



УДК 519.63

© А. А. Федосеев, 2007

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ УРОВНЯ ВРЕДНЫХ ВЕЩЕСТВ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

Федосеев А. А. – канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (ТОГУ)

В настоящее время проблемы экологии приобрели особую актуальность. Это обусловлено изменениями климата, вызванных парниковым эффектом, ростом числа онкологических заболеваний. Поэтому необходимо иметь эффективный механизм прогнозирования вредных последствий выброса промышленных предприятий и автотранспорта. Большим вкладом в решение данного вопроса является разработка алгоритма расчёта концентраций вредных веществ и его реализация в виде комплекса программных средств.

Now problems of ecology have got a special urgency. It is caused by the climate fluctuations, caused by greenhouse effect, growth of number of oncological diseases. Therefore it is necessary to have the effective mechanism of forecasting harmful consequences of emission of the industrial enterprises and motor transport. A great contribution to the solution of the problem is development of algorithm calculating the concentration of harmful substances and its realization as software.

Введение

Ежемесячно в атмосферу Земли поступает большое количество токсичных веществ, в том числе около 700 млн тонн оксида углерода, 150 млн тонн оксида азота, 200 млн тонн твердых частиц. Значительная часть этих веществ выбрасывается автотранспортом. Наряду с широко признанными отрицательными сторонами загрязнения атмосферы вредными веществами, из отработавших газов надвигается новая проблема – парниковый эффект.

В связи с обострившейся экологической обстановкой становится актуальной проблема прогнозирования уровня загрязнения атмосферы вредными примесями. Данная проблема сводится к расчету распространения примесей в приземном слое атмосферы. Сложность пробле-

мы заключается в том, что невозможно аналитически решить уравнения переноса импульса, тепла и массы. В механике сплошных сред процессы, протекающие в приземном слое атмосферы, довольно сложно описать. Эта сложность связана со следующими факторами. Во-первых, газодинамические процессы носят турбулентный характер. Из многообразия моделей следует, что ни одна из них не обладает универсальностью. Во-вторых, при взаимодействии потока с поверхностью возникают сложные процессы взаимодействия. В-третьих, нельзя пренебрегать такими атмосферными явлениями, как температурная стратификация и свободная конвекция.

В данной статье делается попытка осуществить математическую постановку задачи, учитывающую указанные выше факторы. Выбор делается на $\kappa - \varepsilon$ модель турбулентности. Выбор обусловлен тем, что при помощи данной модели производились расчеты различных задач турбулентности и получены относительно хорошие результаты.

2. Основные уравнения

Осредненные газодинамические параметры задачи (поле скоростей $\bar{u}_i$, $i = \overline{1, 3}$, давления $\bar{P}$) описываются уравнением неразрывности [1]:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

и тремя уравнениями переноса импульса:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \bar{u}_j \frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial x_j} = & - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \\ & + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial x_i} + \rho g_i \end{aligned} \quad i = \overline{1, 3} \quad (2)$$

где $\mu = \nu \cdot \rho$ - динамическая молекулярная вязкость.

Для моделирования характеристик турбулентности использовалась двухпараметрическая диссипативная модель турбулентности, известная как модель $\kappa - \varepsilon$. Моделируемые характеристики: κ - кинетическая энергия турбулентных пульсаций; ε - скорость диссипации кинетической энергии турбулентности; μ_t - динамическая турбулентная вязкость. Характеристики описываются следующими уравнениями [2] - переноса кинетической энергии турбулентных пульсаций:



$$\sum_{j=1}^3 \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} +$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon \quad (3)$$

– переноса скорости диссипации кинетической энергии турбулентных пульсаций:

$$\sum_{j=1}^3 \rho \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} +$$

$$C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4)$$

и соотношением Колмогорова–Прандтля:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (5)$$

Последние два уравнения при малых турбулентных числах Рейнольдса ($Re_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon}$) записываются в виде

$$\sum_{j=1}^3 \rho \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} +$$

$$C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \quad (6)$$

$$C_{\varepsilon 2} \rho f_{\varepsilon 1} (Re_t) \frac{\varepsilon}{k} + \nu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)$$

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} f_{\mu 1} (Re_t), \quad (7)$$

где $\hat{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \sum_{j=1}^3 \left[\partial \sqrt{k} / \partial x_j \right]^2$, а зависимости $f_{\varepsilon 1}(\text{Re}_t)$ и $f_{\mu 1}(\text{Re}_t)$ определяются формулами:

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon 1}(\text{Re}_t) &= \exp \left(-\frac{b_3}{1+b_4 \text{Re}_t} \right); \\ f_{\mu 1}(\text{Re}_t) &= 1 - a_3 \exp \left(-\text{Re}_t^2 \right); \end{aligned} \quad (8)$$

Значения коэффициентов являются эмпирическими и в данной модели равны следующим константам:

$$C_{\mu} = 0,09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92, \quad \sigma_K = 1,0, \quad \sigma_{\varepsilon} = 1,3, \quad b_3 = 2,5, \\ b_4 = 0,02, \quad a_3 = 0,3.$$

Расчетная область представлена на рис. 1.

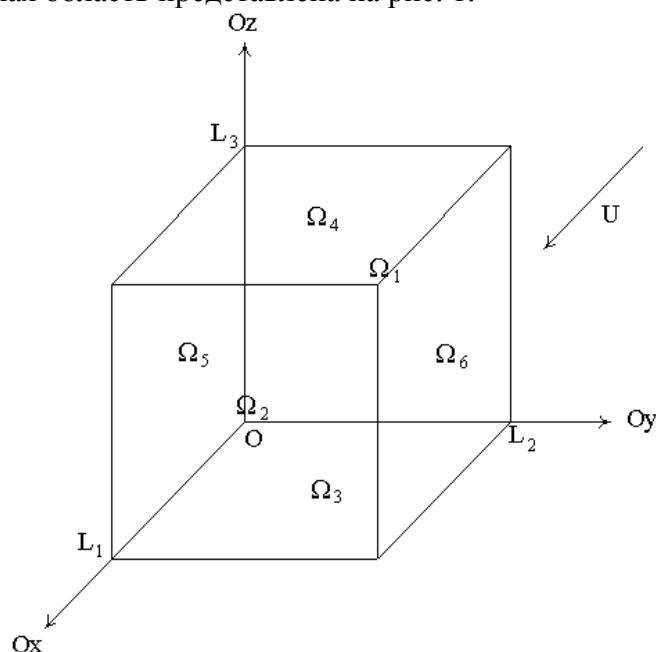


Рис. 1. Расчётная область

Перенос тепла определяется следующим уравнением:

$$\sum_{j=1}^3 \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}, \quad (9)$$



где Pr – число Прандтля (для воздуха при 20 °С равно 0,7); Pr_t – турбулентное число Прандтля (по экспериментальным данным в пристеночных слоях приблизительно равно 0,9 [3]).

Перенос массы определяется следующим уравнением:

$$\sum_{j=1}^3 \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial x_j}, \quad (10)$$

где C_A – концентрация вещества, Sc – число Шмидта, Sc_t – турбулентное число Шмидта.

В случае твердых частиц следует использовать другое уравнение:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{C}_B \bar{u}_j}{\partial x_j} - V_T \frac{\partial \bar{C}_B}{\partial x_3} = 0, \quad (11)$$

где C_B – концентрация вещества, V_T – скорость оседания частицы, определяемая формулой

$$V_T = \frac{\rho_d d^2 g}{18\mu}, \quad (12)$$

где g – ускорение свободного падения; ρ_d – плотность вещества; d – диаметр частицы; μ – динамическая молекулярная вязкость среды, в которой движется частица. Формула (11) выведена в предположении, что ось Ox_3 – перпендикулярна поверхности земли. Положительным считается направление, совпадающее с ростом высоты.

3. Граничные условия

Граничные условия ставятся на гранях Ω_i расчетной области, показанной на рис. 1. Рассмотрим условия на конкретных гранях более подробно.

3.1. Грань Ω_l

При рассмотрении граничных условий на этой грани

примем следующие обозначения: $u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}$, где $u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2}$ – динамическая скорость, $z^+ = \frac{u_\tau z_3}{\nu}$. Значение скорости U_l на данной грани

определяется некоторой зависимостью $f_l(x_3)$. Конкретный вид зависи-

мости определяется выбранной моделью пограничного атмосферного слоя. В феноменологических моделях пограничный слой делится на четыре подслоя:

1. Вязкий подслой ($0 \leq z^+ \leq 5$). Данный подслой характеризуется преобладанием сил вязкости. Зависимость безразмерной скорости от z^+ имеет вид:

$$u^+ = z^+. \quad (13)$$

2. Буферный подслой ($5 \leq z^+ \leq 30$). Данный подслой характеризуется одинаковым порядком молекулярной вязкости и турбулентной. Зависимость безразмерной скорости от z^+ имеет вид:

$$u^+ = 5 \ln(z^+) + 3,05. \quad (14)$$

3. Логарифмический подслой ($30 \leq z^+ \leq 400$). Данный подслой характеризуется преобладанием сил турбулентности с сохранением влияния поверхности. Зависимость безразмерной скорости от z^+ имеет вид:

$$u^+ = \chi^{-1} \ln(Ez^+), \quad (15)$$

где $\chi = 0,4 \dots 0,41$ - постоянная Кармана; $E = 8,8 \dots 9,0$ - постоянная, зависящая от шероховатости стенки.

4. Внешний подслой пограничного слоя $400 \leq z^+$. Сильное влияние здесь оказывает турбулентность набегающего потока; профиль скорости здесь также определяется из характеристик набегающего потока.

Второй вариант зависимости скорости можно получить из теории пограничных атмосферных слоев. Наиболее распространенной моделью является степенная зависимость:

$$u = u^* \left(\frac{x_3}{z^*} \right)^n, \quad (16)$$

где n – безразмерный параметр, z^* – некоторая фиксированная высота, u^* – значение скорости на контрольной высоте. Обычно принимают $n \approx 0,15$, $z^* = 1\text{м}$.

Поперечная скорость U_2 на порядок меньше U_1 . Поэтому для U_2 можно использовать соотношение:

$$u_2 = 0. \quad (17)$$



Вертикальная скорость U_3 определяется свободной конвекцией и может быть одного порядка с U_1 . В общем случае U_3 зависит от градиента температуры $\frac{\partial T}{\partial x_3}$:

$$w = f_2 \left(\frac{\partial T(x_3)}{\partial x_3} \right). \quad (18)$$

Основным требованием к функции f_2 является обращение её в нуль при $x_3=0$. Концентрации веществ C_i , характеристики турбулентности k и ε , температура T являются характеристиками набегающего потока и определяются соответствующими функциями от x_2 и x_3 .

3.2. Грань Ω_2

Для данной грани, согласно практике [4], наиболее подходящим условием является так называемое “мягкое” условие:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \quad (19)$$

где Φ – вычисляемая переменная. Для постановки данного условия необходимо достаточно большое значение L_1 .

3.3. Грань Ω_3

Данная грань заслуживает особого рассмотрения, так как именно здесь происходит взаимодействие набегающего потока с поверхностью. Граничные условия для скорости U_1 и характеристик турбулентности ставятся при помощи преобразованного уравнения Фолкнер–Скэн. В общем виде уравнение введено для описания пограничного слоя, общий вид которого показан на рис. 2.

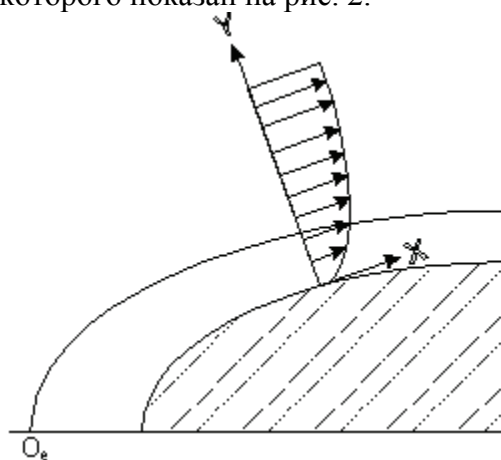


Рис. 2. Пограничный слой

Уравнение Фолкнер–Скэн имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \frac{v_t}{v} \right) f'' \right] + f f'' + \beta (1 - f'^2) = 0, \quad (20)$$

$$\text{где } \eta = \frac{u_e y}{\sqrt{2\nu s}}; \quad s = \int u_e dx; \quad \beta = \left(\frac{2s}{u_e} \right) \left(\frac{du_e}{ds} \right).$$

Неизвестным параметром здесь является v_t . Данный параметр определяется из соотношения:

$$\frac{v_t}{v} = b\eta. \quad (21)$$

После подстановки (21) в (20) получаем

$$(1 + b\eta) f''' + (b + f) f'' + \beta (1 - f'^2) = 0, \quad (22)$$

где b определяется по формуле

$$b = \chi_2 \left(\frac{2\beta_1 \text{Re}_t}{3} \right)^{1/2}, \quad (23)$$

где $\chi_2 = 0,17 \dots 0,19$; параметры β_1 и β определяются по формулам:

$$\beta_1 = k_e (p_{oe} - p_e)^{-1} \int_0^x 2 (p_{oe} - p_e)^{1/2} dx, \quad (24)$$

$$\beta = - \left(\frac{dp_e}{dx} \right) (p_{oe} - p_e)^{-3/2} \int_0^x (p_{oe} - p_e)^{1/2} dx, \quad (25)$$

где p_e – статическое давление на поверхности тела; p_{oe} – давление торможения.

Граничные условия для уравнения (22):

$$\begin{aligned} \eta = 0: f(0) = f'(0) = 0, \\ \eta \rightarrow \infty: f(\infty) \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь можно предложить сам алгоритм постановки граничных условий для u, k, ε :

1. Рассчитываем $f''(0)$ из уравнения (22) с граничным условием (26).
2. Рассчитываем трение на стенке τ_w по формуле



$$\tau_w = \frac{2^{1/4} (p_{oe} - p_e) f''(0)}{\left[\operatorname{Re}_t \int_0^x (p_{oe} - p_e)^{1/2} dx \right]} \rho U_\infty^2. \quad (27)$$

3. Рассчитываем диффузионный поток $D_{x_3}^u$ по формуле

$$D_{x_3}^u = \rho \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)_w = \tau_w. \quad (28)$$

4. Вычисляем k_p по соответствующему уравнению переноса, учитывая, что $D_{x_3}^k = 0$.

5. Определяем z_p из условия

$$z_p \leq \eta_e \frac{\left[\int_0^x \left[2(p_{op} - p_p) \right]^{1/2} dx \right]}{\operatorname{Re}_t (p_{op} - p_p)}. \quad (29)$$

6. Вычисляем ε_p по формуле

$$\varepsilon_p = (1/2)^{1/2} C_\mu k_p^{3/2} / (\chi_2 z_p). \quad (30)$$

Для тепловой задачи вводится безразмерный параметр θ :

$$\theta = (T - T_w) / (T_\infty - T_w), \quad (31)$$

где T – искомая температура, T_∞ – температура набегающего потока; T_w – температура тела. Уравнение для температуры в пристеночном слое имеет вид:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{Pr}} + \frac{1}{\operatorname{Pr}_t} \frac{\nu_t}{\nu} \right) \theta'' + \left[f + \frac{1}{\operatorname{Pr}_t} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\nu_t}{\nu} \right) \right] \theta' = 0, \quad (32)$$

где $f(\eta)$ находится из решения (22); а соотношение ν_t/ν из (21).

Граничные условия для (32):

$$\begin{aligned}\eta = 0 : \theta &= 0, \\ \eta \rightarrow \infty : \theta &\rightarrow 1.\end{aligned}\quad (33)$$

Уравнение (32) можно преобразовать к виду

$$\theta'' + \text{Pr} \theta' \left[f + \frac{1}{\text{Pr}_T} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\nu_T}{\nu} \right) \right] \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \frac{\nu_T}{\nu} \right)^{-1} = 0.$$

После замены

$$d\theta/d\eta = C \exp[-F_T(\eta)], \quad (34)$$

где

$$F_T(\eta) = \text{Pr} \int_0^\eta \frac{f + b/\text{Pr}}{1 + (\text{Pr}/\text{Pr}_T)b\eta} d\eta.$$

Величина производной $\theta'(0)$ равна постоянной C из (34) и имеет следующий вид:

$$\theta'(0) = \left\{ \int_0^\eta \exp \left[- \int_0^\eta \text{Pr} F_T(\eta) d\eta \right] d\eta \right\}^{-1}. \quad (35)$$

Тепловой поток к стенке в форме числа Нуссельта (Nu) находится из следующего соотношения:

$$\frac{Nu}{\sqrt{\text{Re}}} = \theta'(0) \left[\frac{p_{oe} - p_e}{\sqrt{2} \int_0^x (p_{oe} - p_e)^{1/2} dx} \right]^{1/2}. \quad (36)$$

По найденному числу Нуссельта рассчитывается диффузионный поток температуры

$$D_{x_3}^T = Nu / (\text{Re} \text{Pr}). \quad (37)$$

Для задачи о переносе вещества также ставятся особые граничные условия. В зонах генерации вещества задается поток вещества

$$J_c = \kappa_z \frac{\partial C}{\partial x_3}, \quad (38)$$

где κ_z – коэффициент диффузии. В остальных местах используется следующее соотношение:



$$\kappa_z \frac{\partial C}{\partial x_3} - \beta_c C = 0, \quad (39)$$

где β_c - коэффициент взаимодействия вещества с поверхностью.

3.4. Грань Ω_4

На этой грани наиболее целесообразно продлить граничные условия, поставленные на грани Ω_1 при $x_3 = L_2$ на всю грань.

3.5. Грань Ω_5

На этой грани поперечная скорость U_2 равна нулю, а для остальных используется следующее уравнение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0. \quad (40)$$

3.6. Грань Ω_6

На этой грани можно использовать те же граничные условия, что и для грани Ω_5 .

4. Описание алгоритма вычислений

Теперь после задания расчетных уравнений и граничных условий к ним можно определиться с методикой расчета. Существуют два варианта решения, каждый из которых обладает своими достоинствами и недостатками:

1. Метод конечных элементов. К достоинствам этого метода можно отнести высокую точность и очень хорошую приспособляемость к геометрии расчетной области. Основными недостатками метода являются высокие требования к машинной памяти и быстродействию процессора.

2. Метод контрольных объемов [5]. К достоинствам этого метода можно отнести невысокие требования к машинной памяти и быстродействию процессора. К другому достоинству метода можно отнести отлаженные методики расчета течений, такие как SIMPLE и SIMLER. Основными недостатками метода являются невысокая точность и плохая приспособляемость к геометрии расчетной области.

В качестве основного варианта решения был выбран метод контрольного объема. Главная причина такого выбора заключается именно в небольшом объеме памяти для реализации метода. Так как задача



является трёхмерной, то число неизвестных очень велико. Поэтому требования к объёму памяти выходят на первый план.

Для решения систем линейных уравнений применялся итерационный метод обобщённых минимальных взвешенных невязок (GMRES [6]). Для ускорения метода используется предобуславливание. Данная методика позволяет быстро и с достаточно высокой степенью точности получить решение задачи. Для расчёта поля течения используется алгоритм, разработанный на анализе известных алгоритмов SIMPLE и SIMPLER. Особенностью данного алгоритма являются высокая скорость сходимости (как у SIMPLER) и высокая устойчивость (как у SIMPLE).

5. Результаты вычислений

В работе проведены численные исследования и их анализ распространения продуктов сгорания ТЭЦ для следующего варианта:

$L_1 = 500$ м; $L_2 = 200$ м; $L_3 = 250$ м; высота источника выброса $H = 50$ м.

Параметры набегающего потока:

$u_1 = U(x_3) = 2$ м/с; $u_2(x_3) = u_3(x_3) = 0$; $T(x_3) = 291$ К; $C_\alpha = C_\beta = 0$;
 $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$ м²/с; $Pr = 0,8$; $Pr_t = 0,9$; $\nu_t = K_0 U(x^3)^\alpha x_3$, где $K_0 = 0,4$ – постоянная Кармана; $\alpha = 6 \cdot 10^{-11}$ – коэффициент пропорциональности между квадратом скорости U_1 и кинетической энергией турбулентных пульсаций скорости k ; $\varepsilon = \alpha u_1^2$; $\varepsilon = C_\mu k^{3/2} / (K_0 x_3)$.

Граничные условия на поверхности земли:

$T(x_1, x_2) = 291$ К; $C_\alpha = 0,0$.

Параметры источника выброса продуктов сгорания:

Начальная скорость газовой смеси $U_e = 30$ м/с; температура газовой смеси $T_e = 371$ К; площадь поперечного сечения источника $S_{ce} = 0,785$ м²; $C_\alpha = 0,02$; $C_\beta = 0,01$; $V_T = 2$ м/с; $Sc = 0,4$; $Sc_t = 0,7$.

Задача решалась на сетке, например, для давления $20 \times 20 \times 20$. Таким образом, число K_0 для давления равняется 8000. Использовалась неравномерная сетка. Сгущение производилось в окрестности трубы. Размеры наименьшего K_0 для давления $12,25$ м $\times$ $5,01$ м $\times$ $8,62$ м, наибольшего $6,31$ м $\times$ $12,59$ м $\times$ $15,78$ м.

Графики изолиний скорости u_1 , температуры T и концентрации твёрдых частиц C_β при $x_2 = 100$ м показаны на рис. 3–5.

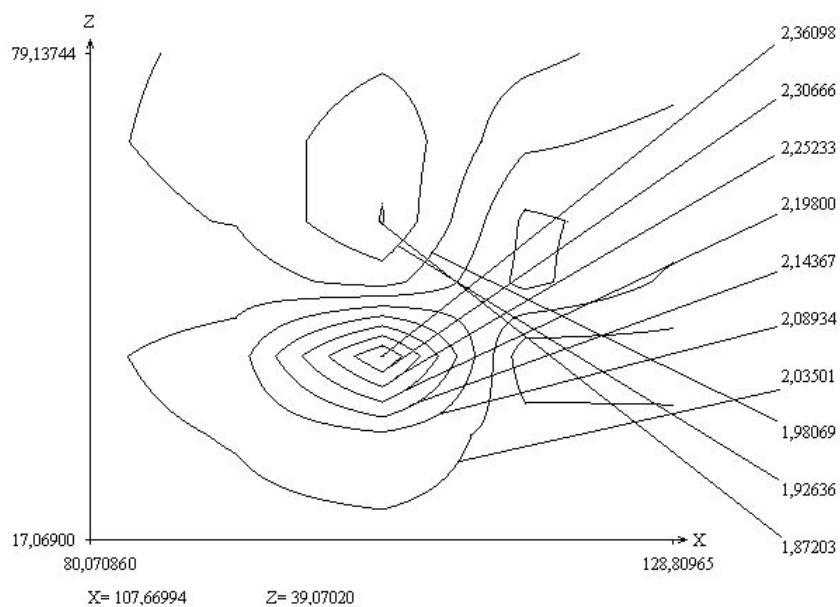


Рис. 3. График скорости u_1 при $x_2 = 100$ м

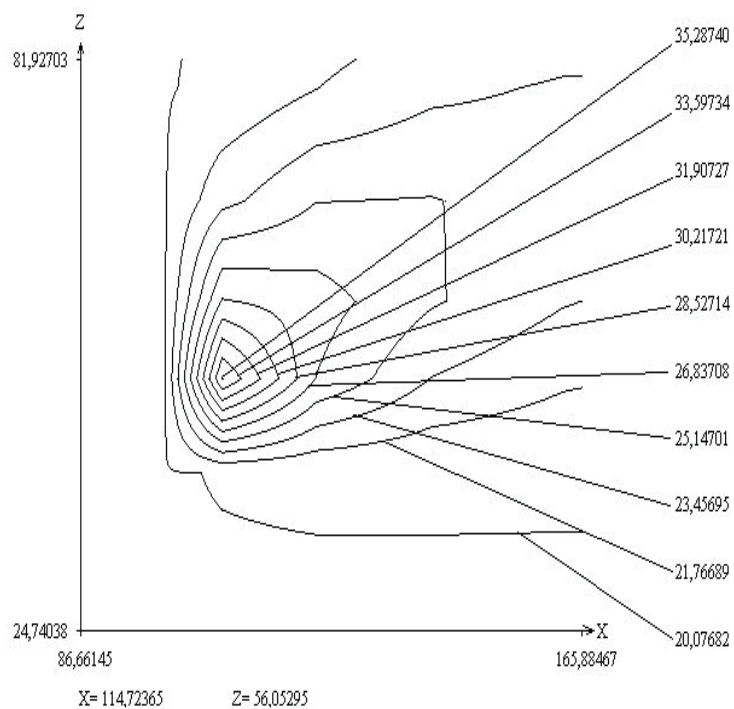


Рис. 4. График температуры T , °C, при $x_2 = 100$ м



Рис. 5. График распределения твёрдых частиц C_β при $x_2 = 100$ м

6. Заключение

В заключении следует отметить, что разработанная методика может использоваться для решения практических экологических задач. Можно указать два пути улучшения методики:

1. Использование криволинейных сеток.
2. Усложнение граничных условий на грани Ω_3 .

Большую помощь в постановке задачи и решении уравнений модели турбулентности оказал профессор В. К. Булгаков

Библиографические ссылки

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика. Т VI. Гидродинамика. М., 1986.
2. Белов И. А., Кудрявцев Н. А. Теплоотдача и сопротивление пакетов труб. Л., 1987.
3. Брэдишоу П., Себеси Т., Фернгольд Г. Г. Турбулентность. М., 1980.
4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М., 1980.
5. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М., 1984.
6. Баландин М. Ю., Шурина Э. П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск, 2000.