ВЕСТНИК ТОГУ. 2007. № 4 (7)

УДК 519.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТВЕГА-ДЕ ВРИЗА-БЮРГЕРСА СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Подгаев А. Г. – д-р. физ.-мат. наук, доц., завкафедрой «Высшая математика» (ТОГУ)

Рассмотрена начально-краевая задача в ограниченной области для двух случаев уравнения Кортвега-де Вриза – с нелинейным членом второго порядка и без него. В первом случае доказано существование регулярного решения глобально по времени. Для второго случая такое решение построено локально и указан интервал существования, а также на заданном интервале, но при достаточной малости начальной функции. В представленной части даны введение в проблематику, формулировки утверждений и приведено обоснование равномерных оценок вторых производных приближенного решения.

The initial boundary value problem for two cases for the Kortveg-de Vries like equation is considered. In first case equation contains the second order nonlinear term (case a)) and in the second case it does not (case b)). In case a) we prove the existence of regular solution. In case b) solution exist either locally by time or for prescribed T but with small $u\ (x,0)$. In part I we adduce proofs of the estimation u^n_{xx} for approximation u^n.

Уравнение

$$Lu = u_t + uu_x + \nu u_{xxx} - \alpha\left(u_x^2 + \mu u_{xx}^2 - 1\right)u_{xx} = 0,$$
$$\nu > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \mu \geq 0 \tag{1}$$

при $\alpha = 0$ обращается в уравнение Котвега-де Вриза, а при $\nu = 0$, $\mu = 0$ является обобщением уравнения Бюргерса на случай, когда коэффициент вязкости зависит от градиента скорости. В (1) этот коэффициент не только допускает вырождение, но и меняет знак.

Уравнение такого типа предложено в [1] с целью получить подход для решения уравнений переменного типа, основанный на аппроксимации уравнениями более высокого порядка.

Аппроксимация уравнения Бюргерса со знакопеременным коэффициентом вязкости уравнением четвертого порядка исследована наиболее полно. Смотрите по этому поводу работы [2-8].

Уравнение (1) дает аппроксимацию таких уравнений уравнением третьего порядка, учитывающего влияние дисперсии.

Изученные в работах [9-11,3] уравнения можно также рассматривать как аппроксимацию уравнений переменного типа уравнениями со смешанной третьей производной. Аппроксимация упрощенного уравнения погранслоя со сменой направления параболичности уравнением третьего порядка со смешанной производной рассмотрена в [12].

Для уравнения (1) $(\mu = 0)$ в работе [1] исследовались решения в виде периодических стационарных бегущих волн как аналитическими, так и численными методами. Строя решения вида $u(x + at)$, получают обыкновенное дифференциальное уравнение, к которому можно применить хорошо развитый аппарат автономных систем. Исследуются, в частности, вопросы о сходимости решений при $\nu \to 0$. В [13-14] изучены уникальные свойства такого типа решений для уравнения вида (1) с $\nu = 0$, $\mu = 0$.

В данной работе предлагается корректная краевая задача для (1) при указанных в (1) условиях на параметры. В частном случае, когда $\alpha = 0$, эта задача соответствует новой краевой задаче для уравнения Кортвега-де Вриза, безусловно, разрешимой.

Непериодические краевые задачи для уравнения Кортвега-де Вриза в ограниченных областях были предложены в работах [15-17]. В работах Б. А. Бубнова исследован широкий класс краевых задач для этого уравнения $(\alpha = 0)$. Однако задача, которая предложена ниже, не входит в исследованный класс (и это по-существу) и поэтому является новой. И все же основная цель этой работы исследовать предложенную задачу для (1) при $\alpha > 0$.

В [18] выведено уравнение, описывающее осциллирующую ударную волну в жидкости с пузырьками газа. Это уравнение имеет вид (1) с $\nu > 0$, где коэффициент при второй производной также меняет знак, но имеет вид линейной функции от градиента u_x.Показано, что наличие такого коэффициента приводит к развитию неустойчивости и разболтке волновых структур. Из приведенных далее результатов следует, что квадратичный характер зависимости меняет ситуацию.

Мы докажем, что для уравнения (1) в области Q=(0,T)×(0,1) корректна следующая краевая задача:

$$u(x,0)=u_0(x);\ u_x(0,t)=u(1,t)=u_{xx}(1,t)+\beta u_x(1,t)=0. \tag{2}$$

Рассмотрены два случая, когда $u_0\in W_2^2(0,1)$, $u_0(0,1)=u_{0x}(0)=0$ (часть I); и когда $u_0\in W_2^1(0,1)$, $u_0(1)=0$ - в дальнейшей части. При некоторых условиях на коэффициенты α, ν, μ, β будут доказаны теоремы существования и единственности.

В этой части работы для первого случая строятся приближения для регулярных решений и выводится равномерная оценка для них. Далее будут приведены оценки третьей производной и производной по t и дано окончание доказательства утверждений, а затем исследован второй случай и построены слабые решения задачи. Случай слабых решений другим методом исследовался в [19, 20]. Более подробное изложение исследования регулярных решений приведено в [21].

В правую часть уравнения можно добавить произвольную функцию $f(x,t)$ из L_2, а также и некоторые подчиненные члены, зависящие от решения. Доказательства теорем разрешимости для таких уравнений практически без изменения получаются предложенным в этой работе методом.

1. Выбор базисных функций

Предварительно рассмотрим задачу на собственные значения:

$$D\left[\ell^{\beta x}\left(Dv^i+\beta v^i\right)\right]=-\lambda_i v^i,\ D=\frac{\partial}{\partial x},\ \ell=\exp;$$

$$v^i(0)=v_x^i(1)+\beta v^i(1)=0. \tag{3}$$

Задача (3) не является самосопряженной относительно скалярного произведения в $L_2(0,1)$.

Сделаем в (3) замену $w=\ell^{\frac{\beta x}{2}}v$. Тогда задача для w примет вид

$$w^i(0)=w_x^i(1)+\frac{\beta}{2}w^i(1)=0,$$

$$D(\ell^{\beta x}Dw^i)+\frac{\beta^2}{4}\ell^{\beta x}w^i=-\lambda_i w^i. \tag{4}$$

Уравнения (4) задают в $L_2(0,1)$ самосопряженный оператор с областью определения $W_2^2(0,1)$. Согласно общей теории задач Штурма-Лиувилля решения (4) образуют полную ортогональную последовательность в $L_2(0,1)$. Поэтому система v^i образует полную замкнутую систему в пространстве со скалярным произведением

$$< v_i, v_j > \overset{def}{=} \int_0^1 v_i v_j \ell^{\beta x} dx \quad (5)$$

Нормируя, считаем, что $< v_i, v_j >= \delta_j^i$. Систему v^i рассмотрим в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\beta}$ со скалярным произведением $(f,g)_{L_{2,\beta}} = \int_0^1 \ell^{\beta x} fgdx$. Система v^i, удовлетворяющая (3), образует базис не только в $L_{2,\beta}$, но и в гильбертовом пространстве H_β, определяемом по скалярному произведению $(f,g)_{H_\beta} = \int_0^1 D(\ell^{\beta x} f) D(\ell^{\beta x} g)dx$ и состоящем из функций f таких, что $D(\ell^{\beta x} f) \in L_2(0,1)$ и выполнено условие $f(0)=0$. Это устанавливается стандартным образом. Подробности приведены в [21], где также установлено, что $D^2(\ell^{\beta x} v^i) \in L_{2,\beta}(0,1)$ и далее, что $D(\ell^{\beta x} v^i)$ непрерывны и имеют след при $x=0$ и $x=1$, а v^i бесконечно дифференцируемы, наконец, $\lambda_i > 0$.

Рассмотрим систему

$$\varphi^i(x) = \int_1^x v^i(\varepsilon) d\varepsilon = -\frac{1}{\lambda^i} D(\ell^{\beta x} v^i) = -\frac{1}{\lambda^i} D(\ell^{\beta x}(D\varphi^i)). \quad (7)$$

Очевидно, что φ^i удовлетворяют всем трем краевым условиям из (2), являются бесконечно дифференцируемыми на [0,1] функциями. Если $u_0(x) \in W_2^1(0,1)$ и $u_0(1)=0$, то $u_{0x} \in L_{2,\beta}$ и поэтому $u_{0x} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i v_i$, причем $\sum_{i=1}^{N} c_i v_i \to u_{0x}$ в $L_{2,\beta}$ при $N \to \infty$. Следовательно, $u_0^N(x) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} c_i \int_1^x v_i d\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i \to u_0$ в W_2^1, а также в пространстве $C[0,1]$. Очевидно, что $c_i = (u_{0x}, v_i)_{L_{2,\beta}} = \lambda_i (u_0, \varphi_i)_{L_2}$, $(\varphi_i, \varphi_j)_{L_2} = \dfrac{\delta_j^i}{\lambda_i}$.

Итак, любую функцию $u_0 \in W_2^1$, удовлетворяющую условию $u_0(1)=0$, можно разложить в ряд по φ_i, сходящийся в W_2^1. Кроме того, $\|u_0^N\|_{H_\beta} \le \|u_0\|_{H_\beta}$, и правая часть не зависит от N. Этим фактом мы воспользуемся при выводе первой априорной оценки для строящихся ниже приближенных решений, а в дальнейшем и при исследовании слабых решений задачи.

Аналогично, пусть $u_0(x) \in W_2^2(0,1)$ и $u_0(1) = u_{0x}(0) = 0$. Тогда $u_{0x} \in W_2^1(0,1)$ и $u_{0x}(0) = 0$. Следовательно, u_{0x} допускает разложение по v_i, и $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i v_i \to u_{0x}$ в H_β. Откуда $u_0^N(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i \int\limits_0^x v_i d\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x) \to u_0(x)$ в $W_2^2(0,1)$. Поэтому, $\left\|u_0^N\right\|_{W_2^2} \le c$, где c не зависит от N. Этим мы воспользуемся при выводе второй априорной оценки в части II.

Собственно для обоснования сходимости ряда Фурье по φ_i в норме W_2^2 мы и начали построения с v_i, а не стали строить сразу систему φ_i как систему собственных функций, удовлетворяющих (7). Кроме того, надо было придать смысл краевому условию $\varphi_x\big|_{x=0} = 0$. Конечно, все это можно было гарантировать, найдя соответствующие ссылки.

Наконец, мы будем использовать условие, что любую функцию из $L_2(0,1)$ также можно разложить в ряд Фурье по φ_i, сходящийся в норме $L_2(0,1)$. Чтобы это увидеть, покажем, что ортогональная в L_2 система φ_i является полной в $L_2(0,1)$.

Пусть $f \in L_2(0,1)$ и $\int\limits_0^1 f\varphi_i dx = 0 \ \forall i = 1,2,\ldots$ Имеем, переставляя интегралы

$$0=\int\limits_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx=\int\limits_0^1 f(x)\left(\int\limits_0^x v_i(\varepsilon)d\varepsilon\right)dx=\int\limits_0^1 \ell^{\beta\varepsilon}\left[\int\limits_0^\varepsilon f(x)dx\ell^{-\beta\varepsilon}\right]v_i(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Отмечалось, что система v_i замкнута в $L_{2,\beta}$ и выполнено (5). Поэтому она полна в пространстве $L_{2,\beta}$. Тогда $\left[\int\limits_0^\varepsilon f(x)dx\ell^{-\beta\varepsilon}\right] = 0$, откуда следует, что $f = 0$. Поэтому система φ_i замкнута в $L_2(0,1)$.

2. Определение регулярного решения. Формулировка теорем о регулярных решениях. Построение приближенных решений

Определение. *Функцию* $u \in L_2(0;T;W_2^3) \bigcap L_\infty(0,T;W_2^2)$, *для которой* $\alpha u_x u_{xx}$, $\mu\alpha u_{xx}u_{xxx}$, $\alpha u_x u_{xxx}$, $\mu u_{xx}^2 \in L_2(Q)$, $u_t \in L_{p'}(Q)$ *будем называть регулярным решением задачи, если краевые и начальные условия выполняются в смысле следов, а уравнение (1) выполнено в смысле распределений и почти всюду в* Q.

Теорема 1. *Пусть* $3\beta v > 2\alpha > 0$ *и* $\mu > 0$. *Пусть существует* $\lambda > 0$, *что* $2+\beta>\ell^\beta+\frac{\mu\beta\lambda}{2}$ *и* $\beta<2\lambda$. *Тогда для любой функции* $u_0(x)\in W_2^2(0,1)$, *удовлетворяющей условию* $u_0(1) = u_{0x}(0) = 0$ *на любом интервале [0,T], существует регулярное решение задачи (1)-(2).*

Случай $\mu = 0$ будет рассмотрен в работе, посвященной слабым решениям задачи.

Теорема 2. *При* $\alpha = 0$ *и любом* $\beta > 0$ *для любой функции* $u_0(x)\in W_2^2(0,1)$, *удовлетворяющей условию* $u_0(1)=u_{0x}(0)=0$, *найдется интервал* $[0,t^*]$, *на котором существует регулярное решение задачи (1)-(2) для уравнения Кортвега-де Вриза. Величина t* далее явно оценена снизу, и она тем больше, чем меньше величина* $\int_0^1 \ell^{\beta x} u_{0x}^2 dx$.

Теорема 3. *При условиях теоремы 2 для любого интервала* $[0,T]$ *найдется класс начальных данных* $u_0(x)$, *определяемый величиной* $\|u_{0x}\|_{L_2}$, *для всех функций которого на* $[0,T]$ *существует регулярное решение задачи (1)-(2).*

Доказательство теорем 1-3 начнем с построения приближенного решения. Пусть

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x),\ c_i = \lambda_i (u_0,\varphi_i)_{L_2} = (u_{0x}, v_i)_{L_{2,\beta}},$$

причем ряд сходится в $W_2^2(0,1)$. Мы убедились в этом в предыдущем пункте. Приближенное решение задачи будем искать в виде $u^n(x,t)=\sum_{i=1}^{n} c_i^n(t)\varphi_i(x)$, *где* $c_i^n(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\int_0^1 L(u^n)\varphi_i(x)dx = 0,\ i=1,2...,n,\ c_i^n(0)=c_i. \qquad (8)$$

В силу построения $\varphi_i(x)$ по формулам (7) функция u^n удовлетворяет всем краевым условиям из (2). Система (8) представляет собой систему вида

$$\sum_{k=1}^{N} c_k'(t)\int_0^1 \varphi_k\varphi_i dx = f_i(c_1^n,...,c_n^n;x,t),\ i=1,2,...,n\ .$$

Из (7) имеем

$$\int_0^1 \varphi_k\varphi_i dx = -\frac{1}{\lambda_k}\int_0^1 D(\ell^{\beta x}D\varphi_k)\varphi_i dx = \frac{1}{\lambda_k}\int_0^1 \ell^{\beta x}v_k v_i dx = \frac{1}{\lambda_k}\delta_k^i.$$

Поэтому (8) есть диагональная система уравнений, разрешенных относительно производных. Следовательно, локально, при $0<t<t_n^*$,она всегда разрешима [21]. Из оценок следующего параграфа следует разрешимость этой системы на любом конечном интервале $[0,T]$ при $\alpha>0$ (или при $\alpha=0$ и малых $u_0(x)$) и локально на [0,t*] при $\alpha=0$, где t^* не зависит от n. Доказательство теорем продолжим, установив предварительно соответствующие равномерные оценки.

3. Вывод первой равномерной оценки

Умножая (8) на $\lambda_i c_i^n(t)$, используя (7) и суммируя по i от 1 до n, получим, опуская индексы n, $0=\int_0^1 L(u)D(\ell^{\beta x}u_x)dx \overset{def}{=} (Lu, D(\ell^{\beta x}u_x))$.

В силу бесконечной дифференцируемости u^n по x вопросы существования встречающихся выражений не возникают. Интегрируя по частям, получим равенства

$$(u_t, D(\ell^{\beta x} u_x)) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\ell^{\beta x}, u_x^2) + \ell^{\beta x} u_t u_x \Big|_0^1;$$

$$\nu(u_{xxx}, \ell^{\beta x} u_{xx} + \beta \ell^{\beta x} u_x) = -\frac{3}{2}\beta\nu(\ell^{\beta x}, u_{xx}^2) + \frac{\beta^3 \nu}{2}(\ell^{\beta x}, u_x^2) -$$
$$-\frac{\nu\beta^2}{20}\ell^{\beta x} u_x^2 \Big|_0^1 + \nu\beta^{\beta x} u_{xx}\left(\frac{u_{xx}}{2} + \beta u_x\right)\Big|_0^1;$$

$$-\alpha((u_x^2 + \mu u_{xx}^2 - 1)u_{xx}, \ell^{\beta x} u_{xx} + \beta \ell^{\beta x} u_x) = -\alpha(\ell^{\beta x} u_x^2, u_{xx}^2) +$$
$$+\alpha(\ell^{\beta x}, u_{xx}^2) + \frac{\beta^2 \alpha}{4}(\ell^{\beta x}, u_x^4) - \mu\alpha(\ell^{\beta x}, u_{xx}^4) -$$
$$-\mu\alpha\beta(\ell^{\beta x} u_x, u_{xx}^3) - \frac{\alpha\beta}{4}\ell^{\beta x} u_x^4 \Big|_0^1 - \frac{\alpha\beta^2}{2}(\ell^{\beta x}, u_x^2) + \frac{\alpha\beta}{2}\ell^{\beta x} u_x^2 \Big|_0^1;$$

Складывая, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\ell^{\beta x}, u_x^2) + \alpha(\ell^{\beta x} u_x^2, u_{xx}^2) + \left(\frac{3}{2}\beta\nu - \alpha\right)(\ell^{\beta x}, u_{xx}^2) +$$
$$+\mu\alpha(\ell^{\beta x}, u_{xx}^4) + \frac{\alpha\beta^2}{2}(\ell^{\beta x}, u_x^2) + \frac{\nu}{2}\ell^{\beta} u_{xx}^2(1,t) +$$
$$+\frac{\nu}{2}u_{xx}^2(0,t) + \frac{\alpha\beta}{4}\ell^{\beta} u_x^4(1,t) + \frac{\nu\beta^2}{2}\ell^{\beta} u_x^2(1,t) = \tag{9}$$
$$= \frac{\alpha\beta^2}{4}(\ell^{\beta x}, u_x^4) + \mu\alpha\beta(\ell^{\beta x} u_x, u_{xx}^3) + \frac{\nu\beta^3}{2}(\ell^{\beta x}, u_x^2) +$$
$$+\frac{\alpha\beta}{2}\ell^{\beta} u_x^2(1,t) - (uu_x, \ell^{\beta x} u_{xx}) - \beta(\ell^{\beta x} u_x^2, u).$$

Для случая $\alpha > 0$ важно очень аккуратно оценить первый член правой части (9). Оценим его двумя шагами:

$$u_x^4 = \left(2\int_0^x \ell^{\frac{\beta x}{2}} u_x u_{xx} \ell^{\frac{-\beta x}{2}} dx\right)^2 \le 4\int_0^x \ell^{-\beta x} dx \int_0^x \ell^{\beta x} u_x^2 u_{xx}^2 dx \le$$

$$\le 4\,\frac{(1 - \ell^{-\beta x})}{\beta}\int_0^x \ell^{\beta x} u_x^2 u_{xx}^2 dx,$$

$$(\ell^{\beta x}, u_x^4) \le \frac{4}{\beta}\int_0^1 (\ell^{\beta x}-1)dx \int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 u_{xx}^2 dx = \tag{10}$$

$$= \frac{4}{\beta}\left(\frac{\ell^{\beta}-1}{\beta}-1\right)\int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 u_{xx}^2 dx.$$

Оценим второй член:

$$\mu\alpha\beta\int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 u_{xx}^3 dx \le \mu\alpha\beta\left(\int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 u_{xx}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 u_{xx}^4 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\mu\alpha\beta}{2}\int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 u_{xx}^2 dx + \frac{\mu\alpha\beta}{2}\int_0^1 u_{xx}^4 dx.$$

Для четвертого члена, очевидно,

$$u_x^2(1,t) = 2\int_0^1 (\ell^{\frac{\beta x}{2}} u_x u_{xx})\ell^{\frac{-\beta x}{2}} dx \le \delta \int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 u_{xx}^2 dx + c(\delta).$$

Число δ здесь и далее будет выбираться достаточно малым.

Последние два члена справа в (9) *в случае* $\alpha > 0$ оценим через второй член слева по неравенству Коши с δ *:*

$$\left|\left(uu_x, \ell^{\beta x} u_{xx}\right)\right| \le \delta(\ell^{\beta x} u_x^2, u_{xx}^2) + c(\delta)(\ell^{\beta x}, u^2),$$

$$u^2 \le \left[\left(\int_x^1 \ell^{-\beta x} dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \le c(\delta)\int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 dx, \tag{11}$$

$$\left|(\ell^{\beta x}, uu_x^2)\right| \le \delta_1 \int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^4 dx + c(\delta_1) \int_0^1 u^2 dx.$$

Используя (10) и (11), подбирая δ_1, получаем оценку последнего слагаемого

$$\left|\left(\ell^{\beta x} u, u_x^2\right)\right| \le \delta(\ell^{\beta x} u_x^2, u_{xx}^2) + c(\delta)(\ell^{\beta x}, u_x^2).$$

В случае $\alpha > 0$ первый, второй и четвертый члены оценивать не надо, а два последних оцениваются другим способом.

Для первого из (11) имеем

$$\left|\left(uu_x, \ell^{\beta x} u_{xx}\right)\right| \le \delta(\ell^{\beta x}, u_{xx}^2) + c(\delta)(\ell^{\beta x} u^2, u_x^2) \le \delta(\ell^{\beta x}, u_{xx}^2)$$

$$+ c(\delta)\max_x u^2 \; (\ell^{\beta x}, u_x^2) \le \delta(\ell^{\beta x}, u_{xx}^2) + c(\delta)c(\beta)\left(\int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 dx\right)^2. \quad (12)$$

Второй оценивается аналогично:

$$\left|\left(\ell^{\beta x} u_x^2, u\right)\right| \le \max_x |u| \left(\int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 dx\right) \le$$

$$\frac{1}{2}(\max_x |u|^2 + 1) \int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 dx \le \frac{1}{2}\left(\frac{1-\ell^{-\beta}}{\beta}\right)\left(\int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 dx\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 dx.$$

Подставим эти оценки в (9). При условиях

$$\frac{3}{2}\beta\nu > \alpha > 0,\ \mu > 0;\ 2 + \beta > \ell^{\beta} + \frac{\mu\beta\lambda}{2},\ \ \beta < 2\lambda \quad (13)$$

для некоторого $\lambda > 0$, каждый член правой части (9) оценивается величиной $c + \int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 dx$ и величиной, стоящей в левой части (9), но с достаточно малым параметром.

Поэтому, выбрав малыми δ и δ_1, используя неравенство Гронуолла [22, 37], ограниченность $u^n(x,0)$ в $W_2^1(0,1)$, получаем при $\alpha > 0$ ограниченность следующих величин для приближенного решения $u^n(x,t)$:

$$\int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 dx + \int_Q (\alpha u_{xx}^2 u_x^2 + \nu u_{xx}^2 + \mu\alpha u_{xx}^4) dQ + \int_0^T \big[\nu u_{xx}^2(1,t) +$$

$$+ \nu u_{xx}^2(0,t) + \alpha u_x^4(1,t) + u_x^2(1,t)\big] dt \le c,\ \alpha > 0, \quad (14)$$

где c не зависит от n.

Из ортонормированности $\{v_i\}$, см. (5) и связи (7), $\varphi_{ix} = v_i$, имеем $\int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 dx = \sum_{i=1}^n (c_i^n(t))^2$. И первое слагаемое в (14) дает $\sum_{i=1}^n (c_i^n(t))^2 \le c$.

Отсюда следует [22] разрешимость системы (8) на любом конечном интервале [0,T] в случае $\alpha > 0$.

В случае $\alpha = 0$, используя неравенство (12), из (9) получаем, что величина $y = \int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 dx = \sum_{i=1}^n (c_i^n(t))^2$ удовлетворяет

(при $\delta < \frac{3}{2}\beta v, v > 0, \beta > 0$) дифференциальному неравенству

$$y' \le (v\beta^3 + 1)y + (c(\delta)+1)\frac{(1-\ell^{-\beta})}{\beta} y^2 \le \bar{c}_1 y + \bar{c}_2 y^2, \text{ т. е.}$$

$$(\ell^{-\bar{c}_1 t} y)' \le \ell^{-\bar{c}_1 t}\bar{c}_2 y^2 = \bar{c}_2 \ell^{\bar{c}_1 t}(\ell^{-\bar{c}_1 t} y)^2, \bar{c}_1 = v\beta^3 + 1, \bar{c}_2 = (c(\delta)+1)\frac{1-\ell^{-\beta}}{\beta}.$$

Решая это неравенство, выводим, что при

$$t < t^* < \frac{1}{\bar{c}_1}\ln\left(1 + \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$$

будет иметь место неравенство

$$y \le \frac{\ell^{\bar{c}_1 t}\sum_{i=1}^n c_i^2}{1 - \frac{\bar{c}_2}{c_1}\sum_{i=1}^n c_i^2(\ell^{\bar{c}_1 t} - 1)} \le M(t^*, n).$$

Однако так как $u_0^n = \sum_{i=1}^n c_i^n \varphi_i \to u_0$ в W_2^1, то

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 \to \sum_{i=1}^\infty c_i^2 = \int_0^1 \ell^{\beta x} u_{0x}^2 dx \text{ при } n \to \infty.$$

Поэтому t^* и $M(t^*, n)$ можно выбрать при достаточно больших n, не зависящими от n. Таким образом,

$$y \le \frac{\ell^{\bar{c}_1 t} \int_0^1 \ell^{\beta x} u_{0x}^2 dx}{1 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1}(\ell^{\bar{c}_1 t} - 1)\int_0^1 \ell^{\beta x} u_{0x}^2 dx} \tag{15}$$

при $t < t^* < \frac{1}{\bar{c}_1} \ln\left(1 + \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2 \int_0^1 \ell^{\beta x} u_{0x}^2 dx}\right)$ и при достаточно больших n.

Заметим, что если выбрать достаточно малой величину $\int_0^1 \ell^{\beta x} u_{0x}^2 dx$, то интервал решения t^* можно выбрать сколь угодно большим. Это следует из оценки t^* в (15).

Таким образом, имеются две возможности: либо по конкретной, но произвольной начальной функции искать интервал [0,t*], зависящий от этой функции, либо, задав интервал [0,T], на котором мы хотим иметь решение, определить ту малость величины $\int_0^1 \ell^{\beta x} u_{0x}^2 dx$ для всего класса начальных функций, которая необходима для выполнения (15).

Из (15) следует, что решение системы (8) при $\alpha = 0$ можно продолжить на [0, t*], где t^* не зависит от n.

На этом интервале из (9) и (15) следует, что равномерно по n:

$$\int_0^1 \ell^{\beta x} u_x^2 dx + v\int_Q \ell^{\beta x} u_{xx}^2 dQ + v\int_0^T \left[u_{xx}^2(1,t) + u_{xx}^2(0,t)\right] dt \le c \tag{16}$$

Из (14) и (16) выводим при любом $\alpha \ge 0$, что

$$|u| = \left|\int_0^1 u_x dx\right| \le \left(\int_0^1 u_x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le c,$$

$$\int_0^1 u_x^2 dx \le c, \int_Q u_{xx}^2 dQ \le c \ , \tag{17}$$

где c не зависит от n и α.

Равномерная оценка величин со вторыми производными приближенного решения получена. В следующей части будут выведены оценки с третьими производными и производными по времени, а также показано, как из них получаются утверждения теорем.

Библиографические ссылки

1. *Яненко Н. Н., Соловьев А. С.* Некоторые модельные уравнения активных волновых систем и их свойства: Препринт. Новосибирск, 1979. № 11.
2. *Яненко Н. Н., Новиков В. А.* Об одной модели жидкости со знакопеременным коэффициентом вязкости // Численные методы механики сплошной среды. 1973. № 2.
3. *Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н.*Нелинейные уравнения переменного типа. М., 1983.
4. *Плотников П. И.* Уравнения с переменным направлением параболичности и эффект гистерезиса // Доклады АН СССР. 1993. № 6.
5. *Плотников П. И.* Предельный переход по вязкости в уравнении с переменным направлением параболичности // Дифференциальные уравнения. 1994. № 4.
6. *Alikakos N., Bates P. W., Fusko G*. Slow motion for the Cahn-Hillard equation in one space dimension//J. Diff. Equat. 1991. V. 90. № 1.
7. *Slemrod M.* Dynamics of measured. valued solutions to a backward-forward heat equation//J. of dynamics and differential equation. 1991. V.3. № 1.
8. *Ogava T.* Traveling wave solutions to a perturbed Kortveg-de Vries equation//Hiroshima Math. J. 24 (1994), 401-422.
9. *Кожанов А. И., Ларькин Н. А., Яненко Н. Н.* Смешанная задача для некоторых классов уравнений третьего порядка: Препринт. Новосибирск, 1980.
10. *Кожанов А. И., Ларькин Н. А., Яненко Н. Н.* Об одной регуляризации уравнений переменного типа // Доклады АН СССР. 1980.
11. *Кожанов А. И., Ларькин Н. А., Яненко Н. Н.* Смешанная задача для одного класса уравнений третьего порядка // Сибирский матем. журнал. 1981. № 6.
12. *Кожанов А. И.* О регуляризации одного уравнения переменного типа // Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики. Новосибирск, 1983.
13. *Новиков В. А.* Теоремы существования и несуществования для одного класса уравнений переменного типа // Доклады АН СССР. 1980. № 6.
14. *Ахмеров Р. Р.* Об одной начальной задаче для дифференциального уравнения второго порядка со знакопеременным коэффициентом

при старшей производной // Численные методы механики сплошной среды. 1984.
15. *Хаблов В. В.* О некоторых корректных постановках граничных задач для уравнения Кортвега-де Вриза. Новосибирск, 1979.
16. *Бубнов Б. А.* Разрешимость в целом нелинейных граничных задач для уравнения Кортвега-де Вриза в ограниченной области // Дифференциальные уравнения. 1980. № 1.
17. *Бубнов Б. А.* Краевая задача для уравнения Кортвега-де Вриза-Бюргерса // Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979.
18. *Гасенко В. Г., Накоряков В. Е., Шрайбер И. Р.* Усиление ударной волны в жидкости с пузырьками газа // Доклады АН СССР.1980. № 6.
19. *Подгаев А. Г.* О новой краевой задаче для уравнения Кортвега-де Вриза // Тезисы докладов. Кемерово, 1983.
20. *Подгаев А. Г.* О краевой задаче для уравнения Кортвега-де Вриза-Бюргерса со знакопеременным коэффициентом вязкости // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 1986.
21. *Подгаев А. Г.* О регулярных решениях в краевой задаче для уравнения Кортвега-де Вриза-Бюргерса со знакопеременным коэффициентом вязкости. Владивосток, 2003.
22. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1979.