



УДК 519.61

© 2009 г. Д.Е. Кислов, канд. физ.-мат. наук
(Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

ОБ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРОВ ОПЕРАТОРОВ

Следуя общим представлениям об ε -решениях, установлены достаточные условия вложенности ε -спектров точного и возмущенного операторов и сформулировано условие локализации их спектров в заданной области.

Ключевые слова: спектральный портрет, псевдоспектр, собственные значения матрицы.

Введение

Известно, что при погружении линейных задач в вычислительные среды происходит возмущение спектров их операторов. При оценке сохранения свойств решений конкретных задач крайне важно, как происходит это смещение. Достаточно наглядное представление об этом может дать обращение к спектральному портрету, или ε -спектру оператора [1].

Концепция спектрального портрета получила в последнее время широкое распространение при исследовании самых различных научно-технических задач. Из их числа наиболее важная роль отводится проблемам качественного анализа динамических систем, и прежде всего, проблеме исследования устойчивости при наличии возмущений [2]. В целом работы, посвященные тематике ε -спектра, можно разделить на две группы: работы, в которых исследуются вычислительные аспекты их – ε -спектров – построения, и те, в которых построение спектрального портрета проводится для исследования конкретной прикладной проблемы. Настоящая статья примыкает к работам первой группы – в ней устанавливаются условия с достаточностью гарантирующие множественное отношение ε -спектров возмущенного и исходного операторов и делаются выводы о критическом уровне относительного возмущения, сохраняющего заданные свойства оператора в вычислительной среде. На базе полученных условий формулируются конструктивные следствия, позволяющие производить оценку устойчивости динамических систем при наличии возмущений.

Теоретическая часть

Рассмотрим следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть X метрическое пространство, на котором задано отображение $\Psi : X \rightarrow V$. Определим множества $L_\delta(x)$, $L_\varepsilon(x) \subseteq V$: $L_\delta(x) = \{\Psi(z) :$

$\rho(x, z) \leq \alpha\}$ и $L_\beta(x) = \{\Psi(z): \rho(x, z) \leq \beta\}$, $\rho(\cdot, \cdot)$ – метрика в пространстве X . Если $\rho(x, y) \leq \sigma\}$ и $\beta \geq \alpha + \sigma$, то $L_\sigma(x) \subseteq L_\beta(x)$.

Доказательство данного утверждения является простой интерпретацией неравенства треугольника, справедливого для элементов метрических пространств.

Пусть далее $Q_{m \times n}$ пространство матриц заданной размерности с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$ и $F, \tilde{F} \in Q_{m \times n}$, где F – исходная, а $\tilde{F}$ – возмущенная матрицы. Введем следующую модель возмущений, описывающую соотношение операторов F и $\tilde{F}$:

$$\rho(\tilde{F}, F) \leq \gamma \rho(F, 0) \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} \rho(\tilde{F}, 0), 0 \leq \gamma < 1, \quad (1)$$

которую преобразуем к виду:

$$\frac{1}{1+\gamma} \rho(\tilde{F}, 0) \leq \rho(F, 0) \leq \frac{1}{1-\gamma} \rho(\tilde{F}, 0). \quad (2)$$

Примем далее $m = n$ и обозначим через ε и $\tilde{\varepsilon}$ – величины относительных возмущений. Рассмотрим множества $\Lambda_\varepsilon(F)$ и $\Lambda_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{F})$, определяемые неравенствами:

$$\begin{aligned} \Lambda_\varepsilon(F) &= \left\{ \lambda : \rho([\lambda I - F]^{-1}, 0) \geq \frac{1}{\varepsilon \rho(F, 0)} \right\}, \\ \Lambda_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{F}) &= \left\{ \lambda : \rho([\lambda I - \tilde{F}]^{-1}, 0) \geq \frac{1}{\tilde{\varepsilon} \rho(\tilde{F}, 0)} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, с учетом утверждения 1 приходим к следующему.

Утверждение 2. Пусть F и $\tilde{F}$ соответственно точный и возмущенный операторы, удовлетворяющие неравенству (2). Тогда, если

$$\tilde{\varepsilon} \geq \frac{\gamma + \varepsilon}{1 - \gamma}, \quad (4)$$

то $\Lambda_\varepsilon(F) \subseteq \Lambda_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{F})$.

Если положить $\rho(X, Y) = \|X - Y\|$, $X, Y \in Q$, $\|\cdot\|$ – спектральная матричная норма, то соотношения (3) будут определять спектральные портреты (или ε -спектры) $\Lambda_\varepsilon(F)$ и $\Lambda_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{F})$, а неравенство (4) будет являться достаточным условием того, что $\Lambda_\varepsilon(F) \subseteq \Lambda_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{F})$.

Полученное достаточное условие (4) позволяет решать задачи локализации спектральных портретов операторов, известных лишь с некоторой точностью, предопределяемой моделями рассматриваемого здесь типа (2).

Обозначим $\tilde{\varepsilon}_0$ – максимально допустимое значение относительных возмущений оператора $\tilde{F}$, при которых начинается выход его ε -спектра из области Ω .

Если при текущих значениях γ и $\tilde{\varepsilon}_0$ существует положительное значение ε_0 , удовлетворяющее соотношению (4), то это означает вложенность ε_0 -спектра F в $\tilde{\varepsilon}_0$ -спектр возмущенного оператора $\tilde{F}$, что в свою очередь влечет $\Lambda_\varepsilon(F) \subseteq \Omega$. Таким образом, верно следующее.

Следствие 1. Если

$$\gamma < \gamma^* = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{1 + \tilde{\varepsilon}_0}, \quad (5)$$

то $\Lambda_\varepsilon(F) \subseteq \Omega$.

По сути, следствие 1 – это условие допустимого относительного возмущения оператора F , нарушение которого не гарантирует локализации его спектра в заданной области.

Интересно отметить тесную взаимосвязь изложенного с достаточными условиями разрешимости систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Такого рода задача может возникать, например, при анализе наблюдаемости (управляемости) линейных динамических систем, когда требуется установить существование и единственность решения специально сформированной СЛАУ [3].

Не теряя общности, будем считать, что матрица СЛАУ квадратная. Так как единственное решение системы существует тогда и только тогда, когда спектр этой матрицы не содержит нулевых значений, то в качестве области Ω целесообразно принять множество $\mathbb{C} \setminus 0$ (комплексная плоскость, за исключением начала координат). Интерпретация следствия 1 в этом случае примет определенный вид.

Следствие 2. Для невырожденности исходной и возмущенной систем, заданных операторами F и $\tilde{F}$ соответственно, достаточно выполнения $\gamma < \gamma^* = \frac{1}{1 + \mu(\tilde{F})}$, где $\mu(\tilde{F}) < \infty$ – спектральное число обусловленности оператора $\tilde{F}$.

Для обоснования следствия 2 достаточно показать, что $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{F}) = 1/\mu(\tilde{F})$. Действительно, норма минимального возмущения оператора $\tilde{F}$, превращающего его в необратимый, есть $\sigma_{\min}(\tilde{F})$ [4]. При таком возмущении (обозначим его $\Delta\tilde{F}$) $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{F})$ – спектр касается начала координат. Следовательно, $\|\Delta\tilde{F}\| = \tilde{\varepsilon}_0 \|\tilde{F}\| = \sigma_{\min}(\tilde{F})$, или $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{F}) = 1/\mu(\tilde{F})$.

В заключение теоретического изложения рассмотрим более подробно вопрос об исследовании устойчивости стационарной линейной системы, динамика которой определяется оператором F . В рамках модельных представлений (2) имеют место две задачи.

Первая: при известном операторе $\tilde{F}$ сформировать требования на параметр γ , гарантирующие устойчивость невозмущенного оператора F . Вторая: по априорно известному значению γ оценить степень устойчивости невозмущенного оператора F , т.е. найти значение ε_0 . Решение первой задачи с достаточностью раскрывает следствие 1.

Решение второй следует из (4): $\varepsilon_0 = (1 - \gamma)\tilde{\varepsilon}_0 - \gamma$. Величина ε_0 – максимально допустимый порог относительных возмущений F , с достаточностью при $\varepsilon_0 > 0$ не выводящих его спектр из области устойчивости. В качестве области локализации Ω тогда будут выступать множества $\Omega = \{z: \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ (левая комплексная полуплоскость) – в непрерывном случае и $\Omega = \{z: |z| \leq 1\}$ (комплексный круг единичного радиуса) – в дискретном.

Численный пример

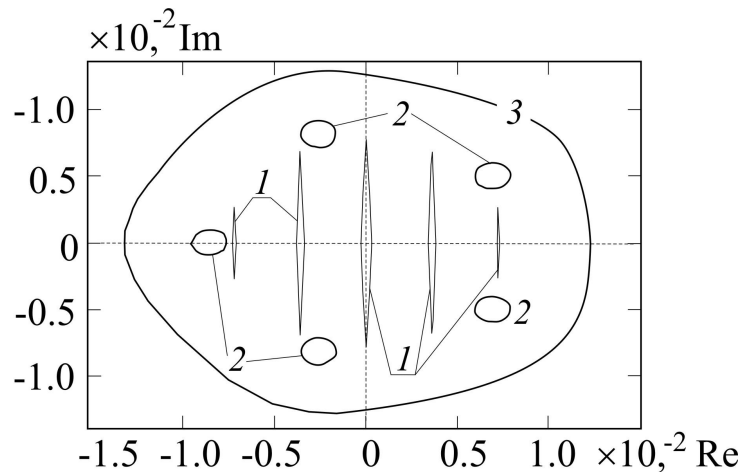
Рассмотрим матрицу C , входящую в пакет тестовых матриц вычислительной среды MatLab [5]:

$$C = \begin{pmatrix} -9 & 11 & -21 & 63 & -252 \\ 70 & -69 & 141 & -421 & 1684 \\ -575 & 575 & -1149 & 3451 & -13801 \\ 3891 & -3891 & 7782 & -23345 & 93365 \\ 1024 & -1024 & 2048 & -6144 & 24572 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица вырождена, и кратность нулевого собственного значения равна 5. Для установления этого недостаточно удвоенной точности представления чисел – $\varepsilon_1 = 2^{-52}$; выполнение функции MatLab "eigs" – вычисление собственных чисел матрицы – приводит к неправильному результату: одному действительному и четырем комплексным характеристическим значениям. Интересно отметить, что неправильные собственные значения – результат выполнения функции "eigs" – подтверждаются построением псевдоспектра данной матрицы в оболочке EigTool [6].

Исследуем поведение спектра матрицы C при ее возмущении. Предположим, что в результате размещения C в памяти ЭВМ каждый ее элемент получил аддитивно возмущение 2^{-52} (возмущенную таким образом матрицу обозначим $\tilde{C}$). Рассмотрим спектральные портреты матриц C и $\tilde{C}$, построенные в вычислительной среде с относительной точностью выполнения операций $\varepsilon_1 = 10^{-64}$, чтобы исключить влияние погрешностей вычислений. Необходимо отметить, что переход к высокой точности вычислений сопряжен со значительными временными затратами на построение спектральных портретов.

Так, для построения представленного рисунка потребовалось около суток расчетного времени (прямым методом построения ε -спектра на регулярной сетке 1000×1000) на PC 2.4GHz.



На рисунке изображены псевдоспектры матриц C и $\tilde{C}$: 1 – e -спектр C при $\varepsilon = 10^{-21}$; 2 – e -спектр $\tilde{C}$ при $\varepsilon = 10^{-21}$; 3 – $\tilde{\varepsilon}$ -спектр $\tilde{C}$ при $\tilde{\varepsilon} = (\gamma + \varepsilon)/(1 - \gamma) \approx 1.19 \cdot 10^{-20}$, $\varepsilon = 10^{-21}$, $\gamma \approx 1.09 \cdot 10^{-20}$. Видно, что e -спектры матриц C и $\tilde{C}$ существенно отличаются друг от друга. Если допустить, что $\tilde{C}$ – потенциально возможный образ C в вычислительной среде, то анализ его e -спектра (кривая 2) укажет на неверный вывод, – подтвердит результат выполнения функции "eigs (C)".

Переходя к концепции гарантированных расчетов и учитывая, что относительная погрешность модельного возмущения матрицы C известна (если каждый элемент C получил возмущение 2^{-52} , то она может быть оценена), построим согласно (5) спектральный портрет $\tilde{C}$, с достаточностью содержащий e -спектр матрицы C (при заданных значениях e , ε). На рисунке он представлен кривой 3. Таким образом, гарантирующие заключения относительно спектра оператора C возможны только на основе анализа $\tilde{\varepsilon}$ -спектра его модельного приближения $\tilde{C}$. Отождествление e -спектра матрицы $\tilde{C}$ с e -спектром матрицы C может приводить к принципиально неправильным результатам. Представленный пример показывает, насколько важно учитывать погрешности погружения оператора в среду вычислений при построении его спектрального портрета. Даже в случае задачи невысокой размерности пренебрежение малыми возмущениями может приводить к существенному искажению получаемых выводов.

Заключение

Основным результатом работы является достаточное условие вложенности спектральных портретов операторов, которое позволяет решать задачи гарантированной локализации их спектров в заданной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С.К., Кирилук О.П., Костин В.И. Спектральные портреты матриц. – Новосибирск, 1990. Препр. – № 3. Сиб. отделение Института математики.
2. Годунов С.К. Лекции по современным аспектам линейной алгебры. – Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002.
3. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971.
4. Малышев А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру. – Новосибирск: Наука, 1991.
5. Higham N.J. The test matrix toolbox for MatLab (version 3.0) // Numerical Analysis Report, 1995. – № 276.
6. Wright T.G. EigTool: a graphical tool for nonsymmetric eigenproblems // <http://web.comlab.ox.ac.uk/projects/pseudospectra/eigtool/>

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ю.Н. Кульчиным.

E-mail:

Кислов Д.Е. – kisl_di@mail.ru