ВЕСТНИК ТОГУ. 2007. № 4 (7)

УДК 517.95

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ЛЕММЕ ХОПФА

Илларионов А. А. — канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Прикладная математика и информатика» ТОГУ, ст. науч. сотр. ХО ИПМ ДВО РАН

Рассматривается лемма Хопфа (неравенство Лере), которая применяется при доказательстве существования решения задачи о протекании вязкой несжимаемой жидкости через ограниченную область. Исследуется вопрос о возможности обобщения ослабленного варианта леммы на случай ненулевых потоков жидкости через компоненты связности границы области.

Hopf's lemma (Leroy's inequality) which is applied to prove the existence of solving a boundary value problem for viscous incompressible Navier-Strokes equations in bounded domain is considered. The possibility of generalization of the loosened variant of a lemma in case of liquid nonzero streams through ingredients of bounded domain is investigated..

1. Введение

Пусть Ω — ограниченная область из R^d $(d = 2,3)$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из связных компонент $\Gamma_1,\dots,\Gamma_s$ (Γ_s – внешняя компонента связности); $n = n(x)$ – единичный вектор внешней нормали к Γ. Рассмотрим стационарную краевую задачу для уравнений Навье-Стокса относительно неизвестных функций u и p:

$$-\nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f, \qquad \operatorname{div} u = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$u = g \qquad \text{на } \Gamma, \tag{2}$$

где $\nu > 0$ – коэффициент вязкости, $u = u(x)$ – вектор скорости, $p = p(x)$ – давление жидкости, $f = f(x)$ – плотность внешних сил. Из уравнения $\operatorname{div} u = 0$ вытекает необходимое условие разрешимости задачи:

$$\int_\Gamma g\cdot n\, ds = 0. \tag{3}$$

Существование решения задачи (1), (2) впервые было доказано Лере [1] в предположении, что потоки жидкости через компоненты Γ_i равны нулю, т. е. при условиях:

$$\int_{\Gamma_i} g_n \, ds = 0 \qquad i = \overline{1, s}. \tag{4}$$

Несмотря на многочисленные попытки решения, открытым остается следующий вопрос: существует ли решение u, p задачи (1), (2), если функция g удовлетворяет только необходимому условию (3)?

Первый результат, связанный с этой проблемой, был получен C. Amick [3], который доказал разрешимость задачи (1), (2) в случае $d = 2$, область Ω симметричная относительно оси OX_2, функции $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ обладают следующей симметрией: f_1, g_1 – нечетные, f_2, g_2 – четные по x_1. Такое же утверждение (но другим способом) было позднее доказано Л. И. Сазоновым [4] и H. Fujita [5], также [6]. В [7] была доказана разрешимость задачи (1), (2) в случае, когда функция g лежит в некоторой окрестности градиента гармонической функции. Некоторые новые результаты, связанные с этой проблемой, были анонсированы в тезисах [8].

Введем обозначения: $W_q^m(Q)$ – пространство Соболева функций, заданных на множестве Q, $H^m(Q) = W_2^m(Q)$, $C_0^\infty(\Omega)$ – множество всех бесконечно дифференцируемых, имеющих финитные носители в Ω, функций

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \operatorname{div} v = 0 \quad в\ \Omega, \quad v|_\Gamma = 0\},$$

$$\mathcal{V}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) \cap V(\Omega).$$

Классическое доказательство [2, 10] существования решения u, p задачи (1), (2), в случае выполнения условий (4), основано на следующем результате.

Лемма 1. *Пусть* $\Gamma \in C^{0,1}$, *функция* $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ *удовлетворяет условиям (4). Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $G_\epsilon \in H^1(\Omega)$ *такая, что*

$$\operatorname{div} G_\varepsilon = 0 \quad в \quad \Omega, \quad G_\varepsilon|_\Gamma = g,$$
$$\left|\int_\Omega (v \cdot \nabla) G_\varepsilon \cdot v dx\right| \le \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V(\Omega). \tag{5}$$

Лемму 1 часто называют леммой Хопфа (в [6, 9] – неравенство Лере). Ее доказательство основано на представлении g в виде: $g = \operatorname{rot} F$.

Рассмотрим теперь произвольную функцию g. В [9] доказано, что если Ω – кольцо либо шаровой слой, $g \in C^\infty(\Gamma)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $G_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая условиям (5), то

$$\int_{\Gamma_i} g \cdot n \, ds = 0 \qquad i = \overline{1,s}.$$

Из этого результата вытекает, что условия (4) необходимы для справедливости утверждения леммы 1 в указанных выше областях.

Как отмечено в [2], можно доказать разрешимость задачи (1), (2), используя следующее, более слабое, чем лемма 1, утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\Gamma \in C^{0,1}$, *функция* $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ *удовлетворяет условиям (4). Тогда для любых* $\varepsilon > 0$, $v \in V(\Omega)$ *существует функция* $G_\epsilon \in H^1(\Omega)$ *(зависящая от* v*) такая, что*

$$\operatorname{div} G_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad G_\varepsilon|_\Gamma = g, \qquad \left|\int_\Omega (v \cdot \nabla) G_\varepsilon \cdot v dx\right| \le \varepsilon. \tag{6}$$

Возникает естественный вопрос. Пусть функция $g \in C^\infty(\Gamma)$ удовлетворяет только условию (3). Можно ли для любых $\varepsilon > 0$, $v \in V(\Omega)$ указать функцию $G_\epsilon \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую (6)? Нетрудно заметить (используя лемму 2), что эта проблема эквивалентна следующей: пусть

$$a_i \in \mathrm{R}\,(i = \overline{1,s}), \quad \textstyle\sum_{i=1}^s a_i = 0, \varepsilon > 0, \quad v \in V.$$

Существует ли функция $G_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{gathered} \operatorname{div} G_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \int_{\Gamma_i} G_\varepsilon \cdot n \, ds = a_i \qquad i = \overline{1,s}, \\ \left|\int_\Omega (v \cdot \nabla) G_\varepsilon \cdot v\right| \le \varepsilon. \end{gathered} \tag{7}$$

Если бы такая функция существовала (для любого $\varepsilon > 0$), то разрешимость задачи (1), (2) являлась бы следствием результатов [2]. Однако, как доказывается ниже, это выполняется только в случае нулевых потоков, т. е. при $a_i = 0$.

2. Формулировка результатов

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma \in C^{0,1}$, $a_i \in \mathrm{R}$ $(i=\overline{1,s})$; *для некоторой компоненты связности* $\Gamma_k\,(k<s)$ *выполняется условие:*

(*) *существует круг* B *(шар при* $d=3$*) такой, что*

$$\partial B \subset \Omega, \quad \Gamma_k \subset B, \quad \Gamma_i \cap B = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Тогда, если для любых $\varepsilon > 0$, $v \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ *существует функция* $G_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, *удовлетворяющая ((7), то* $a_k = 0$.

Из теоремы 1 очевидным образом вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть* $\Gamma \in C^{0,1}$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, *все компоненты* Γ_k *за исключением внешней* Γ_s *удовлетворяют условию (*) теоремы 1. Тогда для справедливости утверждения леммы 2 необходимо выполнение равенств (4).*

Рассмотрим теперь следующий вопрос: какими свойствами должно обладать подмножество $\mathrm{M} \subset V(\Omega)$, чтобы для любых $\varepsilon > 0$, $v \in \mathrm{M}$ существовала функция G_ε, удовлетворяющая (7)?

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma \in C^{0,1}$, $\mathrm{M}-$ *множество из* $V(\Omega)$, $a_i \in \mathrm{R}$ $(i=\overline{1,s})$, $\sum_{i=1}^{s} a_i = 0$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(а) для любых $\varepsilon > 0$, $v \in \mathrm{M}$ *существует функция* $G_s \in H^1(\Omega)$, *удовлетворяющая (7);*

(б) любое решение $v \in \mathrm{M}$, $q \in W^1_{3/2}(\Omega)$, $\mu_i \in \mathrm{R}$ $(i=\overline{1,s})$ *задачи*

$$\begin{aligned} &(v\cdot\nabla)v = \nabla q, \quad \operatorname{div} v = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ &v|_\Gamma = 0, \quad q|_{\Gamma_i} = \mu_i \quad i=\overline{1,s}. \end{aligned} \tag{8}$$

удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{s} a_i s_i = 0. \tag{9}$$

Таким образом, если мы хотим применить *классический* подход для доказательства разрешимости задачи (1), (2), то нужно искать решение задачи среди функций, представимых в виде $u = v + G$, где G – соленоидальное продолжение g в Ω, $v \in \mathrm{M}$, множество $\mathrm{M} \subset V(\Omega)$ удовлетворяет условию (б) теоремы 2 с $a_i = \int_{\Gamma_i} g \cdot n \, ds$. Пока это удалось сделать только для плоских течений, симметричных относительно некоторой прямой [3].

3. Доказательство теорем

Для краткости будем говорить, что область Ω и числа $a_i \in \mathrm{R}$ $(i = \overline{1, s})$ удовлетворяют условию (L), если для любых $\varepsilon > 0$, $v \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ существует функция $G_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая (7).

Лемма 3. *Если область* Ω *и числа* $a_i \in \mathrm{R}$ $(i = \overline{1, s})$ *удовлетворяют условию* (L), *то для любого решения* $v = \boldsymbol{V}(\Omega)$, $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\mu_i \in \mathrm{R}$ *задачи (8) выполняется (9).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v \in \boldsymbol{V}(\Omega)$, $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\mu_i \in \mathrm{R}$ – любое решение задачи (8), $\varepsilon > 0$, функция G_ε удовлетворяет (7). Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\varepsilon \geq \left| \int_\Omega (v \cdot \nabla) G_\varepsilon \cdot v \, dx \right| = \left| \int_\Omega (v \cdot \nabla) v \cdot G_\varepsilon dx \right| =$$
$$= \left| \int_\Omega \nabla q \cdot G_\varepsilon dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{s} \int_{\Gamma_i} q \, (G_\varepsilon \cdot n) \, dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{s} \mu_i a_i \right|.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем (9). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* Ω *– кольцо либо шаровой слой. Тогда для любых чисел* $\mu_1, \mu_2 \in \mathrm{R}$, $\mu_1 > \mu_2$ *существуют функции* $v \in \boldsymbol{V}(\Omega)$, $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *удовлетворяющие (8).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности считаем, что

$$\Omega = \left\{ x \in \mathrm{R}^d : R_1 < |x| < R_2 \right\}, \quad \Gamma_i = \left\{ x \in \mathrm{R}^d : |x| = R_i \right\} \qquad i = 1, 2.$$

Пусть $h = h(t)$ — любая функция, удовлетворяющая условиям:

$$h \in C^\infty[R_1, R_2], \quad h'(t) \leq 0 \quad \forall t \in (R_1, R_2),$$

$$h = \mu_i \text{ в некоторой окрестности точки } t = R_i \quad i = 1, 2.$$

Тогда искомое решение в полярных координатах (ρ, ϕ) (сферических (ρ, ϕ, θ)) имеет вид

$$q = h(\rho), \qquad v_\rho \equiv 0, \qquad v_\phi = \sqrt{-\rho \cdot h'(\rho)}, \qquad v_\theta \equiv 0.$$

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Из условия (*) вытекает, что существует кольцо K (шаровой слой при $d = 3$) такой, что

$$K = \left\{ x \in \mathrm{R}^d : R_1 < \left| x - x_0 \right| < R_2 \right\}, \quad \overline{K} \subset \Omega,$$
$$\Gamma_k \subset B_1 \equiv \left\{ x \in \mathrm{R}^d : \left| x - x_0 \right| < R_1 \right\}, \quad \Gamma_i \cap B_1 = 0 \quad \forall i \neq k.$$

По лемме 4 существуют функции $v \in \mathcal{V}(K)$, $q \in C^\infty(\overline{K})$, удовлетворяющие уравнениям:

$$\left(v \cdot \nabla \right) v = \nabla q, \qquad \operatorname{div} v = 0 \quad \text{в} \quad K,$$
$$q(\mathrm{x}) = 1 \quad \text{при} \quad |x| = R_1, \qquad q(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| = R_2.$$

Нетрудно заметить, что функции

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{при} \quad x \in K, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin K \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при} \quad x \in K, \\ 1 & \text{при} \quad |x| \leq R_1, \\ 0 & \text{при} \quad |x| \geq R_2 \end{cases}$$

принадлежат пространствам $\mathcal{V}(\Omega)$ и $C^\infty(\overline{\Omega})$ соответственно, а также удовлетворяют уравнениям (8), в которых $\mu_k = 1$ *и* $\mu_i = 0$ при всех $i \neq k$. Следовательно, если $a_k \neq 0$, то по лемме 3 условие (L) не может выполняться. Теорема 1 полностью доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Доказательство (а)$\Rightarrow$(б) повторяет рассуждения леммы 3. Докажем обратное. Пусть выполняется условие (б). Возьмем любую $v \in M$. Так как $\sum_{i=1}^{s} a_i = 0$, то существует функция G, удовлетворяющая условиям

$$G \in H^1(\Omega), \qquad \operatorname{div} G = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \int_{\Gamma_i} G \cdot n\, ds = a_i \quad i = \overline{1, s}.$$

Возможны два случая.
1. Если

$$\int_{\Omega}(v\cdot\nabla)y\cdot v\,dx=0 \qquad \forall y\in V(\Omega),$$

то нетрудно проверить (подробное доказательство см. в [3]), что существуют функция $q\in W^1_{3/2}(\Omega)$ и числа $\mu_i\in \mathrm{R}$, удовлетворяющие уравнениям (8) и, следовательно,

$$\left|\int_{\Omega}(v\cdot\nabla)G\cdot v\,dx\right|=\left|\int_{\Omega}(v\cdot\nabla)v\cdot G\,dx\right|=\left|\int_{\Omega}\nabla q\cdot G\,dx\right|=\left|\sum_{i=1}^{s}a_i\mu_i\right|=0.$$

Условие (a) выполнено с $G_\varepsilon=G$ для любого $\varepsilon>0$.

2. Пусть существует функция $y_0\in V(\Omega)$, для которой

$$\lambda\equiv\int_{\Omega}(v\cdot\nabla)v\cdot y_0\,dx\neq 0.$$

Тогда функция

$$G_0=G-\frac{y_o}{\lambda}\int_{\Omega}(v\cdot\nabla)v\cdot G\,dx$$

удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div}G_0=0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad G_0|_\Gamma=G,$$

$$\int_{\Omega}(v\cdot\nabla)G_0\cdot v\,dx=-\int_{\Omega}(v\cdot\nabla)v\cdot G_0\,dx=0.$$

Условие (a) выполнено с $G_\varepsilon=G_0$ для любого $\varepsilon>0$. Теорема 2 полностью доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-9004.2006.1)

Библиографические ссылки

1. *Leray J.* Etude de diverses equations, integrals non lineaire et de problems que posent l'Hydrodynamique // J. Math. Pures Appl. 1933. V. 35. № 12.

2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.

3. *Amick C. J.* Existence of solutions to the nonhomogeneous steady Navier-Stokes equations // Indiana Univ. Math. J. 1984. V. 33. № 6.

4. *Сазонов Л. И.* О существовании стационарного симметричного решения двумерной задачи о протекании жидкости // Матем. заметки. 1993. Т. 54. Вып. 6.

5. *Fujita H.* On the stationary solutions to Navier-Stokes equations in symmetric plane domains under general outflow conditions // Proceeding of International Conference on Navier-Stokes equations, Theory and Numerical methods, 1997, Varenna,Italy. Pitman Research Notes in Math. 388.

6. *Morimoto H.* A remark on the existence of 2-D steady Navier-Stokes flow in bounded symmetric domain under general outflow conditions // J. Math. Fluid. Mech. 9 (2007).

7. *Fujita H., Morimoto H.* A remark on the existence of steady Navier-Stokes flow with non-vanishing outflow conditions // Gakuto International Series in Math. Science and Appl. Nonlinear Waves, 10 (1997).

8. *Пухначев В. В.* Viscous flows in multiply connected domains. In book of abstracts, International Conference «Nonlinear partial differential equations», Yalta, Ukraine, 2007.

9. *Takeshita A.* A remark on Leray's inequality // Pacific J. Math. 1993. V. 157, № 1.

10. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981.