ВЕСТНИК ТОГУ. 2007. № 4 (7)

УДК 519.68



# РЕШЕНИЕ ПОЛУКОЭРЦИТИВНОЙ СКАЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ СИНЬОРИНИ МЕТОДОМ УДЗАВЫ

*Намм Р. В.* – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»;
*Ткаченко А. С.* – аспирант кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»

Методы решения вариационных неравенств в механике, основанные на поиске седловых точек функционалов Лагранжа, предполагают положительную определенность соответствующих билинейных форм. При этом сходимость методов обеспечивается согласованием константы положительной определенности с параметром сдвига по двойственной переменной. Поэтому для полукоэрцитивных вариационных неравенств алгоритмы поиска седловых точек, основанные на классических функционалах Лагранжа, непригодны. Для восполнения этого пробела одновременно с классическим функционалом Лагранжа в данной работе рассматривается его модифицированный аналог.

The methods of solving variational inequalities in mechanical engineering that are based on the searching of saddle points of the Lagrange functional are supposed to have positive determinacy of the corresponding bilinear forms. The convergence of the methods is provided with the coordination of a positive constant of determinacy with shift's parameter on a dual variable. Therefore the algorithms of the searching of saddle points that are based on the classical Lagrange functional are unfit for half coercively varitional inequalities. To complete this blank simultaneously with classical Lagrange functional its modified analogue is examined in the given work.

## 1. Полукоэрцитивная задача Синьорини

Вариационная постановка задачи имеет вид [1],[2]

$$\begin{cases} J(V) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} fv d\Omega \to \min \\ V \in G = \{w \in W_2^{\,1}(\Omega) : \gamma w \geq 0 \, на \, \Gamma\}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\Omega \in R^n (n = 2,3)$ - ограниченная область с достаточно гладкой границей Г, $f \in L_2(\Omega)$ - заданная функция и $\gamma w \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ – след функции $w \in W_2^1(\Omega)$ на Г.

Так как билинейная форма $a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega$ не является положительно определенной на $G$, задача (1) может не иметь решения. Однако если

$$\int\limits_{\Omega} f d\Omega < 0, \qquad (2)$$

то $J(v) \to +\infty$ при $\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \to \infty (v \in G)$, и поэтому задача разрешима (см. [1]). Более того, условие (2) обеспечивает единственность решения. В дальнейшем считаем данное условие выполненным.

Введем классический функционал Лагранжа [3],[4]

$$L(v,l) = J(v) - \int\limits_{\Gamma} l\gamma v d\Gamma = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega - \int\limits_{\Omega} fv d\Omega - \int\limits_{\Gamma} l\gamma v d\Gamma$$

$$\forall (v,l) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$$

.

Пусть $(L_2(\Gamma))^+$ – конус неотрицательных функций, интегрируемых с квадратом на Г.

Определение. Точка $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega) \times (L_2(\Gamma))^+$ называется седловой точкой функционала $L(v,l)$, если выполнено неравенство $L(v^*,l) \le L(v^*,l^*) \le L(v,l^*) \forall (v,l) \in W_2^1(\Omega) \times (L_2(\Gamma))^+$.

В монографии [4] показано, что если решение $u^*$ задачи Синьорини в коэрцитивной постановке принадлежит пространству $W_2^2(\Omega)$, то функционал Лагранжа имеет единственную седловую точку $\left( u^*, \dfrac{\partial u^*}{\partial n} \right)$, т. е. $v^* = u^*$ в $\Omega$ и $l^* = \dfrac{\partial u^*}{\partial n}$ на Г, где $n$ - единичный вектор внешней нормали к Г. Аналогичный результат справедлив и для полукоэрцитивной задачи (1) (см. [5]).

Тем не менее применение метода Удзавы для поиска седловой точки с использованием функционала $L(v,l)$ в полукоэрцитивном случае невозможно, так как билинейная форма $a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega$ лишь неотрицательно определена на $W_2^1(\Omega)$. Для преодоления этого затруднения в работах [5],[6] введен и исследован модифицированный функционал Лагранжа $M(v,l) = J(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_{\Gamma}\left\{\left[(l - r\gamma v)^{+}\right]^{2} - l^{2}\right\}d\Gamma$, где $r > 0$ - const, символ $w^{+}$ означает $\max\{0, w\}$, т.е. $(l - r\gamma v)^{+} = \max\{0, l - r\gamma v\}$. Можно показать, что функционал $M(v,l)$ является выпуклым по $v$ при фиксированном $l$ и вогнутым по $l$ при фиксированном $v$ и, более того, модифицированный функционал Лагранжа дифференцируем по переменным $v$ и $l$.

При условии, что решение $u^{*}$ исходной задачи (1) принадлежит пространству $W_2^2(\Omega)$, точка $\left(u^{*}, \frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right)$ будет единственной седловой точкой и для модифицированного функционала Лагранжа (см. [5]), т. е. $M(u^{*}, l) \le M\left(u^{*}, \frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right) \le M\left(v, \frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right) \forall (v,l) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$.
В [5] для решения задачи (1) исследован метод Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа $M(v,l)$. Показано, что метод сходится к седловой точке при соответствующей регулярности решений вспомогательных задач.

Функционал $M(v,l)$ не является сильно выпуклым по переменной $v$, что затрудняет осуществление первого шага метода Удзавы. Поэтому в работе [6] рассмотрен метод Удзавы с одновременной итеративной проксимальной регуляризацией модифицированного функционала $M(v,l)$.

## 2. Метод решения полукоэрцитивной задачи Синьорини на основе модифицированной функции Лагранжа

Рассмотрим аппроксимацию задачи (1) по методу конечных элементов в предположении, что $\Omega \in R^2$ - ограниченный многоугольник. Введем следующие обозначения: $F_h$ - триангуляция области $\Omega$, удовлетворяющая стандартным требованиям [1], $h$ - характерный параметр триангуляции; $N_h$ - множество узлов $F_h$; $M_h = \Gamma \cap N_h$; $V_h$ - линейная оболочка соответствующих кусочно-аффинных базисных функций; $G_h = \{v_h \in V_h : v_h(s) \ge 0 \, для \, s \in M_h\}$. Отметим, что так как $\Omega$ - многоугольник, обеспечено включение $G_h \subset G$. Как показано в [1], решение конечномерной задачи

$$\begin{cases} J(v_h) \to \min \\ v_h \in G_h \end{cases} \tag{3}$$

существует, единственно и, кроме того, для её решения $u_h^*$ справедлива предельная оценка вида $\lim\limits_{h\to 0}\left\|u_h^* - u^*\right\|_{W_2^1(\Omega)} = 0$, где, как и ранее, $u^*$ – решение задачи (1). В работах [7],[8], при условии, что $u^* \in W_2^2(\Omega)$, доказывается оценка $\left\|u_h^* - u^*\right\|_{W_2^1(\Omega)} \le ch^{1/2}$, где $c > 0$ не зависит от $h$.

Стандартными преобразованиями задача (3) сводится к задаче квадратичного программирования [1],[3]

$$\begin{cases} I(y) = \dfrac{1}{2}\langle Ay, y\rangle - \langle p, y\rangle \to \min \\ y_i \ge 0, i \in M_h, \end{cases} \tag{4}$$

где $y_i$, $i \in N_h$ - коэффициенты разложения произвольного элемента $v_h \in V_h$ по кусочно-аффинным базисным функциям, $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,|N_h|}$, ($|N_h|$ - количество узлов триангуляции $F_h$), $a_{ij} = \int\limits_{\Omega} \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j d\Omega$ ($\varphi_i$ - соответствующие кусочно-аффинные базисные функции), $p = \left(p_i\right)_{i=1,\ldots,|N_h|}$,

$p_i = \int\limits_{\Omega} f\varphi_i d\Omega$.

Пусть $v_h = \sum\limits_{i\in N_h} y_i\varphi_i$. Тогда $\langle Ay, y\rangle = \int\limits_{\Omega} \left|\nabla v_h\right|^2 d\Omega \ge 0$, то есть матрица $A$ неотрицательно определена в конечномерном пространстве $R^{|N_h|}$. Легко видеть, что ядро матрицы $A$ непустое и состоит из единственного вектора $\rho = (1,1,\ldots,1)$. Несмотря на вырожденность матрицы $A$, для решения задачи (4) можно использовать весьма популярный в литературе метод поточечной релаксации с проектированием [3],[4]:

$$\begin{cases} y_i^{n+\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{a_{ii}}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}y_j^{n+1} + \sum\limits_{j=i+1}^{|N_h|} a_{ij}y_j^n - p_i\right) \\ y_i^{n+1} = P_{K_i}\left(\left(1-\omega\right)y_i^n + \omega y_i^{n+\frac{1}{2}}\right) \end{cases}, \quad 0 < \omega < 2, \tag{5}$$

где

$$K_i = \begin{cases} (-\infty,+\infty), если\, i \in N_h \setminus M_h \\ [0,+\infty), если\, i \in M_h \end{cases},$$

$$P_{K_i}(\kappa) = \begin{cases} \kappa, если\, \kappa \in K_i \\ 0, если\, \kappa \notin K_i \end{cases}.$$

Теоретическое обоснование сходимости метода в нашем случае можно найти в [9]. Ниже рассмотрим метод решения конечномерной задачи (4), основанный на методе Удзавы с модифицированной функцией Лагранжа.

Составим классическую функцию Лагранжа $\widehat{L}(y,\alpha)=I(y)+h\sum\limits_{i\in M_h}\alpha_i y_i \quad \forall y\in R^{|N_h|},\forall\alpha\in R^{|M_h|}$. Напомним, что пара $\left(y^*,\alpha^*\right)\in R^{|N_h|}\times R^{|M_h|}$ называется седловой для $\widehat{L}(y,\alpha)$, если выполняется двустороннее неравенство [10],[11] $\widehat{L}(y^*,\alpha)\le\widehat{L}(y^*,\alpha^*)\le\widehat{L}(y,\alpha^*)$ $\forall y\in R^{|N_h|},\forall\alpha\in R_+^{|M_h|}$, где $R_+^{|M_h|}=\left\{z\in R^{|M_h|}:z\ge 0\right\}$. Как известно, $y^*$ является единственным решением задачи (4) и существует хотя бы одно $\alpha^*$ [10]. Введем модифицированную функцию Лагранжа $\widehat{M}(y,\alpha)=I(y)+\dfrac{h}{2r}\sum\limits_{i\in M_h}\left(\left(\left(\alpha_i-ry_i\right)^+\right)^2-\alpha_i^2\right) \quad \forall y\in R^{|N_h|},\forall\alpha\in R^{|M_h|}$, где $r>0$ - произвольная постоянная.

<u>Определение.</u> Пара $\left(\widehat{y},\widehat{\alpha}\right)\in R^{|N_h|}\times R^{|M_h|}$ называется седловой для $\widehat{M}(y,\alpha)$, если выполняется двустороннее неравенство $\widehat{M}(\widehat{y},\alpha)\le\widehat{M}(\widehat{y},\widehat{\alpha})\le\widehat{M}(y,\widehat{\alpha}) \quad \forall y\in R^{|N_h|},\forall\alpha\in R^{|M_h|}$.

Известно, что для классической и модифицированной функций Лагранжа совокупность седловых точек одна и та же [10],[11].

Метод Удзавы с модифицированной функцией $M(y,\alpha)$ выглядит так: задаемся начальным $\alpha^0=\left(\alpha_1{}^0,\ldots,\alpha_{|M_h|}{}^0\right)$, далее:

1) на $k$-м шаге решаем задачу безусловной минимизации $M(y,\alpha^k)$ по переменной $y$, то есть находим $y^{k+1}=\arg\min\limits_{y\in R^{|N_h|}}\widehat{M}(y,\alpha^k)$;
2) полагаем $\alpha^{k+1}=\left(\alpha^k-ry^{k+1}\right)^+$ и переходим на шаг 1.

Далее докажем, что метод Удзавы с модифицированной функцией $\widehat{M}(y,\alpha)$ приводит к решению задачи (3).

Теорема 1. Пусть выполнено условие разрешимости (2). Тогда для любого $\alpha=\left(\alpha_1,...,\alpha_{|M_h|}\right)\ge 0$ задача

$$\begin{cases}\widehat{M}(y,\alpha)\to\min\\ y\in R^{|N_h|}\end{cases}$$

разрешима.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\widehat{M}(y,\alpha) \to +\infty \text{ при } \|y\| \to \infty. \qquad (6)$$

По аналогии с теоремой 2 в [5], для любого вектора $y$ разобьем множество граничных узлов $M_h$ на две части $M_h^-$ и $M_h^+$, так что $y_i < 0$, если $i \in M_h^-$ и $y_i \geq 0$ при $i \in M_h^+$. Пусть $y^- = \min\{0, y\}$, $y^+ = \max\{0, y\}$. Тогда $y = y^+ + y^-$, где $y^+ = \left(y_1^+, \dots, y_{|N_h|}^+\right)$, $y^- = \left(y_1^-, \dots, y_{|N_h|}^-\right)$. Имеем

$$\sum_{i\in M_h}\left(\left(\alpha_i - ry_i\right)^+\right)^2 = \sum_{i\in M_h^-}\left(\left(\alpha_i - ry_i\right)^+\right)^2 + \sum_{i\in M_h^+}\left(\left(\alpha_i - ry_i\right)^+\right)^2 = \sum_{i\in M_h^-}\left(\alpha_i - ry_i\right)^2 + \sum_{i\in M_h^+}\left(\left(\alpha_i - ry_i\right)^+\right)^2 =$$

$$\sum_{i\in M_h^-}\alpha_i^2 + \sum_{i\in M_h^-}\left(-2\alpha_i r y_i + r^2 y_i^2\right) + \sum_{i\in M_h^+}\left(\left(\alpha_i - ry_i\right)^+\right)^2 \geq \sum_{i\in M_h^-}\alpha_i^2 + \sum_{i\in M_h^+}\left(-2\alpha_i r y_i + r^2 y_i^2\right) \geq$$

$$\sum_{i\in M_h^-}\left(-2\alpha_i r y_i + r^2 y_i^2\right) \geq \sum_{i\in M_h}\left(-2\alpha_i r y_i^- + r^2\left(y_i^-\right)^2\right) \geq r^2 \sum_{i\in M_h}\left(y_i^-\right)^2.$$

Так как $\langle Ay, y\rangle = \langle Ay^+, y^+\rangle + \langle Ay^-, y^-\rangle$, то

$$M(y,\alpha) = \frac{1}{2}\langle Ay, y\rangle - \langle p, y\rangle + \frac{h}{2r}\sum_{i\in M_h}\left(\left(\alpha_i - ry_i\right)^+\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2}\langle Ay^+, y^+\rangle + \frac{1}{2}\langle Ay^-, y^-\rangle - \langle p, y^+\rangle - \langle p, y^-\rangle + \frac{h}{2r}\sum_{i\in M_h}\left(\left(\alpha_i - ry_i\right)^+\right)^2 \geq \qquad (7)$$

$$\frac{1}{2}\langle Ay^+, y^+\rangle - \langle p, y^+\rangle + \frac{1}{2}\langle Ay^-, y^-\rangle - \langle p, y^-\rangle + \frac{rh}{2}\sum_{i\in M_h}\left(y_i^-\right)^2.$$

Вектору $y^+ \in R^{|N_h|}$ поставим в соответствие элемент $\widehat{y}^+ \in \sum_{i\in N_h} y_i^+ \varphi_i(x,y)$. Легко видеть, что $\widehat{y}^+ \in G_h$. Так как $G_h \subset G$, то $J(\widehat{y}^+) \to +\infty$ при $\|\widehat{y}^+\|_{W_2^1(\Omega)} \to \infty$. Тогда из равенства $I(y^+) = J(\widehat{y}^+)$ вытекает (см. [9]) $I(y^+) \to +\infty$ при $\|y^+\|_{R^{|N_h|}} \to \infty$. Так как ядро матрицы $A$ состоит из единственного вектора $\rho = (1,1,...,1)$, то, очевидно, что выражение $\left(\frac{1}{2}\langle Ay, y\rangle + \frac{rh}{2}\sum_{i\in M_h}\left(y_i\right)^2\right)^{1/2}$ для любого $y \in R^{|N_h|}$ образует норму в $R^{|N_h|}$. Из неравенства (7) теперь непосредственно следует свойство (6) для $\widehat{M}(y,\alpha)$. Теорема 1 доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, что элементы $y^k, k = 1, 2, \ldots$, определяемые по методу Удзавы, существуют. Имеет место следующее утверждение [5], [10], [11].

Теорема 2. Последовательность $\{y^k\}$, генерируемая по методу Удзавы, сходится к решению $y^*$ задачи (4).

### 3. Численный пример

На каждом шаге метода Удзавы требуется решить вспомогательную задачу вида

$$\begin{cases} \widehat{M}(y, \alpha^k) \to \min \\ y \in R^{|N_h|} \end{cases} \tag{8}$$

Для решения задачи (8) применим метод поточечной релаксации.

Зададимся начальным вектором $z^0 = \left(z_1^0, \ldots, z_{|N_h|}^0\right)$. На $(n+1)$-ом шаге итерационного процесса координаты $z_i^{n+1}, i = 1, 2, \ldots, |N_h|$ определяются из условия

$$\widehat{M}\left((z_1^{n+1}, \ldots, z_{i-1}^{n+1}, z_i^{n+1}, z_{i+1}^n, \ldots, z_{|N_h|}^n), \alpha^k\right) \le \widehat{M}\left((z_1^{n+1}, \ldots, z_{i-1}^{n+1}, t, z_{i+1}^n, \ldots, z_{|N_h|}^n), \alpha^k\right)$$
$$\forall t \in (-\infty, +\infty). \tag{9}$$

Так как модифицированная функция $\widehat{M}(y, \alpha)$ при $\alpha \ge 0$ обладает свойством (6), то существование точек $z_i^{n+1}$ очевидно.

Модифицированная функция $\widehat{M}(z, \alpha^k)$ непрерывно дифференцируема по $z_i, i = 1, \ldots, |N_h|$. При этом

$$\frac{\partial \widehat{M}(z, \alpha^k)}{\partial z_i} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{|N_h|} a_{ij} z_j - p_i, \textit{если}\, i \in N_h \setminus M_h \\ \sum_{j=1}^{|N_h|} a_{ij} z_j - p_i - h(\alpha_i^k - r z_i)^+, \textit{если}\, i \in M_h \end{cases} \tag{10}$$

Из формулы (10) непосредственно вытекает, что $z_i^{n+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j<i} a_{ij} z_j^{n+1} + \sum_{j>i} a_{ij} z_j^n - p_i\right)$ для $i \in N_h \setminus M_h$.

Для $i \in M_h$ обозначим $\psi_i = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j<i} a_{ij} z_j^{n+1} + \sum_{j>i} a_{ij} z_j^n - p_i\right)$.

Полагаем

$$z_i^{n+1} = \begin{cases} \psi_i, \textit{если}\, \psi_i \geq \dfrac{\alpha_i^k}{r} \\ -\dfrac{1}{a_{ii}+r}\left(\sum\limits_{j<i} a_{ij} z_j^{n+1} + \sum\limits_{j>i} a_{ij} z_j^n - (p_i + h\alpha_i^k)\right), \textit{если}\, \psi_i < \dfrac{\alpha_i^k}{r}. \end{cases}$$

Пусть $\Omega$ – единичный квадрат. Триангуляция области $\Omega$ проведена с помощью равномерной сетки и показана на рис. 1. Шаг сетки $h = 1/64$, $\varepsilon = h \cdot 10^{-3}$ – условие останова первого шага метода Удзавы, $\varepsilon_1 = \varepsilon \cdot 10^2$ – условие останова полного шага метода Удзавы, $r = 150$ – const. Стартовый вектор $z^0 = (0, \ldots, 0)$.

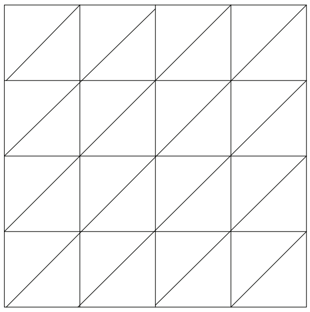

*Рис. 1*

**Пример 1.** Пусть функция $f$ на $\dfrac{1}{4}$ области $\Omega$ принимает значение $-6,0004$, а на остальной части – значение 2 (рис. 2), тогда условие разрешимости выполнено, т.к. $\int\limits_{\Omega} f d\Omega = -0,0001 < 0$.

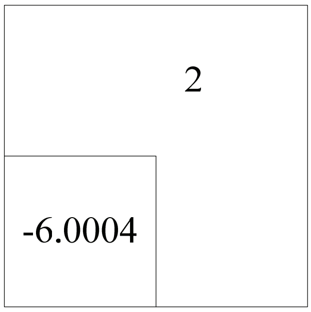


*Рис. 2*

Число полных итераций (шаг 2) метода Удзавы) составляет 8. Число всех внутренних итераций (для решения задачи (8)) – 12691. График решения приведен на рис. 3.

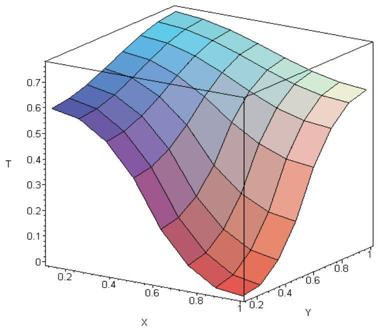


*Рис. 3*

Для сравнения приведем результат решения той же задачи методом поточечной релаксации с проектированием. Число итераций - 12599.

**Пример 2.** Пусть функция $f$ на $\frac{1}{4}$ области $\Omega$ принимает значение $-10$, а на остальной части – значение 2 (рис. 4), тогда условие разрешимости выполнено, т.к. $\int\limits_{\Omega} f d\Omega = -1 < 0$.

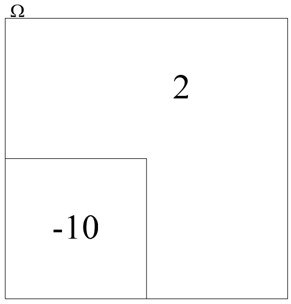


*Рис. 4*

Число полных итераций – 8. Число всех внутренних итераций – 7917. График решения приведен на рис. 5.

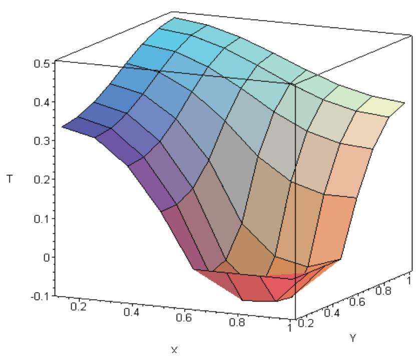


*Рис. 5*

Для сравнения приведем результат решения той же задачи методом поточечной релаксации с проектированием. Число итераций - 7724.

Из примеров следует, что результаты расчетов по методу Удзавы и методу поточечной релаксации с проектированием примерно совпадают.

## Библиографические ссылки

1. *Решение* вариационных неравенств в механике / *И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек.* М., 1986.

2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в физике и механике. М., 1980.

3. *Численное* исследование вариационных неравенств / *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* М., 1979.

4. *Numerical* methods for nonlinear variational problems. *R. Glowinski.* New York, 1984.

5. *Ву Г., Намм Р. В., Сачков С. А*. Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 1.

6. *Метод* итеративной проксимальной регуляризации для поиска седловой точки в полукоэрцитивной задаче Синьорини / *Г. Ву, С. Ким, Р. В. Намм., С. А. Сачков. //* Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 11.

7. *Намм Р. В.* О скорости сходимости метода конечных элементов в задаче Синьорини // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 5.

8. *Stable* methods for ill-posed variational inequalities in mechanics. *R. V. Namm.* Berlin. Springer: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 1997. V. 452.

9. *Намм Р. В.* Введение в теорию и методы решения вариационных неравенств. Хабаровск, 1999.

10. *Гроссман К., Каплан А. А.* Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. Новосибирск, 1981.

11. *Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В.* Модифицированные функции Лагранжа. М., 1989.