ВЕСТНИК ТОГУ. 2007. № 4 (7)

УДК 519.866:330.14 (06)

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ МНОГОМЕРНОЙ МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ И РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ЕЕ РЕШЕНИЯ

Кетова К. В. – канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Математическое моделирование процессов и технологий»; *Сабирова О. Р.* – асп. кафедры «Математическое моделирование процессов и технологий» (ИжГТУ)

Рассматривается нелинейная оптимизационная макромодель экономической динамики в непрерывном времени с заданным конечным горизонтом планирования в многомерном фазовом пространстве. Рассматривается обобщенная постановка задачи для наиболее важного в математической экономике класса выпуклых задач. Разработан алгоритм построения оптимального управления для произвольного конечного числа управляющих переменных и определены математические характеристики нахождения экономической системы на том или ином этапе оптимальной траектории.

An optimizing not-linear macromodel of economic dynamics is regarded in continuous time, final horizon of planning being given, in a multidimensional phase space. Generalized problem statement is regarded for the most important in mathematical economics class of convex problems. The algorithm of constructing optimal control is developed for any final number of control variables, and mathematical characteristics of economic system location are defined for one or another stage of the optimal trajectory.

В статье рассматривается n-мерная квазистационарная макромодель экономической динамики в непрерывном времени с конечным горизонтом планирования, которая является развитием макромодели, известной как модель Рамсея-Касса-Купманса (РКК-модель) [1-3]. Работы, посвященные одномерным моделям [4-10], полезны в методологическом отношении, поскольку здесь полностью удается провести анализ решения в аналитической форме. В последнее время также уделяется внимание аналитическому анализу двумерных моделей [11].

Развитие математического аппарата для решения n-мерных задач дает возможность рассматривать более широкий спектр прикладных проблем.

Особенностью предлагаемой модели является то, что объем выпуска определяется n-факторной производственной функцией $F(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n)$ – вектор факторов производства (фазовых переменных).

Отметим, что в данной модели различаются трудовые ресурсы $L(t) > 0$, задействованные в создании ВРП, и все население региона $L^o(t) > L(t)$, на которое распространяется потребление в экономической системе [12]. Причем, поскольку $0 < L(t) < L^o(t)$, то доля трудоспособного населения в общей численности $\lambda(t) = L(t)/L^o(t) \in (0,1)$. Прогнозные значения функций $L(t)$, $L^0(t)$ задаются экзогенно.

Принимаются следующие допущения.

Д1. Производственная функция $F(\boldsymbol{x})$ определена в пространстве $X = R_+^n$ и подчинена условиям:

а) $F(\boldsymbol{0}) = 0$;

б) $F(\boldsymbol{x})$ монотонно возрастает по каждой переменной;

в) $F(\boldsymbol{x})$ выпукла вверх на X.

Д2. Произведенный продукт распределяется на $(n+1)$ часть: потребление и инвестиции в развитие n факторов производства, согласно вектору управления $\boldsymbol{s} = (s_1,\ldots,s_n) \ge \boldsymbol{\beta} = (\beta_1,...,\beta_n) \ge 0$, где s_i – норма инвестиций в i – й фактор производства; вектор $\boldsymbol{\beta}$ – нижняя граница вектора $\boldsymbol{s}$, а также потребление в соответствии с нормой потребления $s_0 = 1 - \sum_{k=1}^{n} s_k \ge \beta_0 > 0$, где β_0 – норма потребления, обеспечивающая заданный гарантированный уровень потребления на одного человека ($0 < \sum_{k=0}^{n} \beta_k < 1$). Множество допустимых управлений имеет вид:

$$\Omega_n = \left\{ \boldsymbol{s} = (s_1,...,s_n):\ s_i \in \left[\beta_i ; 1 - \sum_{k=0,k\neq i}^{n} \beta_k \right],\ 0 \le \sum_{k=1}^{n} \beta_k \le \sum_{k=1}^{n} s_k < 1 \right\}. \quad (1)$$

Д3. Уровень удельной эффективности инвестиций в i-й фактор производства характеризуется показателем $\alpha_i(t) > 0$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Д4. Выбытие факторов производства происходит согласно вектору коэффициентов амортизации $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$.

1. Постановка задачи

Поставим задачу оптимального управления как задачу выбора такого допустимого управления и отвечающей ему траектории движения экономической системы, которые обеспечивают максимум критериального функционала.

В качестве критерия максимизации выберем удельное (в расчете на одного жителя) благосостояние населения на всем рассматриваемом горизонте планирования. Приоритет потребления в настоящий момент времени по сравнению с будущим будем учитывать с помощью множителя дисконтирования $e^{-\delta t}$. Тогда накопленное за T лет среднедушевое потребление (без учета минимального уровня) определим как интеграл вида $\int_0^T \left(1 - \beta_0 - \sum_{k=1}^{n} s_k\right) f(\boldsymbol{x}) \lambda e^{-\delta t} dt$, где $f(\boldsymbol{x}) = \frac{F(\boldsymbol{x})}{L}$. Отметим, что если $L(t) > 0$ – непрерывная функция, то $f(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет условиям а–в допущения **Д1**.

Задача оптимального управления формулируется в виде:

$$W = \max_{\boldsymbol{s} \in \Omega_n} \int_0^T \left[1 - \beta_0 - \sum_{k=1}^{n} s_k\right] f(\boldsymbol{x}) \lambda e^{-\delta t} dt, \qquad (2)$$

где траектория в пространстве факторов определяется фазовыми уравнениями:

$$\dot{x}_i = \alpha_i s_i f(\boldsymbol{x}) - \gamma_i x_i; \ i = 1, ..., n; \quad t \in [0, T], \qquad (3)$$

с краевыми условиями:

$$x_i(0) = x_{i0}; \quad x_i(T) = x_i^*(T); \ i = 1, ..., n. \qquad (4)$$

Левое краевое условие (4) является заданным, правое условие – это состояние в момент T на квазистационарной фазовой траектории (особой траектории, которая будет определена ниже в п. 3).

Информационный паспорт модели (2) – (4) (исходная информация) имеет вид $\{f, \beta_0, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda, \delta\}$; конкретный расчет требует, кроме того, задания горизонта планирования T и граничных условий (4).

2. Построение оптимального управления

Введем следующие определения.

Фазовой траекторией назовем график функции времени $(t, x_1(t),..., x_n(t))$, $t \geq 0$, который представляет собой линию в $(n+1)$-мерном пространстве R_+^{n+1}.

Орбитой фазовой траектории будем называть соответствующую ей параметрическую (с параметром t) кривую $(x_1(t),..., x_n(t))$, $t \geq 0$ в фазовом пространстве R_+^n.

Пару $(\boldsymbol{s}_t, \boldsymbol{x}_t)$ назовем *программой* развития системы (далее – программа).

Для построения оптимальной стратегии воспользуемся принципом максимума Понтрягина [13]. Гамильтониан задачи (2)-(4) имеет вид:

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\psi}, t) = \left[1 - \beta_0 - \sum_{k=1}^{n} s_k\right] f(\boldsymbol{x}) \lambda e^{-\delta t} + \sum_{k=1}^{n} \psi_k [\alpha_k s_k f(\boldsymbol{x}) - \gamma_k x_k]. \quad (5)$$

Для выпуклых задач условия оптимальности в форме принципа максимума являются не только необходимыми, но и достаточными [5]. Докажем, что задача (2)-(4) выпуклая, т. е. гамильтониан (5) есть выпуклая на $X \times \Omega_n$ функция.

Для дальнейшего анализа нам потребуются две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Множество фазовых переменных X есть выпуклое множество.

Доказательство

Докажем выпуклость множества X непосредственной проверкой.

Выберем два произвольных элемента $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X = R_+^n$ ($\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ – n-мерные неотрицательные векторы) и промежуточный элемент $\boldsymbol{x}_3 = \xi \boldsymbol{x}_1 + (1-\xi)\boldsymbol{x}_2$, где $\xi \in [0,1]$ – константа. Очевидно, что $\boldsymbol{x}_3 \in X$. Тогда, согласно определению, множество X выпукло. ■

Лемма 2. Множество допустимых управлений Ω_n вида (1) есть выпуклое множество.

Доказательство

Согласно (1), два произвольно выбранных вектора $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \in \Omega_n$ могут быть представлены в виде

$$\boldsymbol{s}_1 = (s_{11},...,s_{1n}):\ s_{1i} \in \left[\beta_i; 1 - \sum_{k=0,k\neq i}^{n} \beta_k\right],\ 0 \le \sum_{k=1}^{n} \beta_k \le \sum_{k=1}^{n} s_{1k} < 1;$$

$$\boldsymbol{s}_2 = (s_{21},...,s_{2n}):\ s_{2i} \in \left[\beta_i; 1 - \sum_{k=0,k\neq i}^{n} \beta_k\right],\ 0 \le \sum_{k=1}^{n} \beta_k \le \sum_{k=1}^{n} s_{2k} < 1.$$

Выберем постоянную $\xi \in [0,1]$, тогда промежуточный вектор $\boldsymbol{s}_3 = \xi \boldsymbol{s}_1 + (1-\xi)\boldsymbol{s}_2$ такой, что $\boldsymbol{s}_3 = (s_{31},...,s_{3n})$, $s_{3i} = \xi s_{1i} + (1-\xi)s_{2i}$.

Определим границы элементов вектора $\boldsymbol{s}_3$:

$$s_{3i} \in \left[\xi\beta_i + (1-\xi)\beta_i; \xi\left(1 - \sum_{k=0,k\neq i}^{n} \beta_k\right) + (1-\xi)\left(1 - \sum_{k=0,k\neq i}^{n} \beta_k\right)\right],$$

после преобразований выражения для границ элементов вектора $\boldsymbol{s}_3$ примут вид:

$$s_{3i} \in \left[\beta_i; 1 - \sum_{k=0,k\neq i}^{n} \beta_k\right],$$

откуда следует, что $0 \le \sum_{k=1}^{n} \beta_k \le \sum_{k=1}^{n} s_{3k} \le 1 - \beta_0 < 1$.

Таким образом, доказано, что $\boldsymbol{s}_3 \in \Omega_n$, поскольку справедливы выражения:

$$\boldsymbol{s}_3 = (s_{31},...,s_{3n}):\ s_{3i} \in \left[\beta_i; 1 - \sum_{k=0,k\neq i}^{n} \beta_k\right],\ 0 \le \sum_{k=1}^{n} \beta_k \le \sum_{k=1}^{n} s_{3k} < 1$$

и, согласно определению, множество Ω_n выпукло. ■

Полученные результаты позволяют сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть множество фазовых переменных X и множество допустимых управлений Ω_n выпуклы. Тогда гамильтониан $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\psi}, t)$ задачи (2)-(4) есть выпуклая на $X \times \Omega_n$ функция при каждом $t \in [0,T]$ (аргументы $\boldsymbol{\psi}, t$ фиксированы).

Доказательство

Для доказательства выпуклости функции $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\psi},t)$ выберем две произвольные программы $(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{x}_1),(\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{x}_2)\in X\times\Omega_n$ и промежуточную программу $(\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{x}_3)$: $\boldsymbol{s}_3=\xi\boldsymbol{s}_1+(1-\xi)\boldsymbol{s}_2$, $\boldsymbol{x}_3=\xi\boldsymbol{x}_1+(1-\xi)\boldsymbol{x}_2$, где $\xi\in[0,1]$ – константа. Надо показать, что

$$\xi H(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{\psi},t)+(1-\xi)H(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{\psi},t)\ge H(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{\psi},t).$$

Учитывая вид гамильтониана (5) и сделав необходимые преобразования, запишем приведенное неравенство в виде:

$$\begin{aligned}&\xi H(x_1,s_1,\psi,t)+(1-\xi)H(x_2,s_2,\psi,t)-H(x_3,s_3,\psi,t)=\\&\quad=\lambda e^{-\delta t}\Big[(1-\beta_0)(\xi f(x_1)+(1-\xi)f(x_2)-f(x_3))+\\&+\xi(f(x_3)-f(x_1))\sum_{k=1}^{n}s_{1k}+(1-\xi)(f(x_3)-f(x_2))\sum_{k=1}^{n}s_{2k}\Big]+\\&+\sum_{k=1}^{n}\psi_k\alpha_k\left[\xi s_{1k}f(x_1)+(1-\xi)s_{2k}f(x_2)-(\xi s_{1k}+(1-\xi)s_{2k})f(x_3)\right].\end{aligned}$$

Воспользуемся неравенствами $\beta_k\le s_k$, $k=1,\ldots,n$, (это следует из определения множества Ω_n) и преобразуем полученное выражение. Тогда

$$\begin{aligned}&\xi H(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{\psi},t)+(1-\xi)H(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{\psi},t)-H(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{\psi},t)\ge\\&\ge(\xi f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\xi)f(\boldsymbol{x}_2)-f(\boldsymbol{x}_3))\left[\lambda e^{-\delta t}\left(1-\beta_0-\sum_{k=1}^{n}\beta_k\right)+\sum_{k=1}^{n}\psi_k\alpha_k\beta_k\right]\ge 0,\end{aligned}$$

т. к. первый множитель $\xi f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\xi)f(\boldsymbol{x}_2)-f(\boldsymbol{x}_3)\ge 0$ в силу условия в) допущения **Д1** (по определению выпуклых функций); второй множитель положителен, поскольку его первое слагаемое положительно в силу допущения **Д2**, а второе слагаемое неотрицательно в силу **Д2**, **Д3** и по свойству неотрицательности двойственных функций.

Таким образом, доказано, что функция $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\psi},t)$, заданная на выпуклом множестве $X\times\Omega_n$, является выпуклой. ■

Для оптимальности программы $(\boldsymbol{s}(t),\boldsymbol{x}(t))$ задачи (2) – (4) необходимо, а в нашем случае и достаточно, наличие таких двойственных функций $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, при которых выполняются условия:

1. При каждом фиксированном $t\in[0,T]$

ВЕСТНИК ТОГУ. 2007. № 4 (7)

$$\boldsymbol{s} = \arg\max_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\psi},t). \tag{6}$$

2. Функции ψ_i и x_i, $(i=1,...,n)$, должны удовлетворять сопряженной системе дифференциальных уравнений:

$$\text{а) } \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i};\ \text{б) } \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i};\ \ i=1,...,n;\ \ t\in[0,T] \tag{7}$$

с краевыми условиями (4).

Условия (7а) есть фазовые уравнения (3), а условия (7б) для задачи (2) – (4) имеют вид:

$$\dot{\psi}_i = \gamma_i\psi_i - \left[\left(1-\beta_0-\sum_{k=1}^{n} s_k\right)\lambda e^{-\delta t} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k s_k \psi_k\right] f'_{x_i}(\boldsymbol{x}),\quad i=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Введем замену

$$q_i = \psi_i e^{\delta\cdot t},\ i=1,...,n\ . \tag{9}$$

Тогда гамильтониан (5) примет вид:

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{q},t) = \left(1-\beta_0-\sum_{k=1}^{n} s_k\right) f(\boldsymbol{x})\lambda e^{-\delta t} + e^{-\delta t}\sum_{k=1}^{n} q_k[\alpha_k s_k f(\boldsymbol{x}) - \gamma_k x_k], \tag{10}$$

а уравнения (8) преобразуются:

$$\dot{q}_i = (\delta+\gamma_i)q_i - \left\{\left(1-\beta_0-\sum_{k=1}^{n} s_k\right)\lambda + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k s_k q_k\right\} f'_{x_i}(\boldsymbol{x}),\ i=1,...,n. \tag{11}$$

Двойственная переменная q_i есть оценка производительности соответствующего фактора производства x_i. Численно двойственная переменная равна приращению величины гамильтониана, взятому с обратным знаком, при приращении производительности фактора на единицу.

Условие (6) упрощается (в гамильтониане выносим множитель $f(\boldsymbol{x})e^{-\delta t}$ за скобку и отбрасываем члены, не содержащие управляющие переменные, поскольку это не влияет на точку максимума):

$$\boldsymbol{s} = \arg\max_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{q},t) = \arg\max_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n} \sum_{k=1}^{n} s_k[q_k\alpha_k - \lambda] = \arg\max_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n} \boldsymbol{sQ}. \quad (12)$$

$$\boldsymbol{Q} = (Q_1,...,Q_n),\ \ Q_k = q_k\alpha_k(t) - \lambda(t),\ \ k = 1,...,n. \quad (13)$$

Формула (12), в правой части которой стоит **линейная форма** от управляющих переменных $\boldsymbol{s}$ (скалярное произведение $\boldsymbol{sQ}$), рассматриваемая на множестве Ω_n, лежит в основе построения оптимального управления.

Запишем управление $\boldsymbol{s}(t)$. Для этого введем в рассмотрение множества индексов M_1 и M_2 такие, что $M_1 = \{i \in M : Q_i < Q_{\max}\}$, $M_2 = \{i \in M : Q_i = Q_{\max}\}$; где $Q_{\max}$ определяется следующим образом: если $\max_{i\in M} Q_i \geq 0$, то $Q_{\max} = \max_{i\in M} Q_i$; если $\max_{i\in M} Q_i < 0$, то $Q_{\max} = 0$ ($M = \{1,...,n\}$, $M_1 \cup M_2 = M$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$). С учетом принятых обозначений оптимальное управление (12), записанное относительно коэффициентов линейной формы, имеет вид:

$$\boldsymbol{s}(t) = \begin{cases} s_i = \beta_i,\ i \in M_1, \\ s_i = \tilde{s}_i,\ \ i \in M_2. \end{cases} \quad (14)$$

Линейная форма $\boldsymbol{sQ}$ обеспечивает «релейный» вид оптимального управления [11], когда оптимальные значения управляющих переменных равны минимальному значению β_i, $i \in M_1$, всюду, кроме «положений равновесия» $\tilde{s}_i$, $i \in M_2$. Положения равновесия $\tilde{s}_i$ характеризуются равенством между собой соответствующих коэффициентов Q_i линейной формы.

3. Этапы движения по оптимальной траектории

Управление (14) реализует оптимальную фазовую траекторию $\boldsymbol{x}(t)$ экономической системы. Движение по этой траектории в общем случае состоит из $(n+1)$-го этапа, на каждом из которых присутствуют ***конкурирующие факторы*** – такие факторы x_i, для которых соответствующие коэффициенты Q_i линейной формы максимальны, положительны и равны между собой ($i \in M_2$).

Обозначим через p номер текущего этапа, $p = 1,...,n+1$. Период планирования $[0, T]$ разобьем на $(n+1)$ интервал:

$$[0, t_1), [t_1, t_2), \ldots, [t_{p-1}, t_p), \ldots, [t_n, T].$$

На всем произвольном этапе p тождественно по t выполняется равенство друг другу коэффициентов линейной формы, соответствующих конкурирующим факторам:

$$Q_i(t) \overset{t}{\equiv} Q_{\max}(t) > Q_j(t), \; \dot{Q}_i(t) = \dot{Q}_{\max}(t), \; \forall \; j \in M_1, i \in M_2. \quad (15)$$

Условие (15) с учетом (13) запишется в виде:

$$q_i(t) \overset{t}{\equiv} \frac{Q_{\max}(t) + \lambda(t)}{\alpha_i(t)}, \;\; \dot{q}_i(t) = \left(\frac{\dot{Q}_{\max}(t) + \dot{\lambda}(t)}{Q_{\max}(t) + \lambda(t)} - \frac{\dot{\alpha}_i(t)}{\alpha_i(t)} \right) q_i(t), \quad (16)$$

$$\forall \; i \in M_2.$$

Условия принципа максимума (7) запишем в виде:

$$\dot{x}_i = \alpha_i s_i f(\boldsymbol{x}) - \gamma_i x_i, \; i = 1,...,n; \quad (17а)$$

$$\dot{q}_i = (\delta + \gamma_i) q_i - [(1 - \beta_0)\lambda + \boldsymbol{sQ}] f'_{x_i}(\boldsymbol{x}), \; i = 1,...,n. \quad (17б)$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ разобьем на две части: $\boldsymbol{x}_{M_1} = (x_i, i \in M_1)$ и $\boldsymbol{x}_{M_2} = (x_i, i \in M_2)$. Из (17б) находим частные производные $f'_{x_i}(\boldsymbol{x})$, $i \in M_2$, тем самым определен вектор:

$$\boldsymbol{u}_{M_2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, i \in M_2 \right).$$

В соответствии с допущением **Д1** функция $f(\boldsymbol{x})$ выпукла и дифференцируема на X, что, согласно теории выпуклых функций [14], позволяет по значению градиента восстанавливать единственное значение аргумента $\boldsymbol{x} = \operatorname{grad} f^*(\boldsymbol{u})$, где f^* – сопряженная по фазовым аргументам функция (двойственная по Фенхелю к функции f).

Применяя операцию Фенхель-сопряжения по переменным $\boldsymbol{x}_{M_2}$ при фиксированных значениях $\boldsymbol{x}_{M_1}$ и обозначая соответствующую функцию через $f^*_{M_2}$, находим частичный вектор:

$$\boldsymbol{x}_{M_2} = \operatorname{grad} f^*_{M_2}(\boldsymbol{u}_{M_2}). \tag{18}$$

Поскольку в соответствии с оптимальным управлением (14) $s_i = \beta_i,\ i \in M_1$, то частичный вектор $\boldsymbol{x}_{M_1}$ находится из (17а), фазовые уравнения для него имеют вид:

$$\dot{x}_i = \alpha_i \beta_i f(\boldsymbol{x}) - \gamma_i x_i,\ \ i \in M_1. \tag{19}$$

Таким образом, получаем весь вектор $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_{M_1}, \boldsymbol{x}_{M_2})$, зная который, из (17, а) можно определить переменные управления:

$$s_i = \tilde{s}_i = \frac{\gamma_i x_i + \dot{x}_i}{\alpha_i f(\boldsymbol{x})},\ i \in M_2. \tag{20}$$

Таким образом, любой произвольный этап p описывается уравнениями (17а, 17б) при выполнении условий (16). Если на p-й этап переходит одновременно более одного фактора (более одного $Q_k(t)$ становится равным $Q_{\max}(t)$), то продолжительность p-го этапа считается равной нулю: $t_p - t_{p-1} = 0$; и далее расчет параметров производится для $(p+1)$-го этапа.

На последнем этапе (при $p = n+1$) система выходит на квазистационарный режим, обеспечивающий выполнение правого граничного условия (4).

Фазовую траекторию $\left(t, x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t)\right)$ и орбиту $\left(x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t)\right)$ назовем ***квазистационарными***, если выполняются условия (7) при выполнении равенств (15), которые на этом этапе принимают вид

$$Q_k(t) \overset{t}{\equiv} 0,\ \dot{Q}_k(t) = 0,\ k = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Оптимальное управление $\left(s_1^*(t), \ldots, s_n^*(t)\right)$ на $(n+1)$-м этапе является частным случаем управления $\left(\tilde{s}_1(t), \ldots, \tilde{s}_n(t)\right)$.

Из (21) видно, что выход на квазистационарную траекторию осуществляется, когда *все* коэффициенты линейной формы становятся равными нулю:

$$\max_{\boldsymbol{s} \in \Omega_n} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{q}, t) = \max_{\boldsymbol{s} \in \Omega_n} \boldsymbol{s}\boldsymbol{Q} = Q_{\max}(t) = 0.$$

Выражения (17б) при выполнении равенств $q_k(t)\alpha_k(t) \overset{t}{\equiv} q_i(t)\alpha_i(t)$, $\forall i,k \in M$, задают переходную гиперповерхность Π в $(n+1)$-мерном пространстве $(t, x_1(t),..., x_n(t)) \in R_+^{n+1}$. Причем квазистационарная траектория целиком находится на поверхности Π.

Координаты квазистационарной траектории $(x_1^*(t),..., x_n^*(t))$ задачи (2-4) определяются неявным образом как решение уравнений (17б) при условии (21):

$$f'_{x_k}(\boldsymbol{x}^*) = \left(\delta + \gamma_k - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \frac{\dot{\alpha}_k}{\alpha_k}\right) \Big/ \alpha_k, \quad k = 1,..., n. \tag{22}$$

Уравнения (22) определяют градиент функции $f(\boldsymbol{x})$ по фазовым переменным:

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Используя процедуру Фенхель-сопряжения, по значению градиента восстанавливаем единственное значение аргумента:

$$\boldsymbol{x}^* = \operatorname{grad} f^*(\boldsymbol{u}), \tag{23}$$

где f^* – сопряженная по фазовым аргументам функция.

По формуле (23) получаем искомую квазистационарную траекторию $\bar{x}^*(t)$. Реализующее ее оптимальное управление $(s_1^*(t),..., s_n^*(t))$ находится из соотношений (17а) при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$:

$$s_k^* = \frac{\gamma_k x_k^* + \dot{x}_k^*}{\alpha_k f(\boldsymbol{x}^*)}, \quad k = 1,..., n. \tag{24}$$

По построению управление (24) допустимо: $\boldsymbol{s}^*(t) \in \Omega_n$, $\forall t \in [t_n, T]$; при его реализации будет поддерживаться квазистационарный режим оптимальной траектории.

Итак, построение оптимальной траектории проведено полностью.

Библиографические ссылки

1. *Ramsey F. P.* A mathematical theory of saving. // Econ. Journ. December 1928.
2. *Koopmans T. C.* On the concept of optimal economic growth. Ex Aedibvs Academicis in Civitate Vaticana. 1965.
3. *Cass D.* Optimum saving in an Aggregative Model of Capital Accumulation. 1963.

4. *Макаров В. Л., Рубинов А. М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., 1973.

5. *Беленький В. З.* Оптимальное управление: принцип максимума и динамическое программирование. / Ин-т компьютер. исслед. М.; Ижевск, 2006.

6. *Беленький В. З.* Теорема о стационарном решении обобщенной модели Рамсея-Касса-Купманса // Анализ и моделирование экономических процессов / Под ред. В. З. Беленького. М., 2004. Вып. 1.

7. *Беленький В. З., Кетова К. В.* Вековое уравнение для устойчивой неподвижной точки стационарной динамической конечномерной модели ЭД в непрерывном времени // Анализ и моделирование экономических процессов / Под ред. В. З. Беленького. М., 2006. Вып. 3.

8. *Матвеенко В. Д.* Эффективный функционал и магистраль в моделях экономической динамики // Математические модели экономической динамики. Вильнюс, 1988.

9. *Беленький В. З., Кетова К. В.* Полное аналитическое решение макромодели развития региона при экзогенном демографическом прогнозе // ЭММ. 2006. Т. 42. Вып. 4.

10. *Булгаков В. К., Стригунов В. В*. Решение задачи оптимального управления динамикой экономической системы региона РФ для конечного горизонта планирования // Вестник ИжГТУ. Ижевск, 2007. № 2 (34).

11. *Кетова К. В., Сабирова О. Р.* Макромодель развития региона с учетом повышения качества трудовых ресурсов // Анализ и моделирование экономических процессов / Под ред. В. З.Беленького. М., 2006. Вып. 3

12. *Русяк И. Г., Кетова К. В*. Анализ решения задачи управления демоэкономическим состоянием региона // Интеллектуальные системы в производстве. М.; Ижевск, 2003. № 2.

13. *Понтрягин Л. С.* Принцип максимума в оптимальном управлении. М., 1989.

14. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М., 1973.