ВЕСТНИК ТОГУ. 2007. № 4 (7)

УДК 517.983.23

ОЦЕНКИ ЭНТРОПИЙНЫХ ЧИСЕЛ ОПЕРАТОРОВ ХАРДИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ[1]

Ломакина Е. Н. – д-р физ.-мат. наук., проф. кафедры МиММЭ (ХГАЭП)

Исследовано асимптотическое поведение энтропийных чисел интегральных операторов типа Харди с переменными пределами интегрирования, действующих в пространствах Лебега на полуоси.

The asymptotical behavior of the entropy numbers of the Hardy-type integral operators with variable limits of integration acting in Lebesgue spaces on a semi axis are estimated.

Оценкам характеристических чисел интегральных операторов было посвящено значительное количество работ многих авторов. Отметим монографии [3], [7], [8], статьи [4]-[6], [9], но исследование энтропийных чисел интегральных операторов до последнего времени оставалось менее детальным, в особенности это касается конкретных классов операторов. В данной работе получены асимптотические оценки энтропийных чисел операторов Харди с переменными пределами интегрирования.

Пусть $B(X,Y)$ – пространство всех линейных, ограниченных операторов действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y. *Энтропийные числа* $e_n(T)$, $n \in N$, *(e – числа)* оператора $T \in B(X,Y)$ определяются как точная нижняя грань множества всех чисел $\varepsilon > 0$, для которых существуют элементы $y_1, \ldots, y_m \in Y$, где $m \le 2^{n-1}$, такие что $T(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \{y_i + \varepsilon B_Y\}$, т.е.

[1] Данное исследование поддержано грантом НШ-9004.2006.1, 07-01-00054-а РФФИ

$$e_n(T) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \exists y_1,\dots,y_m \in Y,\ m \le 2^{n-1}\ :\ T(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{m}\{y_i + \varepsilon B_Y\}\right\},$$

где $B_X = \{x \in X\ :\ \|x\|_X \le 1\}$ – единичный шар в X, а B_Y – единичный шар в Y.

Энтропийные числа обладают следующими свойствами: для операторов $S,T \in B(X,Y)$ и $R \in B(Y,Z)$

(i) $\|T\| = e_1(T) \ge e_2(T) \ge \ldots \ge 0;$

(ii) $e_{n+m-1}(T+S) \le e_n(T) + e_m(S), \quad n,m \in N;$ (1)

(iii) $e_{n+m-1}(RT) \le e_n(T)\cdot e_m(R), \quad n,m \in N.$

Энтропийные числа тесно связаны с аппроксимативными числами и числами Гильберта линейных ограниченных операторов. Приведем следующие определения:

n*-е аппроксимативное число оператора* $T \in B(X,Y)$

$$a_n(T) = \inf\left\{ \|T-L\|_{X\to Y}\ :\ L : X \to Y,\ rankL \le n \right\},\quad n \in N,$$

где $rankL = \dim R(L)$;

n*-е число Гильберта оператора* $T \in B(X,Y)$

$$h_n(T) = \sup\left\{a_n(FTE)\ :\ E \in B(\ell_2, X),\ F \in B(Y,\ell_2),\ \|E\| \le 1,\ \|F\| \le 1\right\}.$$

Соотношения между характеристическими числами содержатся в следующей теореме.

Теорема 1. [3], [5]. Пусть $T \in B(X,Y)$. *Тогда*

(i) $h_n(T) \le 2e_n(T);$

(ii) $\sup_n n^\alpha e_n(T) \le C_\alpha \sup_n n^\alpha a_n(T),$ *для любого* $\alpha > 0$.

Пусть $1 < p < \infty$. Обозначим $L_p(R^+)$ пространство Лебега всех измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p(R^+)} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определим операторы $S : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ при $1 < p,q < \infty$

$$Sf(x) = v(x)\int_0^{\psi(x)} u(y)f(y)dy, \tag{2}$$

и $K : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ при $1 < p,q < \infty$

$$Kf(x) = v(x) \int_{\varphi(x)}^{\infty} u(y) f(y) dy, \qquad (3)$$

где весовые функции $u(y) \in L_{p',loc}(R^+)$, $v(x) \in L_{q,loc}(R^+)$ и пределы интегрирования $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – возрастающие дифференцируемые функции такие, что $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\varphi(x) < \psi(x)$ для $x \in (0,\infty)$ и $\varphi(\infty) = \psi(\infty) = \infty$.

Критерии об ограниченности и компактности операторов (2) и (3) содержатся в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$. *Тогда*

(a1) Оператор S *ограничен из* $L_p(R^+)$ *в* $L_q(R^+)$ *тогда и только тогда, когда*

$$A_1 = \sup_{t>0} A_\psi(t) = \sup_{t>0} \left(\int_0^{\psi(t)} |u(y)|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_t^{\infty} |v(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

причем, $\|S\|_{L_p(R^+) \to L_q(R^+)} \approx A_1$.

Оператор $S : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ *компактен в том и только в том случае, если*

$$A_1 < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{t\to 0} A_\psi(t) = \lim_{t\to\infty} A_\psi(t) = 0.$$

(a2) Оператор K *ограничен из* $L_p(R^+)$ *в* $L_q(R^+)$ *тогда и только тогда, когда*

$$A_2 = \sup_{t>0} A_\varphi(t) = \sup_{t>0} \left(\int_{\varphi(t)}^{\infty} |u(y)|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^{t} |v(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

причем, $\|K\|_{L_p(R^+) \to L_q(R^+)} \approx A_2$.

Оператор $K : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ *компактен в том и только в том случае, если*

$$A_2 < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{t\to 0} A_\varphi(t) = \lim_{t\to\infty} A_\varphi(t) = 0.$$

Пусть $1 < q < p < \infty$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Тогда*

(b1) *Если оператор* S *ограничен из* $L_p(R^+)$ *в* $L_q(R^+)$, *то*

$$D_1 = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^{\psi(x)} |u(t)|^{p'} dt \right)^{\frac{s}{p'}} \left(\int_x^\infty |v(y)|^q dy \right)^{\frac{s}{q}-1} |v(x)|\, dx \right)^{\frac{1}{s}} < \infty,$$

кроме того, $\|S\|_{L_p(R^+)\to L_q(R^+)} \approx D_1$.

Оператор $S : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ *компактен в том и только в том случае, если* $D_1 < \infty$.

(b2) *Если оператор* K *ограничен из* $L_p(R^+)$ *в* $L_q(R^+)$, *то*

$$D_2 = \left(\int_0^\infty \left(\int_{\varphi(x)}^\infty |u(t)|^{p'} dt \right)^{\frac{s}{p'}} \left(\int_0^x |v(y)|^q dy \right)^{\frac{s}{q}-1} |v(x)|\, dx \right)^{\frac{1}{s}} < \infty,$$

кроме того, $\|K\|_{L_p(R^+)\to L_q(R^+)} \approx D_2$.

Оператор $K : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ *компактен в том и только в том случае, если* $D_2 < \infty$.

Доказательство теоремы следует заменой переменных из известных результатов об ограниченности и компактности оператора Харди [2, § 1.3].

Введем следующие обозначения: для интегрального оператора $S : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ пусть последовательность $\{\xi_n\}_{n\in Z}$ задана формулой

$$U(\psi(\xi_n)) = \int_0^{\psi(\xi_n)} |u(t)|^{p'} dt = 2^n, \qquad -\infty < n \le N_\psi \le \infty.$$

Определим

$$\sigma_n = \| u \|_{L_{p'}(\psi(\xi_n),\psi(\xi_{n+1}))} \| v \|_{L_q(\xi_n,\, \xi_{n+1})}$$

и положим

$$\left(\sum_{n\in Z} \tilde{\sigma}_n^r \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{n\in Z} 2^{\frac{nr}{p'}} \left(\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} |v(x)|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$=\left(\sum_{n\in Z}\|u\|^{r}_{L_{p'}(\psi(\xi_n),\psi(\xi_{n+1}))}\|v\|^{r}_{L_q(\xi_n,\xi_{n+1})}\right)^{\frac{1}{r}},$$

где $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p'}+\dfrac{1}{q}$.

Аналогично, для интегрального оператора $K: L_p(R^+)\to L_q(R^+)$ зададим последовательность $\{\tau_n\}_{n\in Z}$ следующим равенством

$$U(\varphi(\tau_n))=\int_{\varphi(\tau_n)}^{\infty}|u(t)|^{p'}dt=2^{-n},\qquad -\infty\le N_\varphi\le n<\infty,$$

положим

$$\tilde{\kappa}_n=\|u\|_{L_{p'}(\varphi(\tau_n),\varphi(\tau_{n+1}))}\|v\|_{L_q(\tau_n,\tau_{n+1})}$$

и

$$\left(\sum_{n\in Z}\tilde{\kappa}_n^r\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\sum_{n\in Z}\|u\|^{r}_{L_{p'}(\varphi(\tau_n),\varphi(\tau_{n+1}))}\|v\|^{r}_{L_q(\tau_n,\tau_{n+1})}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Теорема 3. *Предположим, что весовые функции* $u\in L_{p',loc}(R^+)$,

$v\in L_{q,loc}(R^+)$, *1 < p, q < ∞, такие, что операторы* $S: L_p(R^+)\to L_q(R^+)$ и $K: L_p(R^+)\to L_q(R^+)$, *определенные формулами (2), (3), компактны.*

(1) Пусть $\Delta=(a,b)\subset R^+$, $J=(\psi(a),\psi(b))$, $I=(\varphi(a),\varphi(b))$, $S: L_p(J)\to L_q(\Delta)$, $K: L_p(J)\to L_q(\Delta)$. *Тогда выполняются следующие оценки:*

$$c_1(p,q)\left(\int_\Delta|u(\psi(x))|^r|v(x)|^r(\psi'(x))^{\frac{r}{p'}}dx\right)^{1/r}\le\liminf_{n\to\infty}n\,e_n(S)\le$$

$$\le\limsup_{n\to\infty}n\,e_n(S)\le c_2(p,q)\left(\int_\Delta|u(\psi(x))|^r|v(x)|^r(\psi'(x))^{\frac{r}{p'}}dx\right)^{1/r}$$

и

$$c_1(p,q)\left(\int_\Delta|u(\varphi(x))|^r|v(x)|^r(\varphi'(x))^{\frac{r}{p'}}dx\right)^{1/r}\le\liminf_{n\to\infty}n\,e_n(K)\le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} n\,e_n(K) \le c_2(p,q)\left(\int_\Delta \left|u(\varphi(x))\right|^r \left|v(x)\right|^r (\varphi'(x))^{\frac{r}{p'}}\,dx\right)^{1/r}.$$

(2) *Пусть* $\sum_{n\in Z}\tilde{\sigma}_n^r < \infty$, $\sum_{n\in Z}\tilde{\kappa}_n^r < \infty$. *Тогда*

$$c_1(p,q)\left(\int_0^\infty \left|u(\psi(x))\right|^r \left|v(x)\right|^r (\psi'(x))^{\frac{r}{p'}}\,dx\right)^{1/r} \le \liminf_{n\to\infty} n\,e_n(S) \le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} n\,e_n(S) \le c_2(p,q)\left(\int_0^\infty \left|u(\psi(x))\right|^r \left|v(x)\right|^r (\psi'(x))^{\frac{r}{p'}}\,dx\right)^{1/r}$$

и

$$c_1(p,q)\left(\int_0^\infty \left|u(\varphi(x))\right|^r \left|v(x)\right|^r (\varphi'(x))^{\frac{r}{p'}}\,dx\right)^{1/r} \le \liminf_{n\to\infty} n\,e_n(K) \le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} n\,e_n(K) \le c_2(p,q)\left(\int_0^\infty \left|u(\varphi(x))\right|^r \left|v(x)\right|^r (\varphi'(x))^{\frac{r}{p'}}\,dx\right)^{1/r}.$$

Доказательство.

Заменой переменной $y=\psi(t)$ получаем

$$Sf(x) = v(x)\int_0^{\psi(x)} u(y)\,f(y)\,dy = v(x)\int_0^x u(\psi(t))\,f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt.$$

Отсюда следует, что оператор

$$S = \Omega\circ\Psi$$

является суперпозицией метрического изоморфизма

$$\Psi: L_p(R^+)\to L_q(R^+),\quad \Psi: f(t)\to f(\psi(t))[\psi'(t)]^{1/p}$$

и оператора $\Omega: L_p(R^+)\to L_q(R^+)$

$$\Omega g(x) = v(x)\int_0^x u_\psi(t)g(t)dt,$$

где

$$u_\psi(t) = u(\psi(t))[\psi'(t)]^{1/p}.$$

В силу свойств e – чисел (1) имеем

$$e_n(S) \le \|\Psi\|\cdot e_n(\Omega),$$

а также

ВЕСТНИК ТОГУ. 2007. № 4 (7)

$$e_n(\Omega) \le \left\|\Psi^{-1}\right\| \cdot e_n(S).$$

Поскольку $\|\Psi\|_{L_p \to L_p} = \left\|\Psi^{-1}\right\|_{L_p \to L_p} = 1$, то $e_n(S) = e_n(\Omega)$.

Поэтому, используя результаты [9] (теоремы 4.6, 4.10, теоремы 5.7, 5.8), получаем требуемые оценки.

Асимптотические оценки для оператора K выводятся аналогично заменой $y = \varphi(t)$.

Следствие 1. *Предположим, что весовые функции* $u \in L_{p',loc}(R^+)$, $v \in L_{q,loc}(R^+)$, *1 < p, q < ∞, такие, что операторы* $S : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ и $K : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$, *определенные формулами (2), (3), компактны и* $\sum_{n\in Z} \tilde{\sigma}_n^r < \infty$, $\sum_{n\in Z} \tilde{\kappa}_n^r < \infty$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} n\, h_n(S) \le c(p,q) \left(\int_0^\infty \left| u(\psi(x)) \right|^r \left| v(x) \right|^r (\psi'(x))^{\frac{r}{p'}}\, dx \right)^{1/r},$$

$$\limsup_{n\to\infty} n\, h_n(K) \le c(p,q) \left(\int_0^\infty \left| u(\varphi(x)) \right|^r \left| v(x) \right|^r (\varphi'(x))^{\frac{r}{p'}}\, dx \right)^{1/r}.$$

Далее, рассмотрим интегральный оператор $H : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ с переменной областью интегрирования вида

$$\mathrm{Hf(x) = v(x)} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathrm{u(y)\, f(y)\, dy}. \tag{4}$$

Для исследований асимптотики e – чисел оператора (4) построим специальное разбиение полуоси $(0,\infty) = \bigcup_{\kappa} \Delta_\kappa$, где $\Delta = [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ *и* $\delta_k = [\eta_k, \eta_{k+1}]$ определяются для $k \in Z$ следующим образом:

$$\zeta_0 = 1,\quad \eta_0 = \varphi(1),\quad \eta_1 = \psi(1),\quad \zeta_{\kappa+1} = (\varphi^{-1} \circ \psi)^\kappa (1),\ k \in Z,$$

$$\eta_k = \psi(\varphi^{-1} \circ \psi)^{k-1},\quad k \in Z.$$

Используя асимптотические оценки аппроксимативных чисел оператора (4), полученные в работе [1, теор. 3.1] и оценки теоремы 1 (ii), получаем оценки для энтропийных чисел оператора H с переменными пределами.

Пусть последовательности $\{\xi_{k,n}\}\in\Delta_k$ *и* $\{\tau_{k,n}\}\in\Delta_k$ заданы следующими соотношениями:

$$\int_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(\xi_{k,n})} |u(t)|^{p'}\,dt = 2^n, \qquad \int_{\varphi(\tau_{k,n})}^{\varphi(\zeta_{k+1})} |u(t)|^{p'}\,dt = 2^{-n}.$$

Определим

$$\sigma_{k,n} = \left(\int_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(\zeta_{k,n})} |u(t)|^{p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\xi_{k,n}}^{\xi_{k,n+1}} |v(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \text{ и } \kappa_{k,n} = \left(\int_{\varphi(\zeta_k)}^{\varphi(\zeta_{k,n})} |u(t)|^{p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\tau_{k,n}}^{\tau_{k,n+1}} |v(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 4. *Пусть 1 < p < ∞, оператор* $H: L_p(R^+) \to L_p(R^+)$ *компактен и* $\sum_k\sum_n \sigma_{k,n} < \infty$, $\sum_k\sum_n \kappa_{k,n} < \infty$. *Тогда выполняется оценка сверху*

$$\limsup_{n\to\infty} n\,e_n(H) \approx \int_0^\infty |v(x)| \left(|u(\varphi(x))|\,(\varphi'(x))^{\frac{1}{p'}} + |u(\psi(x))|\,(\psi(x))^{\frac{1}{p'}} \right) dx.$$

Библиографические ссылки

1. *Ломакина Е. Н.* Оценки аппроксимативных чисел одного класса интегральных операторов // Сибирский математический журнал. 2003. Т. 44. №1.
2. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л., 1985.
3. *Пич А.* Операторные идеалы. М., 1982.
4. *Carl B.* Entropy numbers of diagonal operators with application to eigenvalue problems // J. Approx. Theor. 1981. V. 32.
5. *Carl B.* Entropy numbers, s-numbers and eigenvalue problems // J. Funct. Anal. 1981. V. 41.
6. *Carl B.* Entropy numbers of embedding maps between Besov spaces with an application to eigenvalue problems // Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A. 90. 1981.
7. *Edmunds D.E., Tribel H.* Function spaces, entropy numbers, differential operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1996.
8. *König H.* Eigenvalue distribution of compact operators. Birkhäuser Boston, 1986.
9. *Lifshits M.A.,Linde W.* Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion // Mem. Am. Math. Soc. V. 745.