



УДК 519.635.6

© С. О. Романский, П. Б. Суляндзига, 2007

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

Романский С. О. – ас. кафедры «Прикладная математика» (ДВГУПС);
Суляндзига П. Б. – канд. физ.- мат. наук, ст. науч. сотр. ВЦДВО РАН

Изучается один из методов решения системы дифференциальных уравнений термодинамики атмосферы для краткосрочного прогноза мезомасштабных процессов. Построена конечно-разностная схема для решения системы уравнений. Приведены результаты численных расчетов по модели.

One of the methods of solving the system of atmosphere thermodynamics differential equations for the short-term forecast of mesoscale processes is investigated. The finite-difference scheme for solving the equations system is worked out. Numerical simulation data are submitted.

Постановка задачи

Вследствие небольших масштабов мезопроцессов нет необходимости использовать систему координат, учитывающую кривизну Земли. Запишем следующую математическую модель динамики атмосферных процессов в прямоугольной системе координат [1]:

1) уравнения движения:

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z = -p_x \cdot \rho^{-1} + lu + v(u_{xx} + u_{yy}) + v'u_{zz},$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z = -p_z \cdot \rho^{-1} - g + v(w_{xx} + w_{yy}) + v'w_{zz},$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z = -p_y \cdot \rho^{-1} - lu + v(v_{xx} + v_{yy}) + v'v_{zz},$$

где t – время, $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ – соответственно компоненты скорости ветра вдоль осей x , y , z ; $\rho(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$ – плотность и давление воздуха; $l = 2\Omega \sin \varphi_0 = \text{const}$ – сила Кориолиса, где $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ – угловая скорость вращения Земли, φ_0 – широта точки сетки; $v(x, y, z, t)$, $v'(x, y, z, t)$ – горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентности.



2) Уравнение неразрывности:

$$u_x + v_y + w_z + \rho_t \cdot p^{-1} = 0.$$

3) Уравнение притока тепла:

$$\theta_t + u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z = L\Phi \cdot c_p^{-1} + Q_r + v(\theta_{xx} + \theta_{yy}) + v'\theta_{zz},$$

где $\theta(x, y, z, t)$ – потенциальная температура; $L = 24,995 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$ – скрытая теплота конденсации; $\Phi(x, y, z, t)$ – скорость образования жидкой фазы; $c_p = 1,007 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{кг}}$ – теплоемкость воздуха при постоянном давлении.

4) Уравнение для парообразной влаги:

$$q_t + uq_x + vq_y + wq_z = -\Phi + v(q_{xx} + q_{yy}) + v'q_{zz},$$

где $q(x, y, z, t)$ – влажность воздуха.

5) Уравнение для каплеобразной влаги, взвешенной в воздухе:

$$\left(\frac{m}{\rho}\right)_t + u\left(\frac{m}{\rho}\right)_x + v\left(\frac{m}{\rho}\right)_y + w\left(\frac{m}{\rho}\right)_z = \Phi + v\left(\left(\frac{m}{\rho}\right)_{xx} + \left(\frac{m}{\rho}\right)_{yy}\right) + v'\left(\frac{m}{\rho}\right)_{zz},$$

где $m(x, y, z, t)$ – водность воздуха.

6) Уравнение состояния Клапейрона:

$$p = \rho R \tau,$$

где $\tau(x, y, z, t)$ – температура; $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная.

7) Уравнение для потенциальной температуры:

$$\theta = \tau(1000 \cdot p^{-1})^{0,2858}.$$

Предметом поиска являются вектор скорости ветра $\bar{\Psi} = (u, v, w)$; поле температуры τ , влажности q , давления p .

Для решения системы (1) – (7) необходимо провести ее упрощение. Для этого введем понятие о невозмущенных полях. Это такие поля, которые имели бы место при отсутствии возмущающих факторов (рельефа, неоднородности подстилающей поверхности). Будем обозначать такие поля большими буквами, а возмущения маленькими со штрихами, например для компоненты скорости ветра $u = U + u'$. Естественно отождествлять невозмущенные поля с крупномасштабной циркуляцией атмосферы на данной территории.

Для задачи (1) – (7) сформулируем следующие начальные и граничные условия:

а) в области счета Γ известны значения компоненты скорости ветра U, V , температуры T , давления P .



б) На подстилающей поверхности примем условие прилипания:
 $u|_{z=0} = v|_{z=0} = \varpi|_{z=0} = 0, \tau|_{z=0} = f(x, y, t),$ при $z = 0$.

в) На боковых границах вследствие локальности процесса примем:
 $u = U, v = V, \omega = 0, \tau = T$ при $(x, y, z) \in \partial\Gamma$.

г) В качестве начальных данных примем значения компонент скорости
 $u|_{t=0} = u_0(x, y, z), v|_{t=0} = v_0(x, y, z), \tau|_{t=0} = \tau_0(x, y, z).$

Для расчета значений неизвестных величин упростим систему (1) – (7) так, как это сделано в [2]. При выводе новой системы сделаны следующие допущения: в уравнении неразрывности (2) отброшен малый член $(\ln \rho)_t$, имеющий порядок 10^{-8} [3]; из уравнения движения (1) для компоненты скорости ω исчезли в явном виде ускорение свободного падения и статическая часть вертикального градиента давления, слагаемые на 2 порядка меньше остальных членов уравнения, вместо них был введен член описывающий действие силы Архимеда.

Таким образом, система (1) – (7) преобразована к виду (8):

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + \varpi u_z &= -\eta_x RT + lv + v(u_{xx} + u_{yy}) + v'u_{zz}, \\ v_t + uv_x + vv_y + \varpi v_z &= -\eta_y RT - lu + v(v_{xx} + v_{yy}) + v'v_{zz}, \\ \varpi_t + u\varpi_x + v\varpi_y + \varpi\varpi_z &= -\eta_z RT - g \cdot \xi^{-1} + v(\varpi_{xx} + \varpi_{yy}) + v'\varpi_{zz}, \\ (\eta - \xi)_t + u(\eta - \xi)_x + v(\eta - \xi)_y + \omega(\eta - \xi)_z + u_x + v_y + \varpi_z &= 0, \\ (\xi - \chi\eta)_t + u(\xi - \chi\eta)_x + v(\xi - \chi\eta)_y + \varpi(\xi - \chi\eta)_z &= Q_r + \\ &+ v((\xi - \chi\eta)_{xx} + (\xi - \chi\eta)_{yy}) + v'(\xi - \chi\eta)_{zz}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\eta = p' \cdot P^{-1}, \xi = \tau' \cdot T^{-1}, \chi = \gamma_a R \cdot g^{-1} = \text{const}, \gamma_a$ – сухоадиабатический градиент.

Метод решения

Решение задачи (8) будет искомая в 3 этапа на интервале времени (t_j, t_{j+1}) на сетке $\Gamma = \{0 \leq n\Delta x \leq L_x\} \times \{0 \leq m\Delta y \leq L_y\} \times \{0 \leq l\Delta z \leq H\}$ и пусть $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – шаги соответственно по осям x, y, z , а Δt – шаг по времени. Решение будет искомая в классе непрерывных функций.

На первом этапе будем решать задачу переноса метеорологических субстанций вдоль траектории частиц воздуха, все уравнения этого этапа можно представить в виде

$$\psi_t^{(j+\frac{1}{3})} + u^j \psi_x^{(j+\frac{1}{3})} + v^j \psi_y^{(j+\frac{1}{3})} + \varpi^j \psi_z^{(j+\frac{1}{3})} = 0,$$

где ψ – некая субстанция: $u, v, \omega, (\eta - \xi), (\xi - \chi\eta)$.

На втором этапе решается задача адаптации полей ветра, давления и температуры:

$$\begin{aligned} u_t^{(j+\frac{2}{3})} - lv^{(j+\frac{1}{3})} &= -RT\eta_x^{(j+\frac{1}{3})}, \quad v_t^{(j+\frac{2}{3})} + lu^{(j+\frac{1}{3})} = -RT\eta_y^{(j+\frac{1}{3})}, \\ \omega_t^{(j+\frac{2}{3})} - g\xi^{(j+\frac{1}{3})} &= -RT\eta_z^{(j+\frac{1}{3})}, \\ (\eta - \xi)_t^{(j+\frac{2}{3})} + u_x^{(j+\frac{2}{3})} + v_y^{(j+\frac{2}{3})} + \varpi_z^{(j+\frac{2}{3})} &= 0, \\ (\xi - \chi\eta)_t^{(j+\frac{2}{3})} + \frac{\gamma_a - T_z}{T} \omega^{(j+\frac{2}{3})} &= Q'_r \end{aligned}$$

На последнем этапе решается задача о турбулентном обмене, как и на первом этапе уравнения, кроме 4-го, представим в виде

$$\psi_t^{(j+1)} = v(\psi_{xx}^{(j+1)} + \psi_{yy}^{(j+1)}) + v'\psi_{zz}^{(j+1)},$$

а 4-е уравнение представим в виде

$$(\eta - \xi)_t^{(j+1)} = 0.$$

Рассмотрим каждый из этапов в отдельности.

1 этап: перенос субстанции по траекториям частиц воздуха на интервале $(t_j, t_{j+1/3})$. Сначала на интервале $(t_j, t_{j+1/6})$ решаются задачи:

$$\begin{aligned} \psi^{j+\frac{1}{18}} &= \psi^j - \frac{\Delta t}{18} \cdot A_n \psi^{j+\frac{2}{18}}, \quad \psi^{j+\frac{2}{18}} = \psi^{j+\frac{1}{18}} - \frac{\Delta t}{18} A_m \psi^{j+\frac{2}{18}}, \\ \psi^{j+\frac{3}{18}} &= \psi^{j+\frac{2}{18}} - \frac{\Delta t}{18} A_l \psi^{j+\frac{3}{18}}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$A_\lambda \psi^{j+\frac{1}{18}} = \varphi_\lambda \begin{cases} \psi_\lambda^{j+\frac{1}{18}} - \psi_{\lambda-1}^{j+\frac{1}{18}}, & \text{при } \varphi_\lambda > 0, \\ \psi_{\lambda+1}^{j+\frac{1}{18}} - \psi_\lambda^{j+\frac{1}{18}}, & \text{при } \varphi_\lambda < 0, \end{cases} \quad \text{где } \lambda = n, m, l,$$

$$\text{где } \varphi_n = \frac{u_n}{\Delta x}, \varphi_m = \frac{v_m}{\Delta y}, \varphi_l = \frac{\varpi_l}{\Delta z}.$$

Теперь уравнения (9) можно записать в трехточечной форме:

$$\begin{aligned} (|\varphi_n| + \varphi_n) \psi_{n-1}^{j+\frac{1}{18}} - 2(1 + |\varphi_n|) \psi_n^{j+\frac{1}{18}} + (|\varphi_n| - \varphi_n) \psi_{n+1}^{j+\frac{1}{18}} &= -2\psi_n^j, \\ (|\varphi_m| + \varphi_m) \psi_{m-1}^{j+\frac{2}{18}} - 2(1 + |\varphi_m|) \psi_m^{j+\frac{2}{18}} + (|\varphi_m| - \varphi_m) \psi_{m+1}^{j+\frac{2}{18}} &= -2\psi_m^{j+\frac{1}{18}}, \quad (10) \\ (|\varphi_l| + \varphi_l) \psi_{l-1}^{j+\frac{3}{18}} - 2(1 + |\varphi_l|) \psi_l^{j+\frac{3}{18}} + (|\varphi_l| - \varphi_l) \psi_{l+1}^{j+\frac{3}{18}} &= -2\psi_l^{j+\frac{2}{18}}. \end{aligned}$$

Решение уравнений (10) ищется с помощью метода прогонки.

Теперь необходимо сделать корректировку и разрешить уравнение



$$\psi^{j+\frac{1}{3}} = \psi^{j+\frac{1}{6}} + \frac{\Delta t}{6} \left[\frac{\psi_{n+1}^{j+\frac{1}{6}} - 2\psi_n^{j+\frac{1}{6}} + \psi_{n-1}^{j+\frac{1}{6}}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{m+1}^{j+\frac{1}{6}} - 2\psi_m^{j+\frac{1}{6}} + \psi_{m-1}^{j+\frac{1}{6}}}{\Delta y^2} + \frac{\psi_{l+1}^{j+\frac{1}{6}} - 2\psi_l^{j+\frac{1}{6}} + \psi_{l-1}^{j+\frac{1}{6}}}{\Delta z^2} \right].$$

На границах области вместо центральных разностей применяем правые или левые разностные соотношения.

2 этап: адаптация полей метеозлементов на интервале $(t_{j+1/3}, t_{j+2/3})$. Построим разностную схему первого порядка точности, получим:

$$\begin{aligned} \frac{u^{(j+\frac{2}{3})} - u^{(j+\frac{1}{3})}}{\Delta t/3} - l u^{(j+\frac{1}{3})} &= -RT^j \frac{\eta_{n+1}^{(j+\frac{1}{3})} - 2\eta_n^{(j+\frac{1}{3})} + \eta_{n-1}^{(j+\frac{1}{3})}}{\Delta x^2}, \\ \frac{v^{(j+\frac{2}{3})} - v^{(j+\frac{1}{3})}}{\Delta t/3} + l u^{(j+\frac{1}{3})} &= -RT^j \frac{\eta_{m+1}^{(j+\frac{1}{3})} - 2\eta_m^{(j+\frac{1}{3})} + \eta_{m-1}^{(j+\frac{1}{3})}}{\Delta y^2}, \\ \frac{w^{(j+\frac{2}{3})} - w^{(j+\frac{1}{3})}}{\Delta t/3} - g_\zeta^{(j+\frac{1}{3})} &= -RT^j \frac{\eta_{l+1}^{(j+\frac{1}{3})} - 2\eta_l^{(j+\frac{1}{3})} + \eta_{l-1}^{(j+\frac{1}{3})}}{\Delta z^2}, \\ \frac{(\xi - \chi\eta)^{(j+\frac{2}{3})} - (\xi - \chi\eta)^{(j+\frac{1}{3})}}{\Delta t/3} + \frac{\gamma_a - \frac{T_l^j - T_{l-1}^j}{\Delta z}}{T^j} w^{(j+\frac{2}{3})} &= Q'_r, \\ \frac{(\eta - \xi)^{(j+\frac{2}{3})} - (\eta - \xi)^{(j+\frac{1}{3})}}{\Delta t/3} + \frac{u_{n+1}^{(j+\frac{1}{3})} - 2u_n^{(j+\frac{1}{3})} + u_{n-1}^{(j+\frac{1}{3})}}{\Delta x^2} + \frac{v_{m+1}^{(j+\frac{1}{3})} - 2v_m^{(j+\frac{1}{3})} + v_{m-1}^{(j+\frac{1}{3})}}{\Delta y^2} + \\ + \frac{\varpi_{l+1}^{(j+\frac{1}{3})} - 2\varpi_l^{(j+\frac{1}{3})} + \varpi_{l-1}^{(j+\frac{1}{3})}}{\Delta z^2} &= 0. \end{aligned}$$

3 этап: турбулентный обмен на интервале $(t_{j+2/3}, t_{j+1})$. Для уравнения (11) разностная схема запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\psi^{(j+1)} - \psi^{(j+\frac{2}{3})}}{\Delta t} &= \nu \left[\frac{\psi_{n-1}^{(j+\frac{2}{3})} - 2\psi_n^{(j+\frac{2}{3})} + \psi_{n+1}^{(j+\frac{2}{3})}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{m-1}^{(j+\frac{2}{3})} - 2\psi_m^{(j+\frac{2}{3})} + \psi_{m+1}^{(j+\frac{2}{3})}}{\Delta y^2} \right] + \\ + \nu' \frac{\psi_{l-1}^{(j+\frac{2}{3})} - 2\psi_l^{(j+\frac{2}{3})} + \psi_{l+1}^{(j+\frac{2}{3})}}{\Delta z^2}. \end{aligned}$$

В качестве начальных и граничных данных был взят прогноз региональной гидродинамической модели с шагом в 20 км. Далее он был квадратично интерполирован в сетку с шагом в 5 км.

По данной методике написана программа на языке FORTRAN, которая производит расчет полей скоростей u, v, ϖ , давления p , температуры T , возмущений давления p' и температуры T' .

Программа расчета запускалась со следующими параметрами: шаг по плоскости XOY : 5 000 м; шаг по высоте: 200 м; шаг по времени: 60 с. Размер области интегрирования: 200 х 200 х 3 км; длительность прогноза: 6 ч.

Результаты

В качестве результатов можно представить поля температуры на высоте 200 м на рис. 1–4.

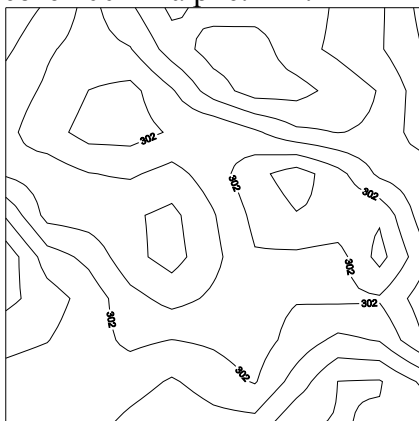


Рис. 1. Начальные данные

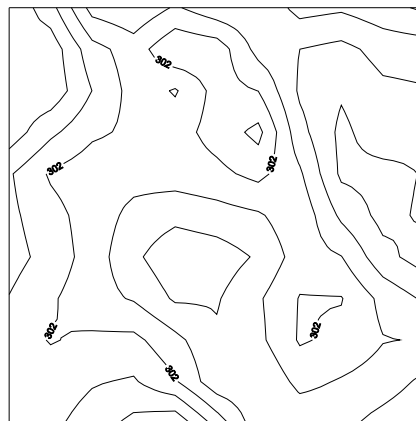


Рис. 2. Расчет, $t = 2$ ч

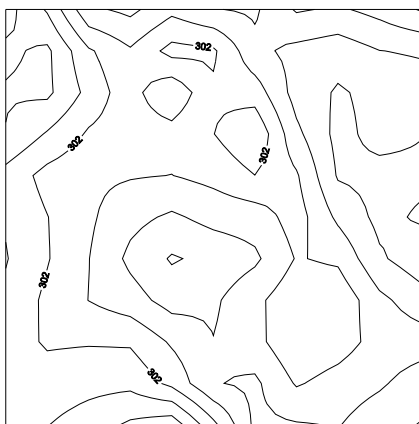


Рис. 3. Расчет, $t = 4$ ч

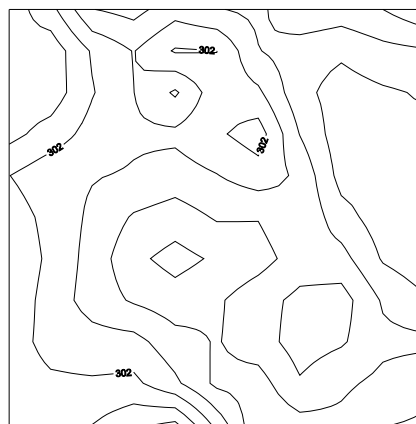


Рис. 4. Расчет, $t = 6$ ч

Библиографические ссылки

1. Гутман Л. Н. Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. Л., 1969.
2. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Л., 1987.
3. Динамическая метеорология. / Д. Л. Лайхтман, Ф. А. Гисина, И. И. Мельникова, Э. Г. Палагин. Л., 1976.