УДК 519.85

О ТОЧНОЙ ОЦЕНКЕ ОТНОШЕНИЯ ДВУХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ВЫПУКЛОМ МНОЖЕСТВЕ

Прудников В. Я. – канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Высшая математика» (ТОГУ)

В работе доказывается, что точная нижняя грань отношения вогнутого и выпуклого функционалов достигается на крайних точках выпуклого множества рефлексивного банахова пространства. Приведен критерий принадлежности данного элемента к множеству крайних точек.

The work proves that greatest lower bound of the division concave and protuberant functionals is attained on the extreme points of the protuberant set of the reflexive Banah space. The criterion of belonging the element to the extreme point set is given in the work.

В задачах линейного программирования существенную роль играют крайние точки выпуклого множества, а именно: в крайних точках линейная целевая функция достигает своих наименьшего и наибольшего значений.

Целью данной работы является исследование вопроса о достижимости точной нижней грани отношения двух функционалов на крайних точках выпуклого множества K линейного нормированного пространства X.

Для вещественных функционалов p_1, p_2 введем обозначение

$$i_{1,2}(K) = \inf_{u \in K} \frac{p_1(u)}{p_2(u)}.$$

Для произвольного множества $\Phi \subset \mathrm{X}$ используем принятое в выпуклом анализе [1] обозначение выпуклой оболочки — $conv\Phi$. $B(\varphi, \varepsilon) \equiv \left\{ u \in \mathrm{X} : \left\| u - \varphi \right\| < \varepsilon \right\}$ - шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке φ.

1. О крайних точках выпуклого множества линейного нормированного пространства

Теорема 1. Для того чтобы точка φ являлась крайней точкой выпуклого множества K, необходимо и достаточно существование конечного выпуклого функционала p на $B(\varphi,\varepsilon)\cap K$ такого, что для любого $u\in B(\varphi,\varepsilon)\cap K$:

1) $p\neq const$ в интервалах (φ,u);

2) $\sup\limits_{0\le t\le 1} p(\varphi+t(u-\varphi))=p(\varphi)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть φ - крайняя точка множества K. Тогда φ является крайней точкой выпуклого множества $B(\varphi,1)\cap K$.

Рассмотрим на $B(\varphi,1)\cap K$ функционал

$$p(u)=\begin{cases}\|u-\varphi\|, & \text{если } u\neq\varphi;\\ 1, & \text{если } u=\varphi.\end{cases}$$

Очевидно, что p – конечный выпуклый функционал. Для любого $u\in B(\varphi,1)\cap K$ при $t\in(0,1)$

$$p(\varphi+t(u-\varphi))=t\|u-\varphi\|\neq const,$$

$$\sup_{0\le t\le 1} p(\varphi+t(u-\varphi))=1=p(\varphi).$$

Достаточность. Предположим, что при выполнении условий теоремы элемент φ не есть крайняя точка множества K. Это означает, что φ принадлежит внутренности некоторого отрезка $[u,v]\subset B(\varphi,\varepsilon)\cap K$, а потому существует $t_0\in$ (0,1) такое, что $\varphi=u+t_0(v-u)$.

По условию теоремы p есть выпуклый конечный функционал в $B(\varphi,\varepsilon)\cap K$, поэтому функция $t\to p(u+t(v-u))$ выпукла на [0,1]. Согласно 2)

$$\sup_{0\le t\le 1} p(\varphi+t(u-\varphi))=p(\varphi)=\sup_{0\le t\le 1} p(\varphi+t(v-\varphi)).$$

Это значит, что не равная тождественно константе выпуклая функция $t\to p(u+t(v-u))$ достигает наибольшего значения во внутренней точке $t_0\in$ (0,1), что невозможно.

Следствие 1. Пусть p - выпуклый конечный функционал на выпуклом множестве K такой, что $\sup\limits_{K} p = p(\varphi)$, $\varphi \in K$ и $p \neq const$ на интервалах $(\varphi, u) \subseteq K$. Тогда φ – крайняя точка множества K.

В следующем следствии нам необходимо понятие слабой полунепрерывности сверху [2].

Следствие 2. Пусть K - замкнутое ограниченное выпуклое множество рефлексивного банахова пространства X.

Конечный функционал p слабо полунепрерывен сверху и строго выпуклый на K. Тогда множество

$$\Phi = \left\{ \varphi \in K : p(\varphi) = \sup_{K} p \right\}$$

не пусто и входит во множество крайних точек множества K.

Доказательство. Функционал p слабо полунепрерывен сверху на K, поэтому множество Φ не пусто [2].

Пусть $\varphi \in \Phi$. Тогда на интервалах (φ, u) для любого $u \in K$ $p \neq const$, так как в противном случае это противоречит строгой выпуклости p. *А* так как

$$\sup_{0 \le t \le 1} p(\varphi + t(u - \varphi)) = p(\varphi)$$

для всех $u \in K$, то по теореме 1 φ есть крайняя точка множества K.

Из доказательства этого следствия имеем следующее следствие к теореме 1.

Следствие 3. Пусть K - выпуклое множество линейного нормированного пространства X, p - строго выпуклый конечный функционал на $K, \varphi \in K$.

Если $\sup\limits_{K} p = p(\varphi)$, то φ есть крайняя точка множества K.

Аналогично доказательству следствия 2 доказывается следствие 4.

Следствие 4. Пусть K - выпуклый компакт линейного нормированного пространства X. Функционал p конечный, полунепрерывный сверху и строго выпуклый. Тогда множество $\left\{ \varphi \in K : p(\varphi) = \sup\limits_{K} p \right\}$ не пусто и входит во множество крайних точек множества K.

В следующей теореме приведены необходимые и достаточные условия того, что данный элемент не есть крайняя точка.

Теорема 2. Для того чтобы элемент $u \in K$ не являлся крайней точкой выпуклого множества K, необходимо и достаточно существование числа $\alpha > 0$ и элемента $\varphi \in K, \varphi \neq u$ и таких, что $(1+\alpha)u - \alpha\varphi \in K$.

Доказательство. Необходимость. Пусть элементы φ, v из K таковы, что элемент $u \in (\varphi, v)$. Тогда существует $t \in (0,1)$ такое, что $u = \varphi + t(v - \varphi)$. Откуда $v = \frac{1}{t}u - (\frac{1}{t} - 1)\varphi$. Обозначив $\frac{1}{t} - 1 = \alpha$, получим: $v = (1+\alpha)u - \alpha\varphi$ из K.

Достаточность. Рассмотрим отрезок $[(1+\alpha)u - \alpha\varphi, \varphi]$, принадлежащий множеству K.Все точки данного отрезка представимы в виде: $v(t) = \varphi + t((1+\alpha)u - \alpha\varphi - \varphi) = \varphi + t(1+\alpha)(u - \varphi)$. Следовательно, $v(\frac{1}{1+\alpha}) = u$, то есть элемент u не крайняя точка выпуклого множества K.

Пример 1. Пусть X = $C[0,1]$- пространство функций на отрезке [0,1] с нормой $\|u\| = \max\limits_{0 \le x \le 1} |u(x)|$. Выпуклое множество $K = \left\{ u \in C[0,1] : u \ge 0, \text{вогнуты}, \ u(\frac{1}{2}) = 1 \right\}$.

Функции $2x$, $2(1-x)$, $2\min(x, 1-x)$ являются крайними точками множества K.

Доказательство. Для любой функции u из K и для всех точек x, y из [0,1] справедливо неравенство

$$u(\frac{x+y}{2}) \ge \frac{1}{2}(u(x) + u(y)).$$

В частности, если $x + y = 1$, то отсюда получим неравенство

$$2 \ge u(x) + u(y). \quad (1)$$

Следовательно, для всех $x \in [0,1]$ $u(x) \le 2$, а потому $\|u\| \le 2$. Очевидно, что для функций $2x$, $2(1-x)$ $\|u\|=2$. Покажем, что не существует больше функций из K, для которых $\|u\|=2$.

Пусть $u \in K$ и $\|u\|=2$. Предположим, что в интервале (0,1) существует точка x_0, где $u(x_0) = 2$. Тогда из (1) получим $u(1 - x_0) \le 0$, а потому $u(1-x_0)=0$, что невозможно, так как для вогнутых функций (не констант) справедлив строгий принцип минимума. Следовательно, либо $u(1)=2$, либо $u(0)=2$. Рассмотрим случай $u(1)=2$, так как случай $u(0)=2$ рассматривается аналогично.

Для всех x, y, t из [0,1] имеем неравенство
$$u(xt+y(1-t))\geq tu(x)+(1-t)u(y).$$
Положим здесь $x=1, y=0$, тогда
$$u(t)\geq 2t+(1-t)u(0)\geq 2t,\ \ t\in[0,1].$$
Функция $u(t)-2t$ вогнутая, а так как $u(0)-2\cdot 0\geq 0,\ u(1)-2\cdot 1\geq 0,\ u(\frac{1}{2})-2\cdot\frac{1}{2}=0$, то это возможно, если $u(t)=2t$.

Функционал $p(u)=\|u\|$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 относительно функций $2x$, $2(1-x)$, а потому $2x$, $2(1-x)$ - крайние точки множества K.

Для любой функции $u\in K$ справедливо неравенство
$$u(x)\geq\varphi(x),\ \ x\in[0,1],$$
где $\varphi(x)=2\min(x,1-x)$.

В самом деле, если $0\leq x\leq\frac{1}{2}$, то $u(x)-\varphi(x)=u(x)-2x$ - вогнутая функция, поэтому, согласно принципу минимума, $u(x)\geq\varphi(x),\ \ x\in[0,\frac{1}{2}]$. Аналогично: $u(x)\geq\varphi(x),\ \ x\in[\frac{1}{2},1]$.

Рассмотрим на множестве K функционал
$$p(u)=\int_0^1(\varphi(x)-u(x))dx.$$
Он выпуклый и удовлетворяет условиям:
$$\sup_{u\in K}p(u)=0=p(\varphi),$$
$$p(\varphi+t(u-\varphi))=t\int_0^1(\varphi(x)-u(x))dx\neq const$$
при $t\in(0,1)$ для любого $u\in K,\ u\neq\varphi$.

Согласно теореме1 функция $\varphi(x)$ есть крайняя точка множества K.

Пример 2. $K_0 = \left\{ u \in C[0,1] : u \geq 0, \text{ вогнуты}, \ u(\frac{1}{2}) = 1, u(0) + u(1) > 0 \right\}$.

Выпуклое множество K_0 имеет единственные крайние точки $2x$, $2(1-x)$.

Доказательство. В предыдущем примере доказано, что функции $\varphi_1(x) = 2x, \varphi_2(x) = 2(1-x)$ есть крайние точки множества K, а потому эти функции есть крайние точки и множества K_0, так как φ_1, φ_2 входят в K_0.

Докажем, что любая другая функция u из K_0 не есть крайняя точка.

Рассмотрим функцию

$$v(x) = (1 + \frac{\alpha}{2})u(x) - \frac{\alpha}{2}(t_1\varphi_1(x) + t_2\varphi_2(x)),$$

где $\alpha = u(0) + u(1), t_1 = \dfrac{u(1)}{\alpha}, t_2 = \dfrac{u(0)}{\alpha}$. Очевидно, что v - вогнутая функция. А так как $v(0) = \dfrac{\alpha}{2}u(0) \geq 0, v(1) = \dfrac{\alpha}{2}u(1) \geq 0, v(\frac{1}{2}) = 1$, то $v(x) \geq 0, v(0) + v(1) > 0$, поэтому v входит в K_0. По теореме 2 u не есть крайняя точка множества K_0.

2. О точной нижней грани отношения вогнутого и выпуклого функционалов на выпуклом множестве

Лемма 1. Для положительных чисел $a_k, b_k (k = 1,...,n)$

$$\inf\left\{ \frac{\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n}{\alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n} : \alpha_k \geq 0, \alpha_1 + ... + \alpha_n > 0 \right\} = \inf_{1 \leq k \leq n} \frac{a_k}{b_k}.$$

Доказательство. Пусть, например, $\inf\limits_{1 \leq k \leq n} \dfrac{a_k}{b_k} = \dfrac{a_1}{b_1}$. Тогда

$$\inf\left\{ \frac{\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n}{\alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n} : \alpha_k \geq 0, \alpha_1 + ... + \alpha_n > 0 \right\} \leq \frac{1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + ... + 0 \cdot a_n}{1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + ... + 0 \cdot b_n} = \frac{a_1}{b_1}.$$

С другой стороны, из следующих преобразований следует обратное неравенство:

$$\frac{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n}{\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{a_k}{a_1}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{b_k}{b_1}} =$$

$$= \frac{a_1}{b_1} \frac{\alpha_1 + (\alpha_2 \frac{a_2}{a_1} + \ldots + \alpha_n \frac{a_n}{a_1})}{\alpha_1 + (\alpha_2 \frac{b_2}{b_1} + \ldots + \alpha_n \frac{b_n}{b_1})} =$$

$$= \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{\alpha_1 + (\alpha_2 \frac{b_2}{b_1} + \ldots + \alpha_n \frac{b_n}{b_1}) + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k (\frac{a_k}{a_1} - \frac{b_k}{b_1})}{\alpha_1 + (\alpha_2 \frac{b_2}{b_1} + \ldots + \alpha_n \frac{b_n}{b_1})} =$$

$$= \frac{a_1}{b_1} (1 + \frac{\sum_{k=2}^{n} \alpha_k \frac{b_k}{b_1} (\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_1}{b_1})}{\alpha_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \frac{b_k}{b_1}}) \geq \frac{a_1}{b_1}.$$

Лемма 2. Пусть Φ - непустое множество линейного нормированного пространства X. Конечные на $conv\Phi$ неотрицательные функционалы p_1, p_2 соответственно вогнутый и выпуклый. Тогда $i_{12}(conv\Phi) = i_{12}(\Phi)$.

Доказательство. Для произвольного элемента $u \in conv\Phi$ существуют числа $\alpha_k \geq 0, \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$ и элементы $\varphi_k \in \Phi$ такие, что $u = \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n$. Поэтому, используя вогнутость p_1 и выпуклость p_2, из неравенства

$$\frac{p_1(u)}{p_2(u)} \geq \frac{\alpha_1 p_1(\varphi_1) + \ldots + \alpha_n p_1(\varphi_n)}{\alpha_1 p_2(\varphi_1) + \ldots + \alpha_n p_2(\varphi_n)},$$

согласно лемме 1, получим

$$\frac{p_1(u)}{p_2(u)} \geq \inf_{1 \leq k \leq n} \frac{p_1(\varphi_k)}{p_2(\varphi_k)}.$$

Но тогда

$$\frac{p_1(u)}{p_2(u)} \geq i_{12}(\Phi) \geq i_{12}(conv\Phi),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Пусть компактное выпуклое множество $K \subset X, \Phi$ - множество крайних точек K.

Если p_1, p_2 конечные неотрицательные на K функционалы соответственно полунепрерывный сверху вогнутый и полунепрерывный снизу выпуклый, то

$$i_{12}(K) = i_{12}(\Phi).$$

Доказательство. Согласно Лемме 2, для любых $u \in conv\Phi$ справедливо неравенство

$$p_1(u) \geq i_{12}(\Phi) p_2(u).$$

По теореме Крейна-Мильмана [1] $\overline{conv\Phi} = K$, поэтому для любой последовательности $\{u_m\} \subset K$, сходящейся по норме к элементу $u \in K$, получим неравенства

$$p_1(u) \geq \overline{\lim_{m\to\infty}} p_1(u_m) \geq \underline{\lim_{m\to\infty}} p_1(u_m) \geq i_{12}(\Phi) \underline{\lim_{m\to\infty}} p_2(u_m) \geq i_{12}(\Phi) p_2(u).$$

Таким образом, $i_{12}(K) = i_{12}(\Phi)$.

Теорема 4. Пусть на замкнутом ограниченном выпуклом множестве K рефлексивного банахова пространства X заданы конечные неотрицательные функционалы p_1, p_2.

Если p_1 слабо полунепрерывный снизу вогнутый, а p_2 - слабо полунепрерывный сверху строго выпуклый функционал, то существует крайняя точка φ множества K такая, что

$$i_{12}(K) = \frac{p_1(\varphi)}{p_2(\varphi)}.$$

Доказательство. Очевидно, что $0 \leq i_{12}(K) \leq \infty$. Рассмотрим строго выпуклый функционал

$$p(u) = i_{12}(K) p_2(u) - p_1(u).$$

Так как p слабо полунепрерывен сверху на K, то существует элемент $\varphi \in K$ такой, что $\sup\limits_K p = p(\varphi)$ [3]. Согласно следствию 3, к теореме 2

φ есть крайняя точка множества K.

Итак,

$$p_1(u) - i_{12}(K)p_2(u) \geq p_1(\varphi) - i_{12}(K)p_2(\varphi),\ \ u \in K .$$

Из слабой полунепрерывности сверху функционала p_2 на K следует его ограниченность, поэтому из неравенства

$$(\sup_K p_2)(\frac{p_1(u)}{p_2(u)} - i_{12}(K)) \geq p_1(\varphi) - i_{12}(K)p_2(\varphi) \geq 0$$

следует равенство $i_{12}(K) = i_{12}(\varphi)$.

В следующей теореме будем предполагать существование на множестве K конечного строго выпуклого неотрицательного слабо полунепрерывного сверху функционала p.

Теорема 5. Пусть на замкнутом ограниченном выпуклом множестве K рефлексивного банахова пространства X заданы конечные неотрицательные функционалы p_1, p_2.

Если p_1 слабо полунепрерывный снизу вогнутый, а p_2 - слабо полунепрерывный сверху выпуклый функционалы, то

$$i_{12}(K) = i_{12}(\Phi),$$

где Φ - множество крайних точек множества K.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Рассмотрим функционалы $p_1 + \varepsilon, p_2 + \varepsilon^2 p$. Первый функционал вогнутый, а второй строго выпуклый, поэтому по теореме 4 существует крайняя точка φ множества K такая, что для всех u из K

$$\frac{p_1(u) + \varepsilon}{p_2(u) + \varepsilon^2 p(u)} \geq \frac{p_1(\varphi) + \varepsilon}{p_2(\varphi) + \varepsilon^2 p(\varphi)}.$$

Согласно лемме 1 и тому, что $\sup_K p < \infty$, получим неравенства

$$\frac{p_1(u) + \varepsilon}{p_2(u) + \varepsilon^2 p(u)} \geq \min(\frac{p_1(\varphi)}{p_2(\varphi)}, \frac{1}{\varepsilon p(\varphi)}) \geq \min(i_{12}(\Phi), \frac{1}{\varepsilon \sup_K p}).$$

Вследствие произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда приходим к неравенству

$$\frac{p_1(u)}{p_2(u)} \geq i_{12}(\Phi),\ \ u \in K,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6. Пусть K - выпуклое множество линейного нормированного пространства X; α_0, C - положительные абсолютные константы. Множество $\Phi \subset K$. Неотрицательные конечные функционалы p_1, p_2 соответственно вогнутый и выпуклый.

Если для любого элемента $u \in K \setminus conv\Phi$ существует число $\alpha \geq \alpha_0$ и элемент $\varphi \in conv\Phi$ такие, что 1) $(1+\alpha)u - \alpha\varphi \in K$; 2) $p_2(u) \leq Cp_2(\varphi)$, то $i_{12}(K) = i_{12}(\Phi)$.

Замечание 1. Согласно теореме 2, из условия 1) следует, что все элементы $u \in K \setminus conv\Phi$ не являются крайними точками множества K.

Доказательство. В силу условия 1) элемент $(1+\alpha)u - \alpha\varphi$ принадлежит K, поэтому

$$p_1((1+\alpha)u - \alpha\varphi) \geq i_{12}(K)p_2((1+\alpha)u - \alpha\varphi). \tag{2}$$

Из выпуклости p_2 следует неравенство

$$p_2(u) = p_2(\frac{(1+\alpha)u - \alpha\varphi + \alpha\varphi}{1+\alpha}) = p_2(\frac{1}{1+\alpha}[(1+\alpha)u - \alpha\varphi] + \frac{\alpha}{1+\alpha}\varphi) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1+\alpha}p_2((1+\alpha)u - \alpha\varphi) + \frac{\alpha}{1+\alpha}p_2(\varphi),$$

откуда

$$p_2((1+\alpha)u - \alpha\varphi) \geq (1+\alpha)p_2(u) - \alpha p_2(\varphi). \tag{3}$$

Аналогично для вогнутого функционала p_1:

$$p_1((1+\alpha)u - \alpha\varphi) \leq (1+\alpha)p_1(u) - \alpha p_1(\varphi). \tag{4}$$

Следовательно, учитывая (3), (4), из (2) получим неравенство

$$(1+\alpha)(p_1(u) - i_{12}(K)p_2(u)) \geq \alpha(p_1(\varphi) - i_{12}(K)p_2(\varphi)).$$

Но тогда для всех $u \in K \setminus conv\Phi$

$$C\frac{1+\alpha_0}{\alpha_0}(\frac{p_1(u)}{p_2(u)} - i_{12}(K)) \geq \frac{p_1(\varphi)}{p_2(u)} - i_{12}(K),$$

а потому, согласно лемме 2,

$$C\frac{1+\alpha_0}{\alpha_0}(\frac{p_1(u)}{p_2(u)} - i_{12}(K)) \geq i_{12}(conv\Phi) - i_{12}(K) = i_{12}(\Phi) - i_{12}(K).$$

Ясно, что всегда можно считать, что $C \cdot \dfrac{1+\alpha_0}{\alpha_0} \geq 1$, поэтому полученное неравенство справедливо и для всех $u \in conv\Phi$. Итак, для любых элементов $u \in K$

$$c\frac{1+\alpha_0}{\alpha_0}\left(\frac{p_1(u)}{p_2(u)} - i_{12}(K)\right) \geq i_{12}(\Phi) - i_{12}(K) \geq 0,$$

откуда и получим равенство $i_{12}(K) = i_{12}(\Phi)$.

Следствие. Пусть K - выпуклое множество линейного нормированного пространства X; α_0, c - положительные абсолютные константы. Множество $\Phi \subset K$. Неотрицательные конечные функционалы p_1, p_2 соответственно полунепрерывный сверху вогнутый и полунепрерывный снизу выпуклый на $\overline{K}$.

Если для любого $u \in K \setminus conv\Phi$ существует число $\alpha \geq \alpha_0$ и элемент $\varphi \in conv\Phi$ такие, что 1) $(1+\alpha)u - \alpha\varphi \in \overline{K}$; 2) $p_2(u) \leq cp_2(\varphi)$, то $i_{12}(\overline{K}) = i_{12}(\Phi)$.

Доказательство. Согласно теореме 6, для всех $u \in K$

$$p_1(u) \geq i_{12}(\Phi)p_2(u).$$

Пусть элемент $u \in \overline{K}$, тогда существует последовательность $\{u_n\} \subset K$, сходящаяся по норме к u, а потому

$$p_1(u) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, p_1(u_n) \geq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, p_1(u_n) \geq i_{12}(\Phi) \underline{\lim_{n\to\infty}}\, p_2(u_n) \geq i_{12}(\Phi)p_2(u),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 2. Если последовательность $\{u_n\} \subset K$ такова, что $i_{12}(K) = \lim\limits_{n\to\infty} i_{12}(u_n)$, то условия теоремы 6 достаточно проверить только на элементах этой последовательности.

Пример 3. Пусть $\mathrm{X} = C[0,1]$.

$$K_0 = \left\{ u \in C[0,1] : u \geq 0, \text{ вогнуты}, u(\frac{1}{2}) = 1, u(0) + u(1) > 0 \right\}.$$

Конечные на K_0 неотрицательные функционалы p_1, p_2 соответственно вогнутый и выпуклый,

$$m = \inf\{p_2(u) : u \in conv(\varphi_1\varphi_2)\} > 0,$$

где функции $\varphi_1(x) = 2x, \varphi_2(x) = 2(1-x)$.

Если существует функция $u_0 \in K_0$ такая, что $i_{12}(K_0) = i_{12}(u_0)$, то

$$i_{12}(K_0) = \min(i_{12}(\varphi_1), i_{12}(\varphi_2)).$$

Доказательство. Множество K_0 - это множество из примера 2, где отмечено, что функция

$$v(x) = (1+\frac{\alpha}{2})u_0(x) - \frac{\alpha}{2}(t_1\varphi_1(x) + t_2\varphi_2(x)),$$

$\alpha = u_0(0) + u_0(1),\ t_1 = \dfrac{u_0(1)}{\alpha},\ t_2 = \dfrac{u_0(0)}{\alpha}$ входит в K_0. А так как

$$p_2(u_0) \le Cp_2(t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2),\ C = \frac{p_2(u_0)}{m},\ \alpha_0 = \alpha,$$

то по теореме 6

$$i_{12}(K_0) = \min(\frac{p_1(\varphi_1)}{p_2(\varphi_1)}; \frac{p_1(\varphi_2)}{p_2(\varphi_2)}).$$

3. Заключение

Результаты данной работы имеют непосредственное отношение не только к выпуклому анализу, но и к уже известным в математике фактам, например, к обратному неравенству Гельдера. На основе обратного неравенства Гельдера в работе Геринга [4] доказана теорема, имеющая многочисленные применения в теории весовых пространств, квазиконформных отображений, дифференциальных уравнений с частными производными. В связи с этим отметим также работу [5].

Библиографические ссылки

1. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М., 1975.

2. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М., 1988.

3. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М., 1981.

4. *Gehring F. W.* The L^p- integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping. Acta Math. 1973. V. 130.

5. *Кореновский А. А.* О точном продолжении обратного неравенства Гельдера и условия Макенхаупта // Математические заметки. 1992. Т. 52. Вып. 6.