t)$, $D(t)$, $B(t)$ – нестационарные матрица состояния, матрица при запаздывающем аргументе и вектор управления соответствующих размеров; C – стационарная неизвестная матрица выхода; $f^T(t) = (0, \dots, 0, f_1(t))$ – вектор постоянно действующего возмущения,

$$\|f_\xi(t)\| \leq f_0 = \text{const}, \quad \xi \in \Xi. \quad (2)$$

Рассмотрим задачу управления существенно нестационарным объектом в предположении, что его функционирование протекает в условиях априорной неопределенности, уровень которой задается предельными значениями из множества Ξ :

$$A = A(\xi); D = D(\xi); B = B(\xi); C = C(\xi); f(t) = f_\xi(t), \quad \xi \in \Xi, \quad (3)$$

где ξ – набор всех неизвестных параметров; Ξ – известное множество возможных значений ξ , границы которого зависят только от физических ограничений, накладываемых на значения параметров объекта управления. Элементы вектора выхода C неизвестны, и поэтому система управления задается в новом базисе пространства состояний и записывается в эквивалентной форме аналогично [3].

Передаточная функция объекта управления имеет вид

$$W_0(s) = \frac{Q(s)}{R(s)},$$

где $Q(s)$ – гурвицев многочлен с положительными коэффициентами, $\deg Q(s) = (n - 1)$, а $\deg R(s) = n$; $s = j\omega$ – комплексная переменная.

Явно-неявная эталонная модель описывается уравнениями

$$\frac{dz_m(t)}{dt} = a_0 z_m(t) + b_0 r(t), \quad y_m(t) = z_m(t), \quad (4)$$

где $z_m(t) \in R$ – переменная состояния (выход) эталона минимальной структурной сложности; $a_0, b_0 = \text{const}$ – желаемые значения параметров эталона. При таком описании ЯНЭМ переменные состояния эталона недоступны,

поэтому можно записать эквивалентную систему, задавая желаемое поведение объекта управления системой уравнений в явном виде:

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = A_m x_m(t) + B_m r(t), \quad y_m(t) = C^T x_m(t). \quad (5)$$

При этом выполнены следующие условия структурного согласования:

$$A(t) = A_m + B_m \beta(t)^T C^T, \quad D(t) = B_m \sigma(t)^T C^T, \quad B(t) = B_m (1 + \alpha(t)), \quad (6)$$

где A_m и B_m – известные матрицы и вектор; $\beta^T(t) = [\beta_1(t), \dots, \beta_m(t)]$, $\sigma^T(t) = [\sigma_1(t), \dots, \sigma_k(t)]$ и $\alpha(t) > 0$ – нестационарные векторы и скалярная функция, элементы которых – неизвестным образом изменяющиеся в известных пределах величины.

Если для уравнений (4) записать передаточную функцию ЯНЭМ, то ее можно представить с учетом (5) как

$$W_m(s) = \frac{b_0}{(s - a_0)} = \frac{b_0}{(s - a_0)} \cdot \frac{C^T (sE - A_m)^+ B_m}{C^T (sE - A_m)^+ B_m} = \frac{C^T (sE - A_m)^+ B_m}{\det(sE - A_m)}. \quad (7)$$

С учетом выполнения условий структурного согласования (6), можно получить математическое описание объекта управления в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A_m x(t) + B_m \mu(t), \\ \mu(t) &= (\beta(t)^T y(t) + \sigma(t)^T y(t - \tau) + (1 + \alpha(t)) u(t) + \tilde{f}(t)), \\ y(t) &= C^T x(t), \quad x(s) = \psi(s), \quad s \in [0, \tau]. \end{aligned} \quad (8)$$

Передаточную функцию объекта управления (8) можно представить в виде $W_0(s) = C^T (sE - A_m)^{-1} B_m$ или $W_0(s) = C^T (sE - A_m)^{-1} B_m$, что соответствует условиям структурного согласования (6).

Если значения элементов вектора выхода C неизвестны, то с помощью изменения базиса пространства состояний, описанного в работе [3], можно сформировать для объекта (1) фильтр его переменных состояния, в частности – задать с передаточной функцией

$$W_\phi(s) = \frac{Q(s)}{Q(s)} = 1. \quad (9)$$

Таким образом, в силу существования тождеств

$$\begin{aligned} W_0(s) &= W_1(s), \\ W_1(s) &= W_0(s) W_\phi(s), \end{aligned} \quad (10)$$

формы математического описания объекта управления с помощью передаточных функций $W_0(s)$ и $W_1(s)$ можно считать эквивалентными.

При этом в векторно-матричной форме записи, объекту с передаточной функцией (10) будет соответствовать система уравнений вида (8) с уравнениями фильтра

$$\begin{aligned} \frac{dx_\phi(t)}{dt} &= Mx_\phi(t) + Ny(t), \quad y_\phi(t) = K^T x_\phi(t) + L y(t), \\ x(t) &\cong x_\phi(t), \quad y(t - \tau) \approx P^T y_\phi(t - \tau), \end{aligned} \quad (11)$$

где матрица M , векторы N , K , P и скаляр L формируются в силу выполнения условия

$$C^T(sE - A_m)^+ B_m = K^T(sE - M)^+ N + L \det(sE - M). \quad (12)$$

Следует отметить, что элементы вектора состояния $x(t)$, которые недоступны измерению, заменены точными оценками $x_\phi(t)$, а выходные переменные объекта управления – выходными переменными фильтра $y_\phi(t)$ и $y_\phi(t-\tau)$, что позволяет обоснованно применять эквивалентные матописания объекта, – например, при решении задач синтеза систем управления в виде следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A_m x(t) + B_m \mu(t), \\ \mu(t) &= (\beta(t)^T y_\phi(t) + \sigma(t)^T y_\phi(t-\tau) + (1 + \alpha(t)) u(t) + \tilde{f}(t)), \\ y_\phi(t) &= K^T x_\phi(t) + Ly(t), \quad x(t) \cong x_\phi(t), \quad y(t-\tau) \approx P^T y_\phi(t-\tau). \end{aligned} \quad (13)$$

Для объекта управления с математическим описанием (1), при действии внешних возмущений, удовлетворяющих условию (2), требуется синтезировать робастный закон управления – в случае, когда желаемое поведение объекта задано явно-неявной эталонной моделью вида (4) таким образом, чтобы в условиях априорной неопределенности (3), при любых начальных значениях $x(0)$, обеспечивалось совпадение траекторий движения объекта управления и ЯНЭМ, а также гарантировалось выполнение целевого условия вида

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_m(t) - x(t)| \leq \delta, \quad \delta = \text{const} > 0, \quad (14)$$

где $x_m(t) \in R$ – переменные состояния ЯНЭМ, построенной с учетом уравнений (5).

Синтез робастного закона управления

Полагая выполненными условия структурного согласования (6) для систем уравнений (1) – (4), осуществим построение явного вида робастного алгоритма управления, опираясь на последовательность стандартных этапов синтеза, предложенного в работах [4 – 7].

Во-первых, обозначим отклонение значений вектора состояний ЯНЭМ и объекта управления как

$$e(t) = x_m(t) - x(t), \quad e(t-\tau) = -x(t-\tau), \quad (15)$$

тогда для совокупности уравнений (1), (4), (8), (11) можно получить следующую эквивалентную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} &= A_m e(t) + B_m \mu^*(t), \quad \nu(t) = C^T e(t) = z_m(t) - y_\phi(t), \quad \nu(t-\tau) = C^T e(t-\tau), \\ \mu^*(t) &= r(t) - (1 + \alpha(t))u(t) - \beta(t)^T C^T x_\phi(t) - \sigma(t)^T y_\phi(t-\tau) - \tilde{f}(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Во-вторых, поскольку передаточная функция линейной стационарной части системы (16) описывается выражением

$$W_{ЛСЧ}(s) = W_m(s) = \frac{b_0}{(s - a_0)} = C^T (sE - A_m)^{-1} B_m, \quad (17)$$

то с учетом, преобразований приведенных в (16), ее можно привести к виду

$$W_{ЛСЧ}(s) = \frac{b_0}{(s - a_0)},$$

из которого следует выполнение частотного неравенства вида

$$\operatorname{Re} W_{ЛСЧ}(j\omega) = \operatorname{Re} \left(\frac{b_0}{(j\omega - a_0)} \right) > 0, \quad \forall \omega > 0 \quad (18)$$

в силу существования условий $b_0 > 0$ и $a_0 < 0$. Таким образом, вещественная характеристика линейной стационарной части системы (16) является строго положительно-определенной.

В-третьих, рассмотрим присоединенную систему, т.е. дополним описание системы (18) интегралом

$$\eta(0, t) = - \int_0^t \mu^*(\nu) \nu(\nu) d\nu \geq -\gamma_0^2 = \text{const}, \quad \forall t > 0. \quad (19)$$

При построении робастных регуляторов на втором этапе определяется явный вид робастного закона управления в ходе доказательства выполнения $\forall t > 0$ модифицированного интегрального неравенства Попова (ИНП) вида [4, 5]:

$$\eta(0, t) = \sum_{i=1}^k \eta_i(0, t) = - \sum_{i=1}^k \int_0^t \mu_{*i}^*(\nu) \nu(\nu) Q_i(\nu) d\nu \geq -\gamma_0^2 = \text{const}, \quad (20)$$

где μ^* – ННЧ в эквивалентной форме записи системы (18); ν – обобщенный выход, формируемый с помощью линейного компенсатора за счет специального выбора значений элементов вектора $C^T \in R^n$; $Q_i(t, \nu(t))$ – положительно-определенные функции, которые умножим на подынтегральные слагаемые без нарушения интегрального неравенства (19).

Запишем каждое интегральное слагаемое $\eta_1(0, t)$, $\eta_2(0, t)$ и $\eta_3(0, t)$:

$$\eta_1(0, t) = - \int_0^t (r(\nu) - \tilde{f}(\nu)) \nu(\nu) |\nu(\nu)| d\nu,$$

$$\eta_2(0, t) = \int_0^t \beta(\nu)^T y_\phi(\nu) \nu(\nu) |\nu(\nu)| d\nu,$$

$$\eta_3(0, t) = \int_0^t \sigma(t)^T y_\phi(\nu - \tau) \nu(\nu) |\nu(\nu)| d\nu,$$

$$\eta_4(0, t) = \int_0^t (1 + \alpha(\nu)) u(\nu) \nu(\nu) d\nu.$$

Получим интегральные оценки для слагаемых $\eta_1(0, t)$, $\eta_2(0, t)$, $\eta_3(0, t)$:

$$\begin{aligned}
\eta_1(0,t) &= - \int_0^t (r(v) - \tilde{f}(v)) v(v) |v(v)| dv \pm \gamma_1 \int_0^t (|r(v)| + \\
&+ f_0^2) (1+\alpha(v)) |v(v)|^2 dv \geq -\gamma_1 \int_0^t (|r(v)| + f_0^2) (1+\alpha(v)) |v(v)|^2 dv, \gamma_1 = const > 0; \\
\eta_2(0,t) &= \int_0^t \beta(v)^T y_\phi(v) v(v) |v(v)| dv \pm \tilde{\gamma}_2 \int_0^t y_\phi^T(v) y_\phi(v) |v(v)|^2 (1+\alpha(v)) dv \geq \\
&\geq -\tilde{\gamma}_2 \int_0^t y_\phi^T(v) y_\phi(v) |v(v)|^2 (1+\alpha(v)) dv, \tilde{\gamma}_2 = const > 0, \tilde{\gamma}_2 = \gamma_2 \sup_t \|\beta(t)\|^2; \\
\eta_3(0,t) &= \int_0^t \sigma(t)^T y_\phi(v-\tau) v(v) |v(v)| dv \pm \tilde{\gamma}_3 \int_0^t y_\phi^T(v-\tau) y_\phi(v-\tau) |v(v)|^2 (1+\alpha(v)) \geq \\
&\geq -\tilde{\gamma}_3 \int_0^t y_\phi^T(v-\tau) y_\phi(v-\tau) |v(v)|^2 (1+\alpha(v)) dv, \\
\tilde{\gamma}_3 &= const > 0, \tilde{\gamma}_3 = \gamma_3 \sup_t \|\sigma(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Запишем интегральное неравенство (20), используя полученные выше оценки:

$$\begin{aligned}
\eta(0,t) &= -\gamma_1 \int_0^t (|r(v)| + f_0^2) |v(v)|^2 (1+\alpha(v)) ds - \\
&- \tilde{\gamma}_2 \int_0^t y_\phi^T(v) y_\phi(v) |v(v)|^2 (1+\alpha(v)) dv - \\
&- \tilde{\gamma}_3 \int_0^t y_\phi^T(v-\tau) y_\phi(v-\tau) |v(v)|^2 (1+\alpha(v)) dv + \\
&+ \int_0^t (1+\alpha(v)) u(v) v(v) dv = \tag{21} \\
&= \int_0^t [-\gamma_1 (|r(v)| + f_0^2) |v(v)| - \tilde{\gamma}_2 y_\phi^T(v) y_\phi(v) |v(v)| - \\
&- \tilde{\gamma}_3 y_\phi^T(v-\tau) y_\phi(v-\tau) |v(v)| + \\
&+ u(v) \operatorname{sgn}(v(v))] (1+\alpha(v)) |v(v)| dv \geq -\gamma_0^{*2}.
\end{aligned}$$

Выражение, которое заключено в квадратные скобки, приравняем к 0, что не противоречит условию (20). Получим явный вид робастного закона управления с модификацией:

$$\begin{aligned}
u(t) &= (\gamma_1 |r(t)| + \gamma_2 f_0^2 + \tilde{\gamma}_3 y_\phi^T(t) y_\phi(t) + \tilde{\gamma}_4 y_\phi^T(t-\tau) y_\phi(t-\tau) + \\
&+ \gamma_5 |F(v(t))|^q) v(t), \tag{22}
\end{aligned}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\gamma}_4 = const > 0, \tilde{\gamma}_3 = \gamma_2 \sup_t \|\beta(t)\|^2, \tilde{\gamma}_4 = \gamma_3 \sup_t \|\sigma(t)\|^2$.

В-четвертых, из предыдущих этапов синтеза, в силу выполнения неравенств (18) и (20), следует, что система (16), (22) является гиперустойчивой (диссипативной) и имеет место предельное соотношение (14), а также будет выполняться предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C^T(x_m(t) - x(t)) \cong \lim_{t \rightarrow \infty} (z_m(t) - y_\phi(t)) \leq \varepsilon, \varepsilon = \text{const} > 0. \quad (23)$$

Поскольку выполнение целевого условия (14) достижимо для системы (16), (22) при любых $\xi \in \Xi$, то согласно критерию гиперустойчивости оно достижимо и для эквивалентной системы (1) – (4), (6).

Пример имитационного моделирования

Приведем числовые значения параметров системы управления (16), (22) в условиях априорной неопределенности вида (3). Пусть в системе при $n = 4$ определены следующие стационарные матрицы, векторы, скалярные функции и величины:

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & -50 & -35 & -10 \end{pmatrix}, \quad B_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta^T(t) = [25+2\sin(2,4t); 39+\text{sign}(\sin(5,6t)); \\ 31+(1,5\sin(7,8t))^3; 11+\phi(\text{sign}(1,5\sin(7,8t)))];$$

$$\sigma^T(t) = [2+2.4\sin(2,4t); -1+\sin(5,6t); 1+1,5\sin(7,8t); 1+1,5\sin(7,8t)];$$

где $\phi(t) = dw(t)/dt+w(t)$

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 \text{ нпу } t \in [-c, c], \\ 0.3\sin(4.5t) - c \text{ нпу } t \in [c, \infty], 0, \\ 0.3\sin(4.5t) + c \text{ нпу } t \in [-\infty, c], \end{cases} \quad (24)$$

$$\sup_t \|\beta(t)\|^2 \leq 60,55; \quad \sup_t \|\sigma(t)\|^2 \leq 14.5; \quad \alpha(t) = 1 + \phi(t);$$

$$\gamma_1 = 100; \quad \gamma_2 = 5; \quad \tilde{\gamma}_3 = 150;$$

$$\tilde{\gamma}_4 = 150; \quad \tilde{\gamma}_3 = \gamma_2 \sup_t \|\beta(t)\|^2,$$

$$\tilde{\gamma}_4 = \gamma_3 \sup_t \|\sigma(t)\|^2, \quad \gamma_5 = 120.$$

Имитационное моделирование системы робастного управления осуществлялось при задающих воздействиях вида:

$$r_1(t) = 4\text{sgn}(\sin(\pi t/2)), \quad r_2(t) = 4(\sin(\pi t/2)), \quad (25)$$

при наличии постоянно действующего возмущения $f(t) = 0,5\cos(0,08\pi t)$; $|f(t)| \leq f_0^2 = 0,5$.

Параметрические изменения в объекте управления – динамические характеристики элементов матрицы состояния $a(t)$ и вектора управления $b(t)$ – приведены на рис. 1.

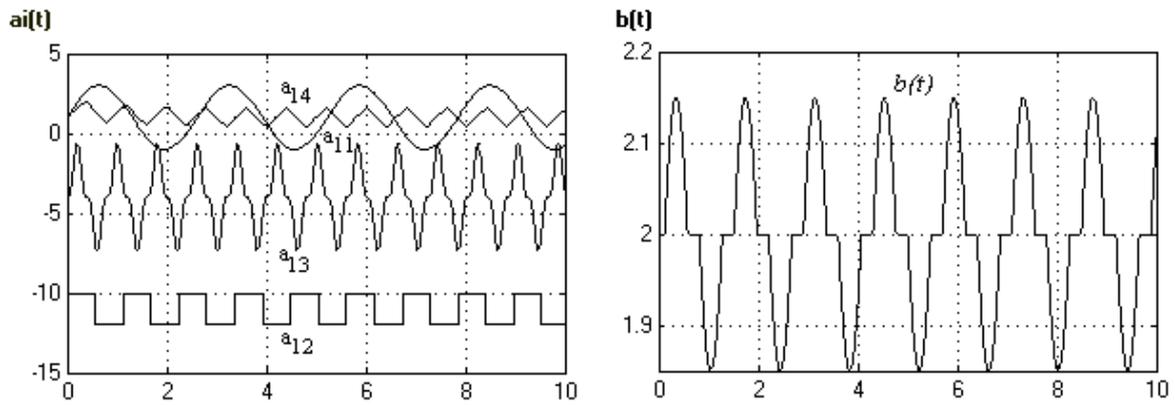


Рис. 1. Параметрические изменения в объекте управления (1).

Результаты моделирования динамических процессов в замкнутой системе управления (1) – (4), (22) при задающем воздействии $r_1(t)$, при наличии постоянно действующего возмущения $f(t) = 0,5\cos(0,08\pi t)$, показаны на рис. 2, где использованы следующие обозначения: управление – $u(t)$; ошибка рассогласования – $v(t)$; выходы объекта управления – $y_0(t)$ и фильтра – $y_\phi(t)$; обобщенные выходы эталона – $z_m(t)$, объекта – $z(t)$ и фильтра – $z_\phi(t)$.

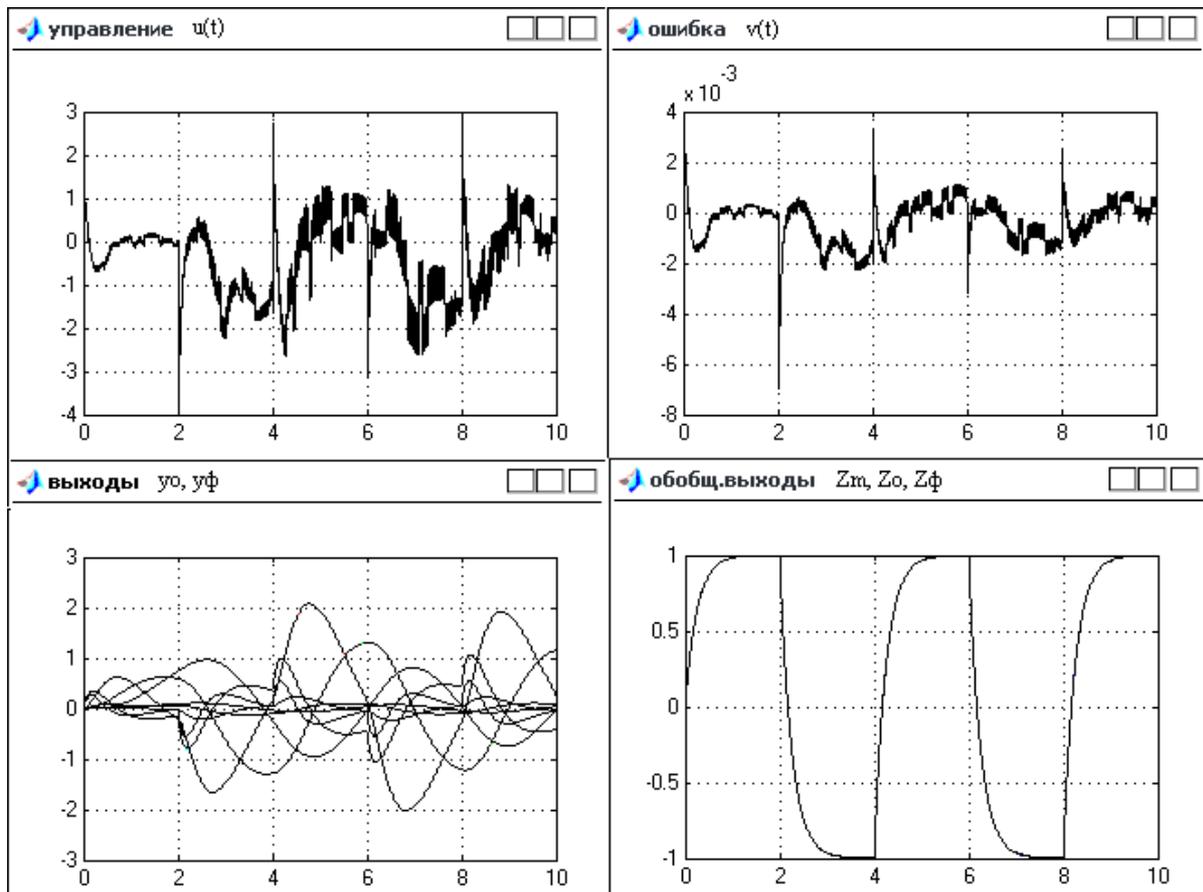


Рис. 2. Динамика процессов в системе управления (1) – (4), (22).

Заключение

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод не только о возможности использовать предложенный способ построения системы робастного управления, но и о достаточно хорошем качестве восстановления выходных переменных существенно нестационарных объектов, у которых переменные пространства состояний недоступны измерению. Предложенный способ построения эквивалентных систем с помощью фильтра переменных состояния объекта управления позволяет расширять пространство состояний и использовать переменные состояния фильтра в робастном законе управления для скалярных минимально-фазовых объектов с различными типами запаздывания по состоянию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием М.: Наука, 1981.
2. Цыпкин Я.З. Синтез робастно-оптимальных систем управления объектами в условиях ограниченной неопределенности // АиТ. 1992. № 9.
3. Еремин Е.Л. Алгоритмы адаптивной системы управления с явно-неявной эталонной моделью для строго минимально-фазового объекта // ИСУ. № 2(8). Благовещенск, 2004. С.157-166.
4. Еремин Е.Л. Робастные алгоритмы нелинейной системы управления нестационарным объектом // Тез. международной конференции «Нелинейные науки на рубеже тысячелетий». СПб., 1999. С.108.
5. Еремин Е.Л. Робастные алгоритмы нестационарных систем управления с явно-неявной эталонной моделью // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления». 2001. №3. <http://www.neva.ru/journal>.
6. Еремин Е.Л., Павлов В.М., Семичевская Н.П. Нелинейные алгоритмы робастных систем управления с эталоном минимальной структурной сложности // Вестник АмГУ. Вып. 17. Благовещенск, 2002. С.23-27.
7. Еремин Е.Л., Семичевская Н.П. Синтез нелинейного робастного управления существенно нестационарным объектом // Вестник АмГУ. Благовещенск, 2003. Вып. 23. С.21-23.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Л. Ереминым