ВЕСТНИК ТОГУ. 2005. № 1

УДК 338:001.891.573

МОДЕЛЬ И ИССЛЕДОВАНИЕ МАКРОЭКОНОМИКИ РЕГИОНА НА ОСНОВЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ В-ФУНКЦИИ

Булгаков В. К. – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», академик Российской инженерной академии, Академии космонавтики им. К. Э. Циолковского, Международной академии наук высшей школы, заслуженный инженер России; *Стригунов В. В.* – аспирант кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (ТОГУ)

В статье предложена математическая модель макроэкономики региона Российской Федерации на основе производственной В-функции. Математическая модель учитывает особенности существующей бюджетной системы РФ. Изучены переходные процессы, выход региональной экономики на режим сбалансированного роста экономического развития. На основе принципа максимума Понтрягина и классического вариационного исчисления решена задача оптимального управления региональной экономической системой. Исследовано оптимальное управление для бесконечного горизонта планирования.

The mathematical model of regional macroeconomics of the Russian Federation developed on the basis of industrial B-function is given in this article. The mathematical model takes into account features of the existing budget system of the Russian Federation. The transient processes, the changeover of the regional economy into the mode of the balanced growth of the economic development are investigated. On the basis of the Pontryagin maximum principle and classic variation calculation the problem of optimal management of the regional economic system has been solved. The optimal management for an infinite horizon of planning has been examined.

Об инвестициях и потреблении в региональной макроэкономике России

Пусть K – основной капитал (фонды), N – число работников, участвующих в производственном процессе экономической системы региона. Введем переменные (аргументы) производственного процесса μK, gN, где μ – доля выбывших за год основных производственных фондов, g – средний годовой доход одного работника. Пусть Y – валовой региональный продукт (ВРП), измеряемый в стоимостном исчислении.

Введя безразмерные параметры (переменные) $A=\frac{\mu K}{gN}$, $C=\frac{Y}{gN}$, предложенную в работах [1, 2] производственную В-функцию можно записать в виде

$$\frac{C}{C_\infty}=b\left(1-e^{-BA}\right)+\left(1-b\right)BA\left(1-e^{-\frac{1}{BA}}\right), \tag{1}$$

где B, b, C_∞ – параметры производственной В-функции. В работе [2] получены с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ следующие значения параметров производственной В-функции экономики Хабаровского края: $B=0.829$, $b=0.858$, $C_\infty=12.091$. В переменных $x_1=\mu K$, $x_2=gN$, Y производственная В-функция имеет вид

$$Y=10.374x_2\left(1-e^{-0.829\frac{x_1}{x_2}}\right)+1.423x_1\left(1-e^{-1.206\frac{x_2}{x_1}}\right). \tag{2}$$

Введя нормирующие множители $\frac{1}{B}$, C_∞ для переменных A и C, т. е. $x=AB$, $f=\frac{C}{C_\infty}$, производственную функцию (1) можно представить в форме

$$f(x)=b\left(1-e^{-x}\right)+\left(1-b\right)x\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right). \tag{3}$$

Абсолютный показатель Y следующим образом выражается через функцию (3):

$$Y=gNC_\infty f(x). \tag{4}$$

Уравнение изменения трудовых ресурсов при моделировании демографических процессов показателем ν – годовым темпом прироста числа занятых – имеет вид

$$\frac{dN}{dt} = \nu N, \qquad N(0) = N_0. \tag{5}$$

Уравнение динамики основного капитала (фондов) с учётом износа и инвестиций, равных μK, I в расчете на год, можно записать в виде

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + I, \qquad K(0) = K_0. \tag{6}$$

С точки зрения математического моделирования региональная экономическая система отличается от экономической системы страны тем, что математическую модель макроэкономики региона нельзя рассматривать как замкнутую, когда инвестиции и потребление полностью определяются объёмом произведённой продукции. Валовой региональный продукт за вычетом полного объёма налоговых изъятий с рассматриваемой территории определяет только часть региональных инвестиций и потребления. Необходимо рассматривать процесс воспроизводства основного капитала региона также с учетом капитальных расходов бюджетов всех уровней (федеральный, региональный, муниципальные бюджеты региона), финансовых потоков естественных монополий на территории (отраслевое финансирование) и из других источников. Рассмотрим модель суммарного финансирования капитальных расходов региона бюджетной системой Российской Федерации, естественными монополиями на территории и из других источников. За основу модели возьмем схему бюджетной системы РФ (рис. 1).

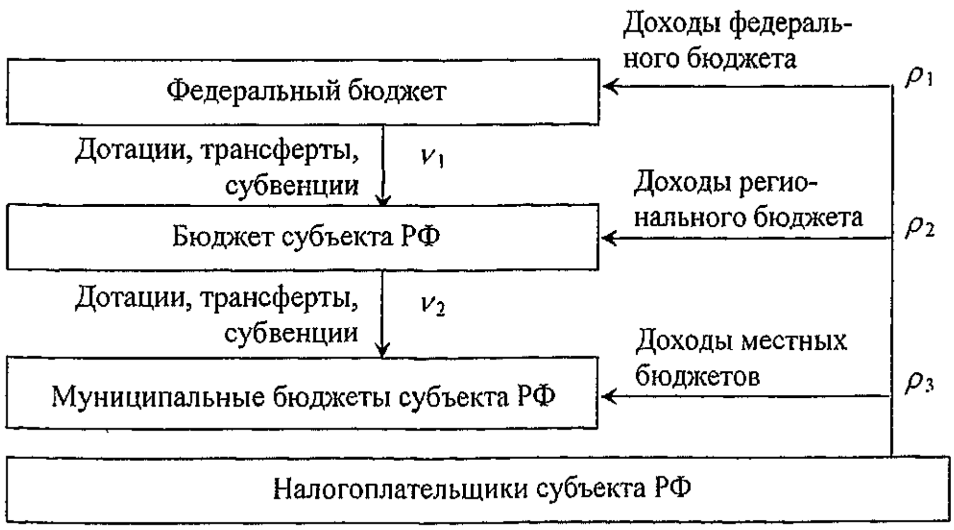

Рис. 1

Пусть Q – полный объем налоговых изъятий с рассматриваемой территории, а Q_F, Q_R, Q_M – налоги, поступающие в федеральный, региональный, муниципальные бюджеты региона. Введем $\rho_1 = \frac{Q_F}{Q}$, $\rho_2 = \frac{Q_R}{Q}$, $\rho_3 = \frac{Q_M}{Q}$ и пропорции ν_1, ν_2 возврата средств в порядке перераспределения доходов в долях от уровня доходов нижестоящих бюджетов, рассчитанные как увеличивающие коэффициенты (рис. 1). Тогда суммарные доходы регионального и местных бюджетов региона от налоговых поступлений и поступлений от бюджетного регулирования в виде дотаций, трансфертов, субвенций можно записать в форме

$$D_R^B = [(1+\nu_1)\rho_2 - \nu_2\rho_3]Q,$$

$$D_M^B = (1+\nu_2)\rho_3 Q.$$

Поступления в региональный и местные бюджеты от естественных монополий на территории по аналогии с бюджетным регулированием выразим через пропорции ν_R^{ind}, ν_M^{ind} в долях от уровня налоговых поступлений регионального и местных бюджетов:

$$D_R^{ind} = \nu_R^{ind}\rho_2 Q, \qquad D_M^{ind} = \nu_M^{ind}\rho_3 Q.$$

Если еще имеются поступления из других источников (внебюджетной системы РФ и внеотраслевого финансирования), то эти поступления также выразим через пропорции ν_R^0, ν_M^0 в долях от уровня налоговых поступлений регионального и местных бюджетов:

$$D_R^0 = \nu_R^0\rho_2 Q, \qquad D_M^0 = \nu_M^0\rho_3 Q.$$

Тогда суммарное финансирование капитальных расходов региона бюджетной системой РФ, естественными монополиями на территории и из других источников определяется зависимостью

$$I = \left\{S_R\left[\left(1+\nu_1+\nu_R^{ind}+\nu_R^0\right)\rho_2 - \nu_2\rho_3\right] + S_M\left(1+\nu_2+\nu_M^{ind}+\nu_M^0\right)\rho_3\right\}Q, \qquad (7)$$

где S_R, S_M – доли капитальных расходов регионального и местных бюджетов региона.

Введя параметры δ – уровень налогового бремени региона [3] ($\delta = \frac{Q}{Y}$), s – норму накопления, определяемую организаторами производственного процесса региона, для инвестиций I и фонда непроизводственного потребления W можем записать:

$$I = c_i\, Y = c_i\, g\, N\, C_\infty\, f(x)\,, \tag{8}$$

$$W = c_w\, Y = c_w\, g\, N\, C_\infty\, f(x)\,, \tag{9}$$

где функция $f(x)$ определяется уравнением (3), а коэффициенты c_i, c_w равны:

$$\left.\begin{aligned} c_i &= (1-\delta)s + r_i \\ c_w &= (1-\delta)(1-s) + r_w \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

где $r_i = \left\{ S_R\left[\left(1+\nu_1+\nu_R^{ind}+\nu_R^0\right)\rho_2 - \nu_2\rho_3 \right] + S_M\left(1+\nu_2+\nu_M^{ind}+\nu_M^0\right)\rho_3 \right\}\delta$,

$r_w = \left\{ (1-S_R)\left[\left(1+\nu_1+\nu_R^{ind}+\nu_R^0\right)\rho_2 - \nu_2\rho_3 \right] + (1-S_M)\left(1+\nu_2+\nu_M^{ind}+\nu_M^0\right)\rho_3 \right\}\delta$.

Как нетрудно убедиться, коэффициенты c_i, c_w удовлетворяют уравнению

$$c_i + c_w = q\,, \tag{11}$$

где $q = (1-\delta) + \left\{ \left(1+\nu_1+\nu_R^{ind}+\nu_R^0\right)\rho_2 + \left(1+\nu_2+\nu_M^{ind}+\nu_M^0\right)\rho_3 \right\}\delta$.

Анализ показывает, что $q \approx 1$, точнее, $q = 0.998$.

Отметим, что если рассматривать макроэкономику страны, экспорт-импорт в явном виде не учитывать, то соотношения (8), (9) принимают известный вид:

$$I = sY = s\,g\,N\,C_\infty f(x), \qquad W = (1-s)Y = (1-s)\,g\,N\,C_\infty f(x),$$

где Y есть ВВП, а $f(x)$ – производственная В-функция страны.

Модель макроэкономики региона на основе производственной В-функции

Аналогично моделированию изменения трудовых ресурсов (5) уравнение изменения среднегодового дохода одного работника запишем в виде

$$\frac{dg}{dt} = \tau g\,, \qquad g(0) = g_0\,,$$

где τ – годовой темп прироста среднегодового дохода работника.

Из определения переменной A имеем $K = \dfrac{1}{\mu} g\, A\, N$, откуда с учетом уравнения (5) и уравнения изменения среднегодового дохода работника можем записать

$$\frac{dK}{dt}=\frac{gN}{\mu}\frac{dA}{dt}+\frac{g}{\mu}\nu NA+\frac{NA}{\mu}\tau g.$$

Тогда уравнение динамики основного капитала (6) можно привести к виду

$$\frac{dA}{dt}=-(\mu+\nu+\tau)A+c_i\mu C_\infty f(x).$$

Переходя к фазовой переменной $x=BA$ и введя параметры $a=c_i\mu C_\infty B$, $\lambda=\mu+\nu+\tau$, получаем дифференциальное уравнение для $x(t)$

$$\frac{dx}{dt}=af(x)-\lambda x \qquad (12)$$

с начальным условием

$$x(0)=x_0=\frac{\mu K(0)}{g(0)N(0)}B. \qquad (13)$$

Безразмерная переменная x пропорциональна фондовооруженности $k=\frac{K}{N}$, т. к. $x=B\frac{\mu}{g}\frac{K}{N}$.

Таким образом, математическая модель макроэкономики региона на основе производственной В-функции в относительных показателях (x, i – удельные инвестиции, w – среднедушевое потребление, y – удельный объем производства) имеет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt}=af(x)-\lambda x, \qquad x(0)=x_0, \\ i=lf(x), \qquad w=mf(x), \qquad y=nf(x), \\ f(x)=b\left(1-e^{-x}\right)+(1-b)x\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right), \\ l=c_i gC_\infty, \qquad m=c_w gC_\infty, \qquad n=gC_\infty \end{array}\right\}. \qquad (14)$$

Показатели модели изменяются во времени, поэтому модель определяет траекторию экономической системы региона.

Рассмотрим стационарную траекторию, когда $x = x_r = const$, $y = y_r = const$, $i = i_r = const$, $w = w_r = const$. Условием стационарности траектории модели (14) является

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad a f(x) = \lambda x. \tag{15}$$

Поскольку для $0 \le x < \infty$ $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, то при

$$f'(0) > \frac{\lambda}{a} = \frac{1 + (\nu + \tau)\mu^{-1}}{c_i C_\infty B} \tag{16}$$

уравнение (15) имеет единственное нетривиальное решение x_r. Учитывая, что $f'(0) = 1$, условие (16) можно записать в форме

$$c_i > \frac{1 + (\nu + \tau)\mu^{-1}}{C_\infty B}. \tag{16'}$$

Если рассмотреть в качестве примера экономическую систему, имеющую следующие параметры [4]: $\nu = -0.0045$; $\mu = 0.07$; $\tau = 0.05$; $C_\infty = 12.091$; $B = 0.829$; $\delta = 0.18$; $S_R = 0.1$; $S_M = 0.15$; $\rho_1 = 0.345$; $\rho_2 = 0.374$; $\rho_3 = 0.281$; $\nu_1 = 0.35$; $\nu_2 = 0.382$; $\nu_R^{ind} = 0.1$; $\nu_M^{ind} = 0.1$; $\nu_R^0 = 0.05$; $\nu_M^0 = 0.05$, то вычисления приводят к следующему неравенству:

$$s > 0.177. \tag{16''}$$

Для предельно допустимой нижней границы нормы накопления s это неравенство не обременительно, т. к. для реальных экономических систем регионов норма накопления s значительно больше.

Исследуем стационарные значения x_r, определяемые нелинейным алгебраическим уравнением (15) для случая $s \in [0.2,\ 0.8]$. Запишем уравнение (15) в форме

$$F(x) \equiv f(x) - px = 0, \tag{17}$$

где параметр $p = \dfrac{1+(\nu+\tau)\mu^{-1}}{(0.82s+0.02)C_{\infty}B}$ изменяется в диапазоне $0.24 \le p \le 0.89$. Уравнение (17) решалось численно итерационным методом Ньютона [5].

Графический анализ функции $F(x)$ показал, что для $p \in [0.24,\ 0.89]$, $b = 0.858$ отрезок, на котором лежит корень уравнения (17), можно взять равным $[0.1,\ 4.3]$. Поскольку на отрезке $[x_r,\ 4.3]$ $F'(x) < 0$, $F''(x) < 0$, начальное приближение алгоритма Ньютона бралось равным $x_0 = 4.3$, что приводит к убывающей последовательности приближений $\{x_n\}$, сходящейся к корню x_r. В таблице показаны посчитанные с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ стационарные значения x_r для величин нормы накопления $0.2 \le s \le 0.8$. Также представлены значения функции $f_r = f(x_r)$.

Результаты расчетов

j	s	x_r	f_r	$\hat{x}$	φ	ξ	ζ
1	0.2	0.2596	0.2323	0.1303	0.1870	– 1.3485	– 1.4598
2	0.25	0.6808	0.4981	0.3295	0.3806	– 0.3845	– 0.6970
3	0.3	1.0484	0.6488	0.4793	0.4691	0.0472	– 0.4327
4	0.35	1.3907	0.7457	0.6087	0.5086	0.3298	– 0.2934
5	0.4	1.7148	0.8112	0.7239	0.5200	0.5393	– 0.2093
6	0.45	2.0246	0.8568	0.8280	0.5141	0.7054	– 0.1546
7	0.5	2.3231	0.8893	0.9229	0.4971	0.8429	– 0.1173
8	0.55	2.6124	0.9130	1.0100	0.4730	0.9603	– 0.0910
9	0.6	2.8944	0.9306	1.0905	0.4439	1.0628	– 0.0719
10	0.65	3.1707	0.9438	1.1653	0.4115	1.1539	– 0.0579
11	0.7	3.4416	0.9538	1.2352	0.3767	1.2359	– 0.0473
12	0.75	3.7088	0.9614	1.3007	0.3404	1.3107	– 0.0393
13	0.8	3.9726	0.9674	1.3624	0.3028	1.3794	– 0.0332

Выход модели на стационарный режим

Если начальное условие x_0 рассматриваемой модели макроэкономики не равно x_r – значению на стационарной траектории, в экономике будет наблюдаться нестационарный процесс выхода на режим (переходной процесс). Выход на стационарный режим определяется задачей Коши (12), (13).

Представляет интерес исследование характера переходного процесса в зависимости от начального условия x_0 и значений параметров модели a, λ. При рассмотрении конкретной региональной экономической системы параметры производственной функции определены однозначно и их варьирование особого смысла не имеет. Сравнительный анализ переходных процессов различных экономических систем в настоящей работе не рассматривается. Изменение начального условия x_0 обусловлено варьированием параметра $A(0)=\dfrac{\mu K(0)}{g(0)N(0)}$. При варьировании нормы накопления s изменению подвержен параметр a. Так, при $0.2 \le s \le 0.8$ параметр a изменяется в диапазоне $0.129 \le a \le 0.474$.

Задача Коши (12), (13) решалась численно на ЭВМ методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности [5] с шагом по времени $\Delta t = 0.01918$ года, что соответствует одной неделе. Погрешность решения задачи можно оценить формулой [5]:

$$R=\frac{T}{2880}\Delta t^4 \max\left|F^{(4)}(x)\right|, \tag{18}$$

где T – горизонт моделирования динамики экономической системы. Из расчетов следует, что $\max\left|F^{(4)}(x)\right| \approx 23$, поэтому

$$R<10^{-8}T. \tag{18'}$$

Рассмотрим некоторые результаты расчетов переходного процесса рассматриваемой модели макроэкономики региона.

При анализе переходного процесса показательной величиной является $\bar{x}$, которая определяется из условия максимума правой части уравнения (12) для фазовой переменной $x(t)$, т. е. из условия

$$f'(x)-\frac{\lambda}{a}=0, \tag{19}$$

где $f'(x)=be^{-x}+(1-b)\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)-(1-b)\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$,

$$a=\left[(1-\delta)s+r_i\right]\mu C_\infty B=(0.82s+0.02)\,0.70164,$$
$$\lambda=\mu+\nu+\tau=0.1155.$$

Нелинейное алгебраическое уравнение (19) решалось численно итерационным методом Ньютона [5]. В таблице представлены посчитанные с точностью $\varepsilon=10^{-4}$ значения $\hat{x}$ для норм накопления $0.2\le s\le 0.8$.

На рис. 2 представлены некоторые результаты расчетов переходного процесса рассматриваемой модели макроэкономики Хабаровского края для норм накопления $s=0.35$ и $s=0.55$.

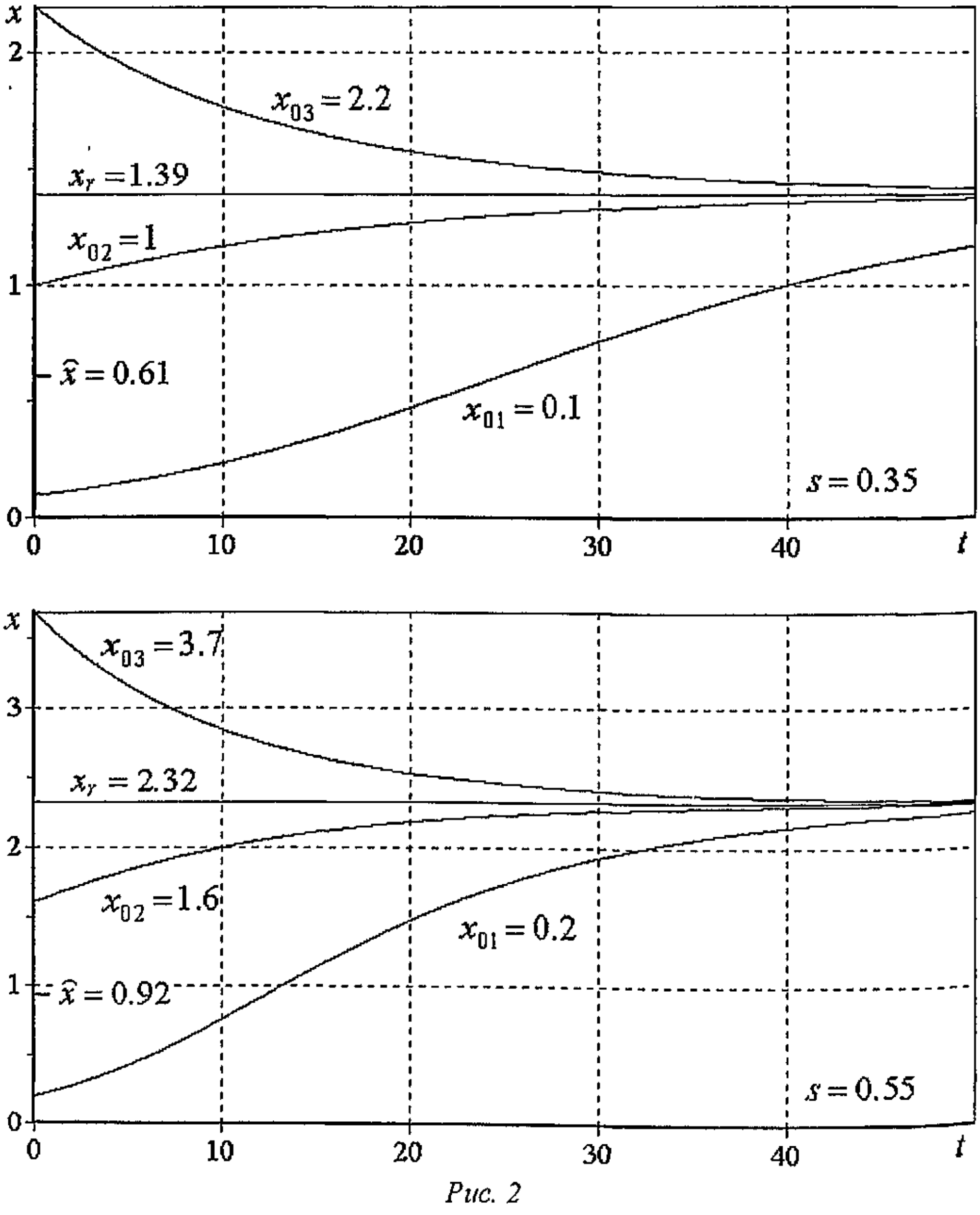

Рис. 2

Из характера кривых рис. 2 можно отметить, что при $x_0 < \tilde{x}$ вначале имеет место ускоренный рост фондовооруженности; при $\hat{x} < x_0 < x_r$ – замедленный рост фондовооруженности; при $x_0 > x_r$ – замедляющееся падение фондовооруженности.

О «золотом правиле накопления» в региональной макроэкономике

Суть «золотого правила накопления» состоит в том [6], что выбором величины нормы накопления можно максимизировать среднедушевое потребление на стационарном режиме.

Среднедушевое потребление в региональной макроэкономике на стационарном режиме w_r определяется формулой $w_r = c_w\, g\, C_\infty\, f(x_r(s))$ (см. модель (14)). Введем зависимость $\varphi(s) = c_w(s) f(x_r(s))$, тогда характер влияния величины нормы накопления на среднедушевое потребление на стационарном режиме будет определяться функцией $\varphi(s)$, т. к. для конкретного региона $g\, C_\infty = const$. Используя вторую зависимость (10) $c_w = (1-\delta)(1-s) + r_w$, которая для Хабаровского края имеет вид $c_w = 0.82(1-s) + 0.149$, для функции $\varphi(s)$ получаем

$$\varphi(s) = [\,0.82(1-s) + 0.149\,] f(x_r(s)). \qquad (20)$$

В таблице представлены значения функции $\varphi(s_j)$, где s_j меняются от 0.2 до 0.8. В качестве отрезка, на котором функция $\varphi(s)$ имеет максимум, можно взять $[\,s_4\,,\ s_7\,]$. Построим на этом отрезке интерполяционный полином Лагранжа третьей степени $L_3(s)$ [7]:

$$L_3(s) = -\,0.5764 + 6.7703s - 13.38s^2 + 8.2667s^3. \qquad (21)$$

Поскольку $\varphi(s) \approx L_3(s)$ для $s \in [\,s_4\,,\ s_7\,]$, то значение s^*, при котором $\varphi(s)$ имеет максимум, определяется уравнением

$$\frac{dL_3}{ds} = 0 \qquad \text{или} \qquad s^2 - 1.079s + 0.273 = 0.$$

Откуда получаем

$$s^* = 0.41. \qquad (22)$$

Рассмотрим «золотое правило накопления» для региональной экономической системы для случая, когда используется мультипликативная производственная функция Кобба-Дугласа. В удельных показателях $k=\dfrac{K}{N}$ (фондовооруженность региона), $y=\dfrac{Y}{N}$ (производительность труда в регионе) ПФ Кобба-Дугласа имеет вид

$$y=A_1 k^{\alpha},$$

где A_1, α – эмпирические коэффициенты, определяемые по временному ряду $(y_t,\ k_t)$, $t=\overline{0,T}$; α – эластичность выпуска по основному капиталу региона; A_1– параметр нейтрального технического прогресса.

В переменных x, f функцию Кобба-Дугласа можно записать в форме

$$f(x)=A_2 x^{\alpha}, \tag{23}$$

где постоянная $A_2=A_1\dfrac{1}{g^{1-\alpha}}\left(\dfrac{1}{\mu B}\right)^{\alpha}\dfrac{1}{C_\infty}$. Коэффициент A_2 безразмерный, A_1 – размерный, его размерность равна

$$[A_1]=\left[g^{1-\alpha}\right]\left[\mu^{\alpha}\right].$$

Значение x_r на стационарной траектории в случае ПФ Кобба-Дугласа определяется корнем уравнения

$$c_i C_\infty B A_2 x^{\alpha}=\left(1+\frac{\nu+\tau}{\mu}\right)x.$$

Его решение есть

$$x_r=\left[c_i C_\infty B A_2 \,/\left(1+(\nu+\tau)\mu^{-1}\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{24}$$

Среднедушевое потребление на стационарной траектории согласно (9), (23) равно

$$w_r=c_w\, g C_\infty A_2 (x_r)^{\alpha}$$

или, учитывая (11), (24), имеем

$$w_r=(q-c_i)g C_\infty A_2\left[c_i C_\infty B A_2 \,/\left(1+(\nu+\tau)\mu^{-1}\right)\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{25}$$

Запишем для удобства последнее выражение в форме

$$w_r=A_3\,\chi(c_i(s)), \tag{26}$$

где коэффициент $A_3 = g\left[C_\infty A_2 B^\alpha \big/ \left(1+(\nu+\tau)\mu^{-1}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$, а функция $\chi(c_i)$ есть

$$\chi = (q - c_i)(c_i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \qquad (27)$$

Функция c_i есть линейная функция переменной s: $c_i = (1-\delta)s + r_i$, поэтому

$$\frac{d\chi}{ds} = \frac{d\chi}{dc_i}\frac{dc_i}{ds} = (1-\delta)\frac{d\chi}{dc_i} \qquad (1-\delta > 0), \qquad (28)$$

и необходимое условие существования экстремума $\frac{d\chi}{ds} = 0$ эквивалентно $\frac{d\chi}{dc_i} = 0$.

Проведя несложные вычисления, получаем

$$\frac{d\chi}{dc_i} = c_i^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[-1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{q}{c_i} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right] = 0.$$

Поскольку $c_i > 0$, то $c_i^* = \alpha q$ или

$$s^* = \frac{q}{1-\delta}\alpha - \frac{r_i}{1-\delta}. \qquad (29)$$

В частности, для параметров Хабаровского края имеем

$$s^* = 1.217\alpha - 0.024. \qquad (29')$$

Для определения параметра α (эластичность выпуска по основным фондам) функции Кобба-Дугласа (23), аппроксимирующей на отрезке $0.2596 \le x \le 3.9726$ (см. значения x_r в таблице) производственную В-функцию, воспользуемся точечным методом наименьших квадратов (МНК) и логарифмическими переменными $\xi = \ln x$, $\zeta = \ln f$. В таблице представлены значения $\{\xi_j, \zeta_j\}$, соответствующие значениям x_r, f_r.

Из точечного МНК следует [8]:

$$\alpha = \frac{\sum_{j=1}^{n} \xi_j \zeta_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j \sum_{j=1}^{n} \zeta_j}{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \right)^2},$$

где в рассматриваемом случае $n = 13$.

Вычисления дают $\alpha = 0.4935$. Следовательно, при использовании ПФ Кобба-Дугласа из «золотого правила накопления» (29') получаем следующее значение оптимальной нормы накопления:

$$s^* = 0.58, \tag{29''}$$

соответствующее максимальному среднедушевому потреблению на стационарном режиме.

Сопоставление значений по формулам (22) и (29'') показывает, что значение оптимальной нормы накопления существенно зависит от принятой производственной функции, особенно на этапе переходной экономики, характерной малым объёмом статистических данных и значительным разбросом их. Поэтому утверждение о том, что на практике имеет место недонакопление (норма накопления меньше оптимального значения) может не соответствовать истине.

Оптимальное управление динамикой региональной экономической системы

Рассмотрим динамическую модель макроэкономики региона (14) с переменной во времени нормой накопления (или нормой потребления), определяемой организаторами производственного процесса региона. Определим критерий, по которому будем оценивать различные варианты динамики развития региональной экономической системы (14).

Пусть $w(t) = \dfrac{W(t)}{g(t)N(t)} = c_w C_\infty f(x(t))$ – текущее среднедушевое потребление, отнесенное к среднегодовому доходу одного трудящегося (безразмерная величина), которое будем рассматривать в качестве управляющей функции.

В теоретическом анализе макроэкономики предполагается, что существует и известна функция полезности потребления $u(w)$. Функция полезности обычно наделяется следующими свойствами: она положительная, возрастающая функция с убывающей предельной полезностью ($u(w)>0$, $u'(w)>0$, $u''(w)<0$). Кроме того, часто предполагается, что $\lim\limits_{w\to 0} u'(w)=\infty$, $\lim\limits_{w\to\infty} u'(w)=0$.

В качестве конкретной функции полезности, обладающей всеми перечисленными свойствами, возьмем степенную зависимость

$$u(w)=w^{\alpha}, \tag{30}$$

где $0<\alpha<1$ – эмпирическая постоянная.

Исходя из экономических соображений, область допустимых значений функции управления определим замкнутым множеством $\overline{G}_w$:

$$\overline{G}_w=\{w(t):\ w_1\le w\le w_2\}, \tag{31}$$

где w_1 – минимально допустимое среднедушевое потребление, отнесенное к среднегодовому доходу одного работника, w_1 принимается постоянной; $w_2=qC_\infty f(x)$ – максимально возможное потребление, w_2 является функцией фазовой переменной, а также времени, т. к. $x=x(t)$. Будем считать $\overline{G}_w\subset C[0,T]$, где T – горизонт планирования динамики экономической системы.

Используя функцию полезности (30), в качестве функционала цели возьмем

$$J(w,t)=\int\limits_0^T e^{-\delta t}\,w(t)^{\alpha}\,dt, \tag{32}$$

где $\delta>0$ – норма дисконтирования, которой будущие полезности приводятся к настоящему времени.

Задачу Коши, определяющую динамику основных фондов, для фазовой координаты $x(t)$ можно представить в форме

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=a\,f(x)-\lambda x-pw\\&x(0)=x_0\end{aligned}\right\}, \tag{33}$$

где $a=q\mu C_\infty B$, $\lambda=\mu+\nu+\tau$, $p=\mu B$.

Тогда задачу об оптимальном росте рассматриваемой макроэкономической системы региона (14) можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{w(t)\in \overline{G}_w} \int\limits_0^T e^{-\delta t} w(t)^{\alpha}\, dt \\ \dfrac{dx}{dt} = a\, f(x) - \lambda x - p w, \qquad x(0) = x_0 \\ f(x) = b\left(1 - e^{-x}\right) + \left(1 - b\right)x\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) \end{array}\right\}. \qquad (34)$$

Решением задачи (34) являются оптимальные траектории $w^*(t)$, $x^*(t)$, которые выводят региональную экономическую систему на максимальное благосостояние.

Принцип максимума Понтрягина [9] для рассматриваемой задачи можно сформулировать следующим образом.

Если управление $w^*(t)$ и траектория $x^*(t)$ доставляют максимум функционалу

$$J(w,t) = \int\limits_0^T e^{-\delta t} w(t)^{\alpha}\, dt$$

при условиях связи:

$$\frac{dx}{dt} = a\, f(x) - \lambda x - p w,$$

$$x(0) = x_0$$

и ограничении $w \in \overline{G}_w$, то существует такая непрерывная функция $\psi(t)$, удовлетворяющая сопряженному уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = -\left[a\, f'(x) - \lambda\right]\psi$$

и условию трансверсальности $\psi(T) = 0$, что для $\forall\ t,\ t \in [0,\ T]$ функция Гамильтона $H\left(x^*(t), w^*(t), \psi(t)\right) = e^{-\delta t} w^{*\alpha} + \psi\left[a\, f(x^*) - \lambda x^* - p w^*\right]$ достигает в точке $w^*(t)$ максимума по всем $w \in \overline{G}_w$:

$$H\left(x^*(t), w^*(t), \psi(t)\right) = \max_{w\in \overline{G}_w} H\left(x^*(t), w(t), \psi(t)\right).$$

Рассмотрим открытое множество $G_w = \{w:\ w_1 < w < w_2\}$ функций $w(t) \in C[0,T]$. Известно [9], что когда область управления является открытым множеством, рассматриваемая оптимальная задача эквивалентна задаче Лагранжа классического вариационного исчисления. Точка максимума $w^* \in G_w$ является стационарной точкой функции Гамильтона:

$$H\left(x^*, w, \psi\right) = e^{-\delta t} w^{\alpha} - p\psi w + \psi\left[a f(x^*) - \lambda x^*\right], \tag{35}$$

т. е.

$$H_w\Big|_{w=w^*} = 0\ .$$

Откуда получаем зависимость

$$e^{\delta t}\psi = p^{-1}\alpha w^{*\alpha-1}. \tag{36}$$

Будем рассматривать динамику региональной экономической системы для значений T, удовлетворяющих условию $e^{\delta T}$ равно величине порядка 10^2. В этом случае множитель $e^{\delta t}$ в соотношении (36) при $t \in [0,T]$ изменяется от 1 до величины порядка 10^2, поэтому для удобства можно использовать новую сопряженную переменную $\omega = e^{\delta t}\psi$. В соотношении

$$\omega = p^{-1}\alpha w^{*\alpha-1} \tag{36'}$$

$$w^* \in G_w,\ \omega \in G_\omega = \{\omega:\ \omega_1 < \omega < \omega_2\},\ \omega_1 = p^{-1}\alpha w_2^{\alpha-1},\ \omega_2 = p^{-1}\alpha w_1^{\alpha-1}. \tag{36''}$$

Рассмотрим произвольную точку ω слева от ω_1, т. е. $\omega = \omega_1 - \varepsilon_1$, где $0 < \varepsilon_1 < \omega_1$. Функция Гамильтона (35) в рассматриваемой точке равна:

$$H\left(x^*, w, \omega\right) = w^{\alpha}\left[1 - \alpha\left(\frac{w}{w_2}\right)^{1-\alpha}\right] + p\varepsilon_1 w + \omega\left[a f(x^*) - \lambda x^*\right]. \tag{37}$$

Анализ функции Гамильтона (37) по переменной w (производных H_w, H_{ww}) показывает, что точка $w = w_2$ является точкой максимума H по всем $w \in \overline{G}_w$.

Рассмотрев функцию Гамильтона (35) в произвольной точке ω справа от ω_2, т. е. при $\omega = \omega_2 + \varepsilon_2$, где $\varepsilon_2 > 0$:

$$H\left(x^*, w, \omega\right) = w^\alpha \left[1 - \alpha\left(\frac{w}{w_1}\right)^{1-\alpha}\right] - p\varepsilon_2 w + \omega\left[a f(x^*) - \lambda x^*\right] \quad (38)$$

и проведя анализ функции Гамильтона (38), можно убедиться, что точка $w = w_1$ также является точкой максимума H по всем $w \in \overline{G}_w$.

Таким образом, приходим к выводу, что в переменных (ω, w) оптимальное управление рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

$$w^*(t) = \begin{cases} w_2(t) = q C_\infty f\left(x^*(t)\right) & \omega(t) < \omega_1(t) \\ \left[\dfrac{p^{-1}\alpha}{\omega(t)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \omega_1(t) < \omega(t) < \omega_2 \\ w_1 & \omega(t) > \omega_2 \end{cases} . \quad (39)$$

На рис. 3 в плоскости (ω, w) показан график оптимального управления w^*, определяемого зависимостью (39); он состоит из прямой w_2, кривой AB и прямой w_1. Можно отметить, что картинка рис. 3 (оптимальное управление) соответствует некоторому конкретному значению фазовой переменной $x^* > x_S$ (точка x_S показана на рис. 4).

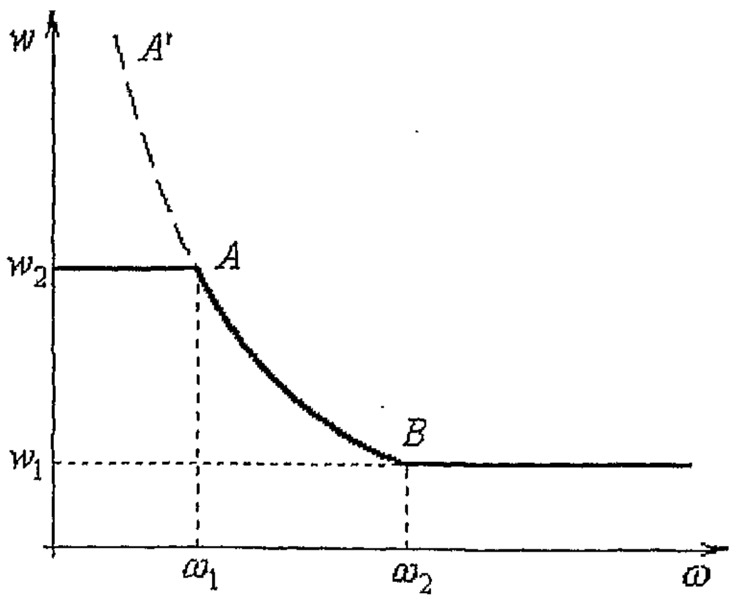

Рис. 3

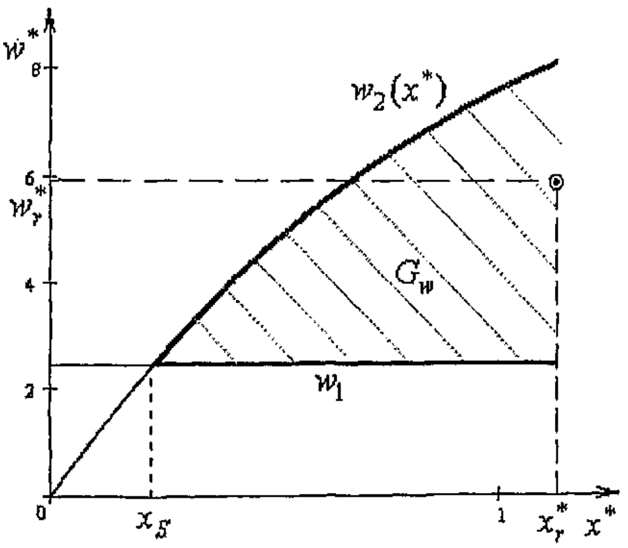

Рис. 4

Для разных значений $x^* > x_S$ картинка рис. 3 будет меняться в том, что точка A будет скользить по кривой $A'B$ (рис. 4).

Как следует из (39), оптимальное управление не определено в двух точках $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$ (в точках A, B рис. 3). Доопределим $w^*(t)$, присоединив точку A к прямой w_2, а точку B к прямой w_1. Тогда окончательно оптимальное управление рассматриваемой задачи запишем следующим образом:

$$w^*(t) = \begin{cases} w_2(t) = qC_\infty f\left(x^*(t)\right) & \omega(t) \le \omega_1(t) \\ \left[\dfrac{p^{-1}\alpha}{\omega(t)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \omega_1(t) < \omega(t) < \omega_2 \,. \\ w_1 & \omega(t) \ge \omega_2 \end{cases} \qquad (39')$$

Замечание. Если в функции полезности (30) положить $\alpha = 1$, т. е. рассмотреть случай $u(w) = w$, то из зависимости (36") следует $\omega_1 = \omega_2 = p^{-1}$, а оптимальное управление (39) приобретает вид следующего релейного переключения:

$$w^*(t) = \begin{cases} w_2(t) = qC_\infty f\left(x^*(t)\right) & \omega < p^{-1} \\ w^* & \omega = p^{-1} \,. \\ w_1 & \omega > p^{-1} \end{cases}$$

Оптимальная траектория фазовой переменной $x^*(t)$ и соответствующая ей траектория сопряженной переменной $\omega(t)$ определяются краевой задачей

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx^*}{dt}=a\,f(x^*)-\lambda x^*-p\,w^* \\
&\frac{d\omega}{dt}=-\left[a\,f'(x^*)-(\lambda+\delta)\right]\omega \qquad 0\le t\le T \\
&x^*(0)=x_0\,, \qquad \omega(T)=0
\end{aligned}\right\}, \tag{40}$$

в которой, в свою очередь, оптимальное управление w^* определяется согласно (39') траекториями $x^*(t)$, $\omega(t)$.

Отдельно проведем качественный анализ оптимального управления $w^*(t)$ оптимальной траектории $x^*(t)$ и соответствующей ей траектории $\omega(t)$ для случая, когда горизонт планирования динамики экономической системы $T\to\infty$. В этом случае региональная экономическая система достигает стационарный режим (режим сбалансированного роста экономического развития).

Важно отметить, что при бесконечном горизонте планирования $T\to\infty$ для любого конечного $\omega(t)$ условие трансверсальности $\psi(T)=0$ имеет место всегда, т. к.

$$\psi(T)=\omega(T)e^{-\delta T}\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

При $T\to\infty$ и $x_0>x_{\min}$, где $x_{\min}$ – первый корень алгебраического уравнения

$$a\,f(x)-\lambda x-p\,w_1=0,$$

динамика экономической системы состоит в том, что система всегда выходит на стационарный режим (режим сбалансированного роста экономического развития). Стационарная точка оптимального решения системы (40) определяется следующими алгебраическими уравнениями:

$$f'(x_r^*)=\frac{\lambda+\delta}{a}, \qquad w_r^*=p^{-1}\left[a\,f(x_r^*)-\lambda x_r^*\right]. \tag{41}$$

Следует отметить, что решение первого уравнения существует и единственно

при $$\frac{\lambda+\delta}{a}<1, \tag{42}$$

т. к. $f'(0)=1$, $f''(x)<0$ (рис. 5).

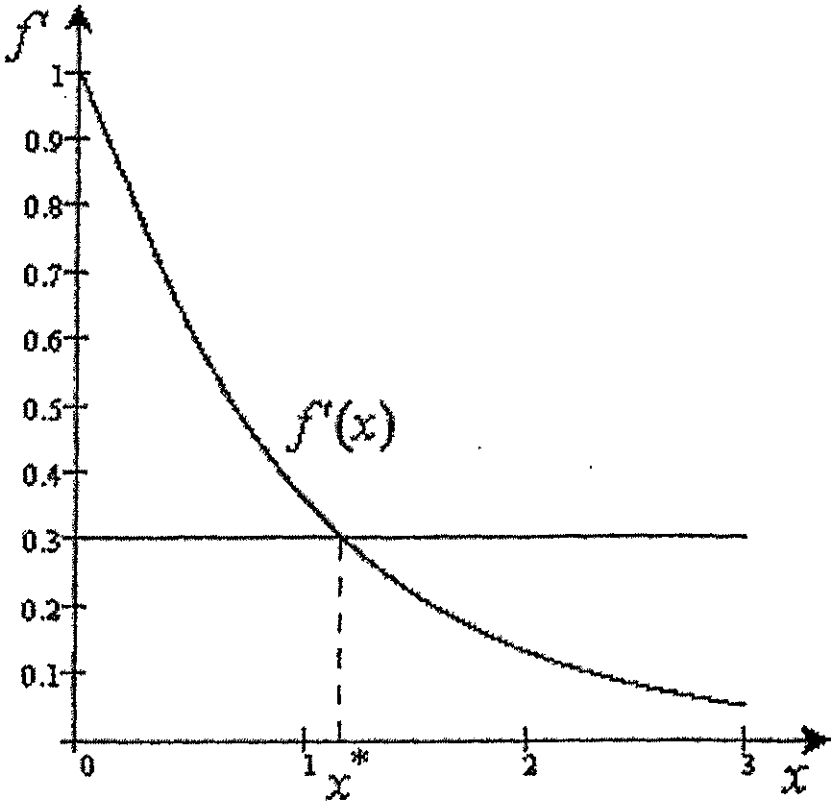

Рис. 5

В частности, для экономической системы Хабаровского края вычисления дают следующие параметры уравнений (41): $\lambda = 0.1155$, $a = 0.7$, $p = 0.058$. Норма дисконтирования δ взята равной 0.1. Система (41) имеет следующее решение: $x_r^* = 1.133$, $w_r^* = 5.899$. Приведем также значения x_{min}, w_1, w_2: $x_{min} = 0.282$, $w_1 = 0.3qC_\infty f(x_r^*) = 2.446$, $w_2 = qC_\infty f(x_r^*) = 8.153$.

Учитывая, что $a = q\mu C_\infty B$, $p = \mu B$, $\lambda = \mu + \nu + \tau$, второе уравнение (41) запишем в форме

$$w_r^* = qC_\infty f(x_r^*) - \frac{1 + (\nu + \tau)\mu^{-1}}{B} x^* .$$

Так как $w_1 = \Delta q C_\infty f(x_r^*)$, $w_2 = qC_\infty f(x_r^*)$, здесь Δ – параметр, определяющий долю минимально допустимого потребления к максимально возможному на стационарном режиме, $0 < \Delta < 1$; очевидно, что $w_r^* < w_2$. Условие $w_r^* > w_1$ будет выполняться

при
$$\Delta < 1 - \frac{1+(\nu+\tau)\mu^{-1}}{qBC_\infty f(x_r^*)}. \tag{43}$$

Для Хабаровского края вычисления дают $\Delta < 0.76$.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда неравенство (43) выполняется. В этом случае $w_r^* \in G_w$, поэтому в точке (x_r^*, w_r^*) и ее окрестности имеет место соотношение (36'), из которого следует

$$\omega_r = p^{-1}\alpha\left(w_r^*\right)^{\alpha-1}. \tag{44}$$

В частности, при $\alpha = 0.7$ получаем $\omega_r^* = 7.08$.

При анализе оптимального управления $w^*(t)$, оптимальной траектории фазовой переменной $x^*(t)$ и соответствующей траектории сопряженной переменной $\omega(t)$ при $T \to \infty$ рассмотрим два принципиально разных случая: 1) $x_{\min} < x_0 < x_r^*$; 2) $x_0 > x_r^*$, где, напомним, $x_0 = x^*(0)$.

В первом случае начальное значение сопряженной переменной $\omega(0)$ надо взять $> \omega_2$, при этом оптимальное управление $w^*(t) = w_1$, т. е. потребление находится на предельно низком уровне и фазовая переменная $x^*(t)$ возрастает (см. первое уравнение системы (40)). Сопряженная переменная $\omega(t)$ при $x^*(t) < x_r^*$ уменьшается (см. второе уравнение системы (40) и рис. 5), и в некоторый момент времени t_2 достигает значения ω_2, а затем становится $< \omega_2$, т. е. сопряженная переменная попадает в интервал $\omega_1(t) < \omega(t) < \omega_2$. При этом оптимальное управление $w^*(t)$ определяется зависимостью

$$w^*(t) = \left(\frac{p^{-1}\alpha}{\omega(t)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{45}$$

Далее по кривой BA, которая со временем становится все круче ($x^*(t) \to x_r^*$) (см. рис. 3), оптимальное управление поднимается до стационарного значения w_r^*, а фазовая и сопряженная переменные достигают значений x_r^*, ω_r.

Во втором случае ($x_0 > x_r^*$) начальное значение сопряженной переменной $\omega(0)$ должно быть $< \omega_1(t)$, например, $\omega(0) = 0$. При этом оптимальное управление $w^*(t) = w_2(t) = q\,C_\infty\, f\left(x^*(t)\right)$ соответствует тому, что все производство региона идет на потребление, инвестиций в производство нет. Первое уравнение системы (40) при $\omega(t) < \omega_1(t)$ имеет вид

$$\frac{dx^*}{dt} = -\lambda x^*, \qquad x^*(0) = x_0,$$

решение которого есть

$$x^*(t) = x_0\, e^{-\lambda t}. \tag{46}$$

Поэтому во втором случае фазовая переменная при $\omega(t) < \omega_1(t)$ уменьшается со временем, следуя зависимости (46).

Сопряженная переменная $\omega(t)$, определяемая вторым уравнением системы (40), со временем возрастает, т. к. при $x^*(t) > x_r^*$ производная $\frac{d\omega}{dt} > 0$ и в некоторый момент времени t_1 достигает значения $\omega_1(t)$, а затем попадает в интервал $\omega_1(t) < \omega(t) < \omega_2$. Так как при этом оптимальным управлением становится зависимость (45), то далее по кривой AB $w^*(t)$ спускается до стационарного значения w_r^*, фазовая и сопряженная переменные достигают значений x_r^*, ω_r.

Отметим, что во времени прямая w_2 поднимается по оси w, точка ω_1 движется влево, наклон кривой AB увеличивается, сопряженная переменная $\omega(t)$ и точка ω_1 движутся навстречу друг другу. При $t > t_1$ фазовая переменная $x^*(t)$ продолжает уменьшаться, но скорость падения асимптотически стремится к нулю.

Проведенный анализ оптимального управления $w^*(t)$, соответствующих ему траекторий $x^*(t)$, $\omega(t)$ полезен для построения алгоритма решения оптимальной задачи и реализации его на ЭВМ при T конечном, т. е. при численном решении краевой задачи (40), (39').

Библиографические ссылки

1. *Булгаков В. К., Булгаков О. В.* Макроэкономическое моделирование региональных экономических систем России: Препринт. Хабаровск, 2002.

2. *Булгаков В. К., Булгаков О. В., Белкин В. Г.* Макроэкономика и воспроизводство основного капитала региональных экономических систем России. Владивосток, 2002.

3. *Булгаков В. К., Булгаков О. В.* Экономико-математическая модель региональных экономических систем России, регионального воспроизводства основного капитала. Численные исследования экономики Хабаровского края // Динамика пространственной структуры экономической системы Российской Федерации: Материалы Всесоюзной научной конференции / Под общ. ред. Н. Н. Михеевой; РАН ДВО. Ин-т экон. исслед. Хабаровск, 2003.

4. *Балацкий Е. В.* Воспроизводственный цикл и налоговое бремя // Экономика и математические методы. 2000. № 1.

5. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М., 1978.

6. *Колемаев В. А.* Математическая экономика. М., 2002.

7. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. М., 1973.

8. *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. А.* Математические методы в экономике. М., 1997.

9. *Понтрягин Л. С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1976.