ВЕСТНИК ТОГУ. 2007. № 4 (7)

УДК 536.25

ТЕПЛООБМЕН В СБОРКЕ ИЗ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Соловьев С. В. – д-р. физ.-мат. наук, проф. кафедры «Прикладная математика и информатика» (ТОГУ)

С использованием метода R – функций рассчитано поле температуры в сборках с тепловыделяющими элементами различной геометрии. Предложены методика и алгоритм расчета. Для температуры рассматривались граничные условия 1 и 3-го типов. Выписаны нормализованные уравнения участков границы сборок, которые задавались в виде окружности и прямоугольника.

The temperature field in the assemblies with heat releasing elements of different geometry is calculated by R-function method. The technique and algorithm of calculation are proposed. For temperature the boundary conditions of 1 and 3 types were considered. The normalized equations of the assembly border sites which were set in the form of a circle and in the form of a rectangular are pointed out.

Задача обеспечения нормального теплового режима конструкционных элементов (сборок) с тепловыделяющими элементами (ТВЭЛами) является одной из основных при проектировании. Тепловой режим устройства с источником тепла считается нормальным, если температура каждого из его узлов в условиях эксплуатации не превышает допустимых (максимальных) значений и при этом обеспечивается с заданной надежностью работа каждого узла. Для оценки максимальной температуры при эксплуатации ТВЭЛов достаточно знать их тепловые потери и значение температуры на внешней поверхности. Для расчета этих параметров разработан алгоритм решения стационарной задачи теплопроводности с внутренними источниками тепла в сборках с тепловыделяющими элементами различной конфигурации: прямоугольной (круглой) области, имеющей один или несколько прямоугольных (круглых) ТВЭЛов. На поверхностях ТВЭЛов могут задаваться как граничные условия I рода (в общем случае различные значения температуры на поверхности каждого ТВЭЛа), так и III рода (внутри ТВЭЛов течет жидкость с температурой $T_ж$. Теплообмен между жидкостью и внутренней поверхностью ТВЭЛов происходит по закону Ньютона-Рихмана с коэффициентом теплообмена $\alpha_ж$). Пространство между внешними границами ТВЭЛов и внутренней границей расчетной области заполнено материалом (коэффициент теплопроводности которого λ) с равномерно распределенными по объему внутренними источниками теплоты постоянной мощности q_v. Внешняя граница расчетной области всей сборки омывается жидкостью с температурой T_c, а ее теплообмен с окружающей средой происходит по закону Ньютона-Рихмана с коэффициентом теплообмена α_c.

Задача решалась методом R-функций [1]. В качестве иллюстрации применения метода R-функций для решения поставленной задачи приведен пример, для которого разработан и построен алгоритм расчета. Рассмотрим конструктивный элемент сборки ТВЭЛов в виде окружности радиуса R_3 (граница расчетной области всей сборки), внутри которой расположены два круглых ТВЭЛа с радиусами R_1 и R_2 (рис. 1).

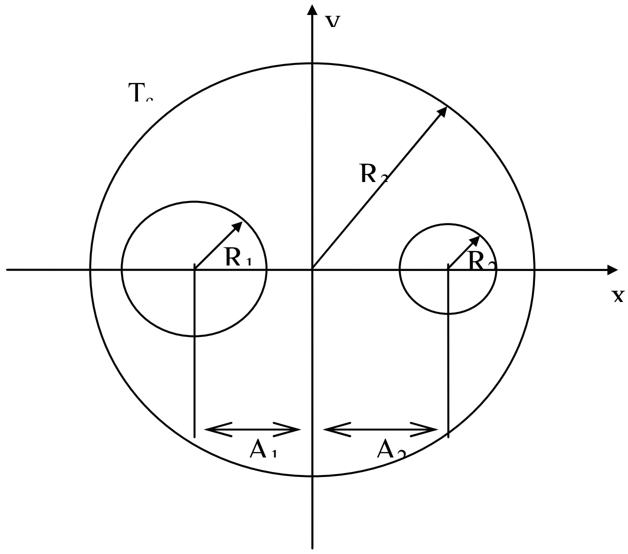


Рис. 1. Геометрия сборки ТВЭЛов: Γ_1, Γ_2 - окружности с радиусами R_1 и R_2; Γ_3 - окружность радиуса R_3

Математическая постановка стационарной задачи теплопроводности с равномерно распределенными внутренними источниками (стоками) тепла в сборке имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0.$$

Граничные условия:

$$\text{на } \Gamma_1 \quad T = T_1; \quad \text{на } \Gamma_2 \quad T = T_2;$$

$$\text{на } \Gamma_3 \quad -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right| = \alpha_c (T| - T_c).$$

Здесь n – внутренняя нормаль.

Для решения задачи методом R-функций были составлены нормализованные уравнения всех трех окружностей:

$$\hat{w}_1(x, y) = -\frac{R_1^2 - (x + A_1)^2 - y^2}{2R_1},$$

$$\hat{w}_2(x, y) = -\frac{R_2^2 - (x - A_2)^2 - y^2}{2R_2},$$

$$\hat{w}_3(x, y) = -\frac{R_3^2 - x^2 - y^2}{2R_3}.$$

Исходные граничные условия были с помощью R - функций преобразованы в следующие:

$$T|_{D1} = \varphi, \qquad \left.\left(\frac{\partial T}{\partial \nu} + hT\right)\right|_{D2} = \psi,$$

где D1 - граница, которая задается формулой

$$w_1(x, y) = \hat{w}_1(x, y) \cap \hat{w}_2(x, y) = \hat{w}_1 + \hat{w}_2 - \sqrt{\hat{w}_1^2 + \hat{w}_2^2} = 0,$$

а D2 задается формулой

$$w_2(x, y) = \hat{w}_3(x, y) = 0,$$

функция

$$\varphi = \frac{\hat{w}_1 T_2 + \hat{w}_2 T_1}{\hat{w}_1 + \hat{w}_2}$$

задает совокупность граничных условий на внутренних окружностях, а постоянные

$$\psi = \frac{\alpha_c T_c}{\lambda}, \quad h = \frac{\alpha_c}{\lambda}$$

задают граничное условие на внешней окружности.

Таким образом, получена задача со смешанными граничными условиями 1 и 3-го родов. Зная структуру решения для обоих родов граничных условий и объединяя их, получаем структуру решения для задачи со смешанными условиями

$$u = \frac{1}{w_1 + w_2^2}(w_1 w_2^2 \Phi_1 + w_2^2 \varphi + w_1(\Phi_2 - w_2 D_1^{(w2)} \Phi_2 - h\Phi_2 w_2 + \psi w_2)).$$

Здесь $D_1^{(w2)}$ – дифференциальный оператор, Φ_1 и Φ_2 в совокупности образуют неопределенную компоненту Ф. Представляем Φ_1 и Φ_2 в виде рядов

$$\Phi_1(x,y) = \sum_{i,j} B_{ij} T_{ij}(x,y), \quad \Phi_2(x,y) = \sum_{i,j} C_{ij} T_{ij}(x,y),$$

где B_{ij} и C_{ij} – неизвестные постоянные, $T_{ij}(x,y) = P_j(\frac{x}{R_3}) P_i(\frac{y}{R_3})$,

где $P_k(x)$ – полиномы Чебышева, которые масштабируются так, чтобы их аргументы изменялись от -1 до 1.

Подставив эти ряды в структуру решения и сгруппировав получившееся выражение относительно неизвестных постоянных a_i, получим выражение для **u**:

$$u = \sum_{i=1}^{2N} a_i \chi_i(x,y) + \chi_o(x,y), \qquad \chi_0(x,y) = \frac{\varphi w_2^2 + \psi w_1 w_2}{w_1 + w_2^2},$$

$$\chi_i(x,y) = \begin{cases} \dfrac{T_i w_1 w_2^2}{w_1 + w_2^2}, i < N \\ \dfrac{(T_{i-N} w_1 - w_1 w_2 (\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial T_{i-N}}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial T_{i-N}}{\partial y} - hT_{i-N}))}{w_1 + w_2^2}, N \le i < 2N \end{cases}$$

где 2 N – общее число неизвестных. Далее первую часть функции $\chi_i(x,y)$ будем обозначать $\chi_i^1(x,y)$, а вторую – $\chi_i^2(x,y)$.

Избавимся от функции $\chi_o(x,y)$, перейдя к задаче с однородными граничными условиями

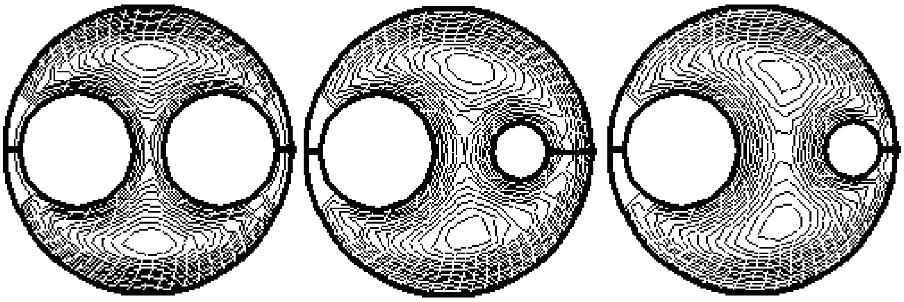
$$\Delta u = \frac{q_V}{\lambda} - \Delta\chi_o(x,y), \quad u\big|_{D1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu\right)\Big|_{D2} = 0.$$

Минимизируя функционал по методу Ритца, получаем систему 2N линейных алгебраических уравнений с 2N неизвестными:

$$\sum_{i=1}^{2N}\left(\int_\Omega \Delta\chi_i \chi_k \partial\Omega\right) a_i = \int_\Omega \chi_k \left(\frac{q_V}{\lambda} - \Delta\chi_o(x,y)\right)\partial\Omega, \qquad \text{где } k = 1,...,2N.$$

Интегралы по области находились численно, при этом расчетная область триангулировалась фронтальным методом.

На рис. 2 приведены результаты расчета для сборки, представленной на рис. 1.



1 2 3

Рис. 2. Изолинии температуры: 1 - $A_1 = A_2 = 2{,}5$; $R_2 = 2$; 2 - $A_1 = 2{,}5$; $A_2 = 3{,}0$; $R_2 = 1$; 3 - $A_1 = 2{,}5$; $A_2 = 3{,}5$; $R_2 = 1$

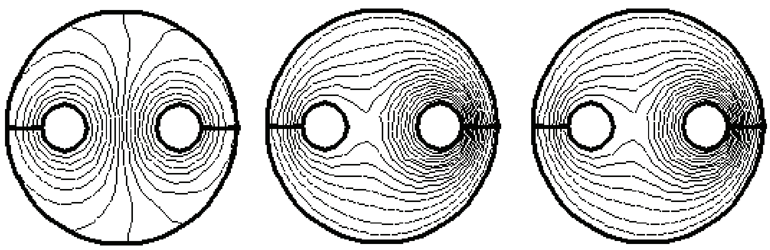
Параметры расчетов в этом варианте были следующие:

$q_v = 1$; $\alpha_c = 10$; $\lambda = 0{,}1$; $T_1 = 1$; $T_2 = 2$; $T_c = 0$; $R_1 = 2$; $R3 = 5$.

Геометрия рассматриваемой области, а также расчетное поле температуры, приведенные на рис. 2-1, симметрично относительно вертикальной оси, что говорит о достоверности полученных результатов и применяемой методике.

На рис. 3 приведены результаты расчетов для аналогичного, рассмотренного выше, варианта сборки, но с другой геометрией ТВЭЛов. Параметры расчетов в этом варианте были следующие:

$q_v = 0$; $\lambda = 0{,}1$; $T_1 = 1$; $T_2 = 2$; $T_3 = 0$; $R_1 = R_2 = 1$; $R_3 = 5$; $A_1 = A_2 = 2{,}5$.



1 2 3

Рис. 3. Изолинии температуры: 1 - $\alpha_c = 0$; 2 - $\alpha_c = 10$; 3 - $\alpha_c = 100$

Сравнивая результаты рис. 3-2 и 3-3, можно отметить, что поля температуры качественно практически не различаются, хотя значения коэффициентов теплообмена отличаются на порядок.

На рис. 4 приведены результаты расчета температурного поля при отсутствии внутренних источников тепла, а значения остальных пара-

метров были такие же, как и для результата, приведенного на рис. 2-2. На рис. 5, 6 приведены изолинии температуры (в силу симметрии показаны половины областей) для различных вариантов сборок и при граничных условиях III рода: для результатов расчетов, приведенных на рис. 5: $T_{ж1} = 1; T_{ж2} = 2; \alpha_{ж1} = \alpha_{ж2} = 0,1; q_v = 0; \lambda = 0,1$;
для результатов расчетов, приведенных на рис. 6: $T_{ж1} = 2; \alpha_{ж1} = 100; \alpha_{ж2} = 0; q_v = 1; \lambda = 0,1$.

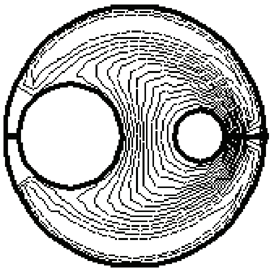


Рис. 4

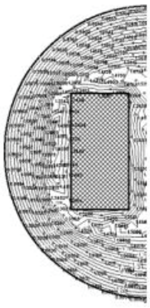


Рис. 5

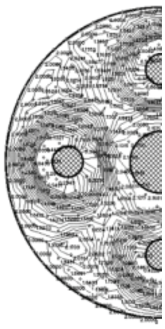


Рис. 6

На рис. 7 - 9 приведены результаты расчетов температурного поля. Значения температур на границах ТВЭЛов и внешней оболочке сборки, а также геометрических параметров были такие же, как и для результатов, приведенных на рис. 2-2. Значения коэффициента теплопроводности материала заполнителя сборки (λ=1) были также одинаковыми. Отличие состояло лишь в разных значениях мощности внутренних источников тепла и коэффициента теплообмена α_c: так, для результатов рис. 7 q_v= 1; α_c=0; для результатов рис. 8 q_v= 0; α_c= 0; для результатов рис. 9 q_v= 0. α_c=100.

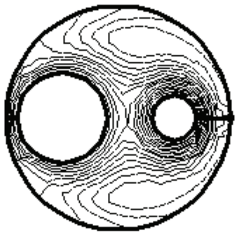


Рис. 7

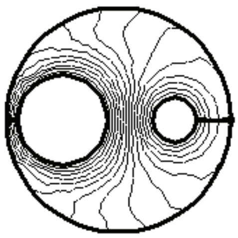


Рис. 8

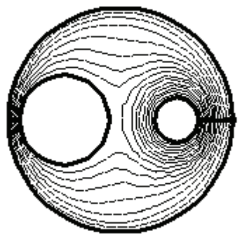


Рис. 9

На рис. 10 - 12 приведены результаты расчетов температурного поля для сборки ТВЭЛов с радиусами R_1=R_2=1; R_3= 5. Значения температур на границах ТВЭЛов и внешней оболочке сборки были такими же, как и для результатов, приведенных на рис. 2. Значения коэффициентов теплопроводности материала заполнителя сборки λ =1, теплообмена α_c =10, мощности тепловыделений q_v = 1, местоположения центра первого ТВЭла A_1= 1 были также одинаковыми. Отличие состояло в разных вариантах расположения второго ТВЭЛа. Для результатов рис. 10 - A_2 = 2; для результатов рис. 11 -A_2 = 3; для результатов рис. 12 - A_2 = 3,5.

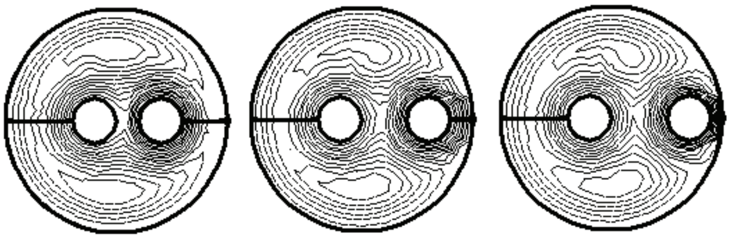
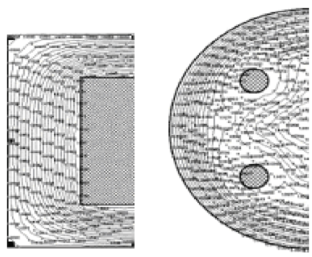


Рис. 10 *Рис. 11* *Рис. 12*

Поля температуры для других вариантов сборок показаны на рис. 13.



1 2

Рис. 13. Изолинии температуры:

1 - $T_c = 1;\ T_ж = 2;\ \alpha_ж = \alpha_c = 100;\ q_v = 0;\ \lambda = 0{,}1;$

2 - $T_c = 0;\ T_ж = 1;\ \alpha_ж = 0{,}1;\ \alpha_c = 100;\ q_v = 1;\ \lambda = 0{,}1$

Для других вариантов расположения ТВЭЛов в сборке нормализованные уравнения $w_1(x, y)$ и $w_2(x, y)$ для границ Γ_1 и Γ_2 приведены в таблице.

Таким образом, предложенные методика и алгоритм позволяют рассчитывать тепловое поле в сборке из ТВЭлов со сложной геометрией их расположения.

Нормализованные уравнения участков границы

Участок границы	В виде окружности	В виде прямоугольника
Граница Γ_1	Окружность радиуса R_1 с центром в начале координат $w_1(x, y) = \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2R_1}$	Прямоугольник с центром в начале координат и размерами $-RX_1 \le x \le RX, -RY_1 \le y \le RY$ $w_1(x, y) = \left(\frac{RX_1^2 - x^2}{2RX_1}\right) \cap \left(\frac{RY_1^2 - y^2}{2RY_1}\right)$
Участок границы Γ_2, Номер i-го ТВЭЛа	Окружность радиуса r_i с центром в точке (x_i, y_i) $w_{2i} = -\frac{r_i^2 - (x - x_i)^2 - (y - y_i)^2}{2r_i}$	Прямоугольник с центром в точке (x_i, y_i) и размерами $(x - rx_i) \le x \le (x + rx_i)$ $(y - ry_i) \le y \le (y + ry_i)$ $w_{2i}(x, y) = -\left(\frac{rx_1^2 - (x - x_i)^2}{2rx_1}\right) \cap \left(\frac{ry_1^2 - (y - y_i)^2}{2ry_1}\right)$
Граница Γ_2	Совокупность всех участков границы Γ_2 $w_{2i}(x, y) = \cap(w_{2i}(x, y))$	

Библиографические ссылки

1. *Рвачев В. Л.* Теория R - функций и некоторые ее приложения. Киев, 1982.