



УДК 518.61:539.375

© А. А. Лукашевич, 2007

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И РАЗРУШЕНИЯ УПРУГО-ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ ДЕЙСТВИИ ЖЕСТКОГО ИНДЕНТОРА

Лукашевич А. А. – канд. техн. наук, доц. кафедры «Механика деформируемого твердого тела» (ТОГУ)

Предлагаются конечно-элементные модели и алгоритмы численного решения задач контактного взаимодействия и разрушения твердых тел. Поведение материала описывается упруго-хрупкой нелинейно-деформируемой средой (модель хрупкого разрушения). Проведен численный анализ квазистатического деформирования и разрушения костной ткани при проникающем действии жесткого индентора (данная задача моделирует рубленую травму трубчатой кости острым предметом).

The article considers some finite-element models and algorithms of numerical solving contact and fracture problems of solids. The behaviour of a material is described by the elasto-fragile nonlinear solid (fragile-damage model). The author has carried out a numerical analysis of quasi-static deformation and destruction of a bone at penetrating action of the rigid indenter (This problem is modelling a cut trauma of a tubular bone by a sharp subject).

Введение. Численное моделирование процессов контактного взаимодействия и разрушения материалов отличается определенными сложностями, которые заключаются в том, что необходимо одновременно учитывать нелинейное деформирование, контактные взаимодействия, трещинообразование и фрагментацию сплошной области. Эти, а также многие другие проблемы, возникающие при решении практических задач, требуют совершенствования численных моделей и алгоритмов с применением современных компьютерных технологий.

Известно, что при статическом или динамическом воздействии на деформируемое твердое тело (особенно, если материал хрупкий) при достижении определенного уровня напряженно-деформированного состояния может начаться процесс разрушения, поначалу имеющий локальный характер, а затем катастрофически развивающийся вглубь об-

ласти. Под хрупким разрушением будем понимать разрушение упруго-деформируемых сплошных тел без учета вязкости и накопления микрповреждений; при этом предполагается, что материал тела при достижении предела прочности мгновенно переходит из чисто упругого состояния в разрушенное [1]. К таким материалам можно отнести бетон, камень, стекло, органопластик, кость и т. д.

При численном решении задач разрушения сплошных тел в настоящее время используется два подхода. Первый связан с решением задачи *линейной механики разрушения* (ЛМР), предполагающей линейно-упругую модель материала, в котором распределение НДС в окрестности вершины трещины и, следовательно, ее распространение определяется через коэффициенты интенсивности напряжений [1]. Другой подход – решение задачи *нелинейной механики разрушения* (НМР) – использует физически нелинейную модель материала в предположении малости деформаций при хрупком разрушении [2]. Также в НМР предполагается, что максимальное главное напряжение не превышает предела прочности (в ЛМР допускается бесконечное значение такого напряжения в вершине трещины). Подобное ограничение отвечает физическим основам явления разрушения (т. к. молекулы материала при разрушении разъединяются при конечных значениях сил межмолекулярного взаимодействия). Таким образом, уравнения НМР находятся в лучшем соответствии с физическими законами природы по сравнению с уравнениями ЛМР. К тому же посредством ЛМР нельзя описать поведение близко расположенных трещин, процессы разветвления и слияния трещин, образования магистральной макротрещины и т. п.

В настоящей работе предлагаются конечно-элементные модели и алгоритмы численного решения задач контактного взаимодействия, нелинейного деформирования и разрушения твердых тел. Поведение материала описывается упруго-хрупкой средой. Проведен численный анализ динамического и квазистатического деформирования и разрушения твердых тел при проникающем действии жесткого индентора.

Формулировка задачи нелинейного деформирования. Здесь используется формулировка основных уравнений, в которой рассматривается только физическая нелинейность, т. е. применяются нелинейные определяющие соотношения, эффекты же геометрической нелинейности считаются пренебрежительно малыми.

Уравнения движения (без учета действия объемных и вязких сил):

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \in V \quad (1)$$

с граничными и начальными условиями

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s, \in S_u, \quad \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{g}_s, \in S_g, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{v}_0. \quad (2)$$

Здесь и далее: $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений; $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ – дивергенция тензора



напряжений (вектор); \mathbf{u} – вектор перемещений; V – область, занимаемая деформируемым телом; S_u, S_g – части поверхности S ($S = S_u \cup S_g$), ограничивающей V , на которых заданы векторы перемещений \mathbf{u}_s и напряжений \mathbf{g}_s соответственно; \mathbf{N} – единичный вектор внешней нормали к поверхности S_g ; $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0$ – заданные начальные значения векторов перемещений и скоростей; ρ – массовая плотность материала; t – монотонно возрастающий параметр (в динамических задачах это время).

Уравнения геометрические (Коши):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций; $\nabla \mathbf{u}$ – тензор градиента перемещений.

Определяющие соотношения для физически нелинейного материала (с возможностью его хрупкого разрушения при решении задачи НМР) описываются однородной связью скоростей компонент тензора напряжений со скоростями компонент тензора деформаций:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (4)$$

где \mathbf{E} – тензор модулей упругости, компоненты которого в общем случае зависят от компонент тензоров напряжений и деформаций. Линеаризуя соотношения (4) относительно времени t , получаем

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_t \Delta \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5)$$

Здесь и далее знак Δ перед величиной означает ее приращение с момента времени t к моменту времени $t + \Delta t$; \mathbf{E}_t – симметричная матрица, элементы которой соответствуют компонентам одноименного тензора.

Для численного решения приведенной задачи лучше всего подходит *метод конечных элементов* (МКЭ) [3, 4, 5]. Этот метод наиболее удобен для аппроксимации сложной геометрии, нелинейных свойств материала и высокоградиентного распределения параметров НДС, а также эффективен для численного описания контактного взаимодействия с учетом трения и нелинейного поведения поверхностных слоев между соприкасающимися телами. Расчетная дискретная схема – конечно-элементная сетка – может содержать одновременно элементы различных моделей материалов: относительно жесткие – индентора или штампа; упруго-деформируемые – сплошной среды; контактные – моделирующие поверхностный слой в зоне контакта.

Использование МКЭ позволяет численно описывать сложные процессы трещинообразования и фрагментации сплошной среды, проводить корректировку координат узлов и перестроение конечно-элементной сетки в ходе расчета и в конечном счете получать достаточно точное и устойчивое решение при оптимальной организации вычислительных алгоритмов и процессов на ЭВМ.

Исходную постановку задачи (1) – (4) с учетом (5) нетрудно свести

к конечно-элементному аналогу, используя МКЭ и основываясь на вариационном принципе Гамильтона [6].

В конечном счете, разбивая область V на *конечные элементы* (КЭ) и проводя процедуру аппроксимации в соответствии с МКЭ, получаем конечно-элементную формулировку *нелинейной динамической задачи* – систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с начальными условиями:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{U} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_t, \quad \mathbf{U}_{(t=0)} = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}_{(t=0)} = \mathbf{V}_0, \quad (6)$$

где \mathbf{K}_t – касательная матрица жесткости системы конечных элементов; \mathbf{M} – матрица масс системы; $\Delta \mathbf{U}$ – приращение вектора узловых перемещений; $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ – вектор узловых ускорений; \mathbf{F}_t – вектор внутренних сил системы; $\mathbf{P}_{t+\Delta t}$ – вектор внешних узловых сил.

При высокоскоростном динамическом нагружении (удар, взрыв) необходимо учитывать рассеяние (диссипацию) энергии. Для учета диссипативных свойств сплошной среды, обусловленных внутренним трением в материале, введем в уравнения движения объемные силы сопротивления (в виде вязких составляющих), зависящие от скоростей точек среды. В этом случае матричное уравнение движения, учитывающее (6), запишется в следующем виде [5]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{U} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_t, \quad \mathbf{U}_{(t=0)} = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}_{(t=0)} = \mathbf{V}_0, \quad (7)$$

где \mathbf{C} – матрица демпфирования (диссипации энергии) системы.

Численное решение матричных уравнений (6) и (7) выполняется с использованием пошаговых процедур по времени. В данной работе применяется неявная конечно-разностная схема Ньюмарка, причем при решении нелинейной динамической задачи на каждом временном шаге выполняется уточняющая процедура учета нелинейности (для уточнения используется модифицированный метод Ньютона-Рафсона [4, 5]).

Кратко изложим алгоритм решения динамической задачи. На каждом шаге по времени решается алгебраическая система уравнений

$$\widehat{\mathbf{K}}_t \Delta \mathbf{U} = \widehat{\mathbf{P}}_{t+\Delta t}, \quad (8)$$

где введены: $\widehat{\mathbf{K}}_t$ – эффективная касательная матрица жесткости; $\widehat{\mathbf{P}}_{t+\Delta t}$ – эффективный вектор внешних сил.

Система алгебраических уравнений (8) решается методом \mathbf{LDL}^T -факторизации, учитывающим разреженность симметричной матрицы $\widehat{\mathbf{K}}_t$ и ее переменный профиль. После определения вектора $\Delta \mathbf{U}$ вектор перемещений $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ в момент времени $t+\Delta t$ определяется по формуле

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta \mathbf{U}. \quad (9)$$

Для нелинейной динамической задачи данное решение уточняется с помощью метода Ньютона-Рафсона, пока вектор невязки узловых сил



$\delta^{(i)} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{(i)}$ на i -й итерации не станет близок к нулевому (в пределах, конечно, заданной погрешности сходимости решения).

Конечно-элементная формулировка нелинейной задачи квазистатического деформирования может быть получена из системы уравнений (6) отбрасыванием инерционного члена (первого в левой части данного матричного уравнения):

$$\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{U} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_t, \quad \mathbf{U}_{(t=0)} = \mathbf{U}_0. \quad (10)$$

В качестве параметра t здесь принимается монотонно возрастающий параметр, например уровень заданной внешней нагрузки.

Здесь для решения уравнения (10) применяется безусловно сходящийся шаговый метод решения нелинейных задач – метод последовательных нагружений, при котором нагрузка прикладывается не вся сразу, а малыми шагами. Этот метод позволяет получать решение нелинейной контактной задачи на каждом уровне нагружения при удовлетворении всех уравнений состояния и граничных условий для дискретной области (включая поверхностный слой). Фактически моделируется реальный процесс нагружения, и полученная на каждом шаге картина контактного разрушения сплошной среды рассматривается как решение задачи при данном уровне нагрузки. В этом случае имеется возможность учета процесса нагружения во времени, т. е. решается квазистатическая задача.

Моделирование контактного взаимодействия. В практических задачах нагружение деформируемых твердых тел часто является результатом взаимодействия двух и более контактирующих объектов. Именно на поверхностях контакта, где, как правило, условия нагружения являются наиболее жесткими, чаще всего и начинается процесс разрушения материала.

Для моделирования контактного взаимодействия индентора и сплошной среды могут использоваться самые различные подходы и алгоритмы [7, 8]. Наиболее общий подход – применение специальных *контактных конечных элементов* (ККЭ), которые вводятся на участках контакта между поверхностями соприкасающихся тел. ККЭ дискретизируют некоторый очень тонкий слой псевдосреды, который в реальных условиях всегда имеет место между контактирующими поверхностями (зазоры, неровности, шероховатости). Контактный слой деформируется вместе со средой и благодаря заданным нелинейным свойствам, учитываемым посредством пошагового численного моделирования, может удовлетворять необходимым условиям контакта.

При решении двумерных задач контактного разрушения сплошной среды использовались построенные автором *контактные суперэлементы* (КСЭ), совместимые с двумерной задачей теории упругости по

числу степеней свободы в каждом узле дискретной схемы (компонентам узловых перемещений).

Основой для построения трехузлового КСЭ является стержневая система (плоская рама), стержни которой работают на изгиб с учетом продольных деформаций (рис. 1, а). При формировании матрицы жесткости КСЭ компоненты, соответствующие углам поворота всех узлов рамы, а также все компоненты перемещений в узле s исключаются из конечно-элементных уравнений с помощью процедуры конденсации (аналитически). Это позволяет в явном виде получить матрицу жесткости для квазисовместного КСЭ (рис. 1, б).

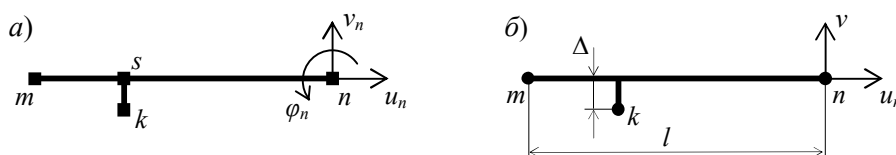


Рис. 1. Рамный контактный суперэлемент типа «поверхность–узел»

Стержни суперэлемента имеют, в общем случае, нелинейные характеристики продольной и поперечной жесткостей, в основе которых – кусочно-линейная аппроксимация закона упругости. Механический аналог рассматриваемого КСЭ в исходном ненагруженном состоянии представлен на рис. 2. Приложение продольных сжимающих усилий к узлу k вызывает сжатие стержня $s-k$, ограниченное минимальной толщиной контактного слоя Δ_{min} . При растягивающих усилиях этот стержень удлиняется, поперечная же нагрузка вызывает изгиб стержня (смещение узла k вдоль границы контакта). Проскальзывание учитывается изменением положения стержня $s-k$ вдоль направляющей $m-n$.

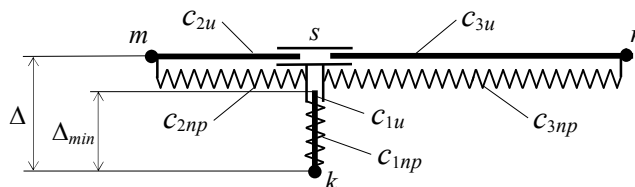


Рис. 2. Механический аналог контактного суперэлемента по рис. 1, б

Данный КСЭ может использоваться для моделирования контактного взаимодействия: как деформируемых тел, так и жесткого тела с деформируемым; как с учетом разрушения, так и без него. Тип реализуемого контакта – «поверхность–узел», причем имеется возможность построения для какого-либо участка т. н. укрупненного КСЭ (рис. 3, а).

КСЭ вводятся последовательно по мере установления контакта между соприкасающимися поверхностями. Например, при внедрении



индентора в деформируемое тело (с учетом разрушения последнего) происходит выключение (разрыв) одних контактных связей, включение следующих; тем самым моделируется подвижность данного типа контактного взаимодействия (рис. 3, б).

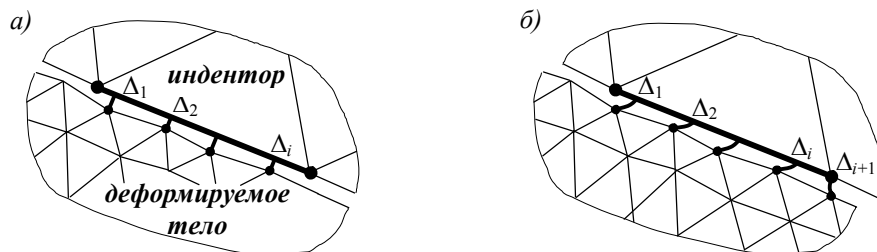


Рис. 3. Схема взаимодействия поверхностей с помощью КСЭ

Как можно видеть, контактные суперэлементы объединяют взаимодействующие тела в единую систему и выполняют функции регистрации состояния участков контакта (или отрыва) соприкасающихся поверхностей. Представленный КСЭ позволяет моделировать следующие состояния участков: отсутствие контакта, жесткое сцепление, контакт со скольжением и с учетом трения, подвижность контакта.

При использовании подобного КСЭ нет необходимости в совпадении координат узлов контактирующих тел, а также в согласовании нормалей к соответствующим поверхностям. Кроме того, данный КСЭ ориентирован на неограниченные взаимные перемещения (касательные) контактных поверхностей относительно друг друга, позволяет учитывать заданные зазоры между участками контакта, регулировать взаимное проникновение соприкасающихся поверхностей.

Матрица жесткости приведенного КСЭ содержит шесть коэффициентов жесткости, моделирующих, в общем случае, нелинейные свойства контактного слоя. Продольная жесткость C_{1np} стержня $s-k$ характеризует жесткость слоя по нормали к контактирующим поверхностям, изгибная жесткость того же стержня C_{1u} характеризует касательную жесткость контактного слоя (т. е. моделирует контактное трение). Продольная и поперечная жесткости стержней $m-s$ и $s-n$ (C_{2np} , C_{2u} , C_{3np} , C_{3u}) характеризуют жесткость контактного слоя у внешней поверхности индентора и могут быть использованы для моделирования проскальзывания поверхностей (продольная жесткость) или взаимного проникновения контактирующих тел (поперечная жесткость).

Текущая толщина контактного слоя Δ_i в общем случае является величиной переменной. Отсутствие фактического контакта между взаимодействующими телами (или разрыв контакта) определяется условием $\Delta_i > \Delta_{0i}$, где Δ_{0i} – нормативная толщина слоя, которая может быть

равна приведенной высоте шероховатости, толщине прослойки и т. п. При $\Delta_i \leq \Delta_{0i}$ необходимо уже задавать жесткостные характеристики, соответствующие нелинейным свойствам реальной контактной среды или жесткостям одного из контактирующих тел.

Аналогично рассмотренному выше строится КСЭ типа «поверхность–поверхность». Здесь из базового укрупненного элемента – плоской рамы (рис. 4, а) – исключаются все угловые степени свободы, в результате получается шестиузловой рамный контактный суперэлемент с компонентами узловых перемещений, совместимыми с двумерной задачей теории упругости (рис. 4, б). Данный КСЭ удобно использовать для моделирования контактного взаимодействия при условиях непроникновения и скольжения контактирующих сред.

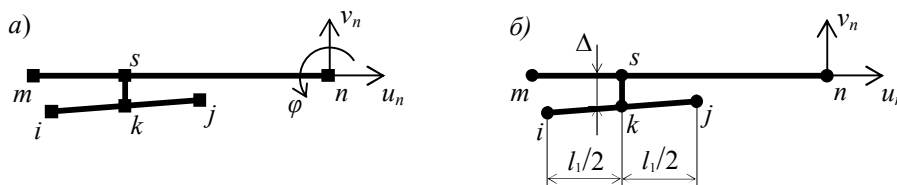


Рис. 4. Контактный суперэлемент типа «поверхность–поверхность»

Для решения пространственной задачи контактного разрушения сплошных сред предполагается использовать трехмерные КСЭ, построенные по такому же принципу, что и двумерные. В этом случае в базовую систему входят плоский мембранный треугольный конечный элемент с одним внутренним узлом и пространственный стержневой элемент (общее число степеней свободы – 30). Исключая посредством конденсации все 15 угловых степеней свободы, получим пятиузловой КСЭ типа «поверхность–узел», совместимый с трехмерной задачей теории упругости по числу степеней свободы в каждом узле (рис. 5).

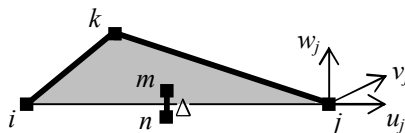


Рис. 5. Трехмерный КСЭ типа «поверхность–узел»

Моделирование процесса разрушения. Деформирование и разрушение сплошной среды осуществляется с помощью моделей, сформулированных в рамках механики деформируемого твердого тела. Для описания физически нелинейных свойств материала используется полином третьей степени: $\sigma = \sigma_0 + A \varepsilon - B \varepsilon^2 + C \varepsilon^3$. Здесь σ_0 , A , B , C – соответственно начальное напряжение и коэффициенты, определяемые исходя из предельных значений деформаций и напряжений.



Под разрушением понимается нарушение сплошности материала в каком-либо месте при выполнении соответствующего критерия разрушения. В предположении, что разрушение материала может происходить как по хрупкому типу (путем отрыва), так и по вязкому типу (путем сдвига), для определения момента разрушения изотропных малопластичных и хрупких материалов, прочность которых на сжатие выше прочности на растяжение, используется модифицированный критерий разрушения Мора в виде

$$\sigma_{экр} = \max(\sigma_1 - \nu\sigma_3, \sigma_1) = \sigma_F, \quad \nu = \sigma_F / \sigma_F^{сж}. \quad (11)$$

Для анизотропного материала используются критерии разрушения, которые учитывают различные прочностные характеристики материала на растяжение и сжатие в одном уравнении предельной поверхности, например, критерий разрушения, предложенный Новожиловым, или критерий прочности второго порядка, предложенный Ву. В частности, критерий Ву, имеющий более простую и удобную для численной реализации формулировку (выраженную через функции от компонент тензора напряжений), записывается в следующем виде [9]:

$$f(\sigma_{ij}) = D_{ij} \sigma_{ij} + D_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \dots \geq 1, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Здесь D_{ij} и D_{ijkl} являются компонентами соответствующих тензоров и определяются через пределы прочности на растяжение, сжатие и сдвиг.

При проведении численного моделирования процесса разрушения с помощью МКЭ на каждом шаге процедуры нелинейного или динамического расчета необходимо решать следующие вопросы:

- определение места возникновения и характера разрушения (действия на уровне конкретного узла или конечного элемента);
- собственно численное описание разрушения (локальные действия на уровне конечно-элементной сетки).

Численное моделирование механизма разрушения (на уровне конечно-элементной сетки) заключается, во-первых, в установлении картины разрушения: ориентации и размеров трещин, формы и размеров осколков, размеров области дробления или фрагментации. Во-вторых, в математическом описании измерения и накопления повреждений: роста трещин, их слияния, образования магистральных макротрещин и их распространения, увеличения числа осколков и расширения зон фрагментации. И, наконец, в учете влияния разрушения на остальные характеристики материала, в первую очередь на его прочностные свойства; в определении критического объема разрушений.

При численном описании процесса разрушения, картина которого заранее не известна, а также для обеспечения скольжения в сдвиговых трещинах целесообразно вводить поверхность разрушения (макротрещину) и при необходимости локально перестраивать сетку.

С учетом вышеизложенного в данной работе для моделирования

процесса трещинообразования, фрагментации и разрушения квази-хрупких материалов используется комбинация следующих подходов: метода раздвоения узлов – при появлении микротрещины и метода локальной перестройки сетки – для описания поведения макротрещины.

Первый из указанных подходов заключается в том, что при срабатывании критерия разрушения (11) или (12) в окрестности какого-либо узла конечно-элементной сетки данный узел разделяется на два узла. Таким образом, распространение трещины происходит по узлам и смежным сторонам конечных элементов сетки. Ориентация образовавшейся трещины и направление ее дальнейшего роста определяются по лучу, наиболее близкому к площадке максимальных растягивающих напряжений (если трещина за счет отрыва) либо к площадке, на которой действует максимальное касательное напряжение (если трещина за счет сдвига). Посредством расщепления конечно-элементной сетки вдоль сторон элементов, лежащих по одну и по другую стороны от направляющего луча трещины, образуется поверхность разрушения – макротрещина. Вводится *стержневой контактный элемент* (СКЭ), соединяющий пару раздвоенных узлов и моделирующий контактное взаимодействие берегов макротрещины (рис. 6).

Далее выполняется корректировка положения макротрещины в конечно-элементной сетке – путем сдвига узлов сетки на данный луч либо локальной перестройки конечно-элементной сетки в направлении трещины. В окрестности раздвоенного узла находятся элементы, через которые проходит плоскость трещины, и на противоположащих данному узлу сторонах этих элементов устанавливается положение вершин трещины (как точек пересечения плоскости трещины с этими сторонами). Если вершина делит данную сторону в отношении не более чем 1:4, ближний из смежных узлов переносится соответственно в вершину трещины; в противном случае в вершине вводится новый узел и КЭ делится на два элемента, лежащих на разных берегах трещины.

Ориентация образовавшейся микротрещины при срабатывании критерия разрушения определяется следующим образом.

- При состоянии неравномерного растяжения в окрестности узла ($\sigma_{экр} \geq \sigma_F$ и $\sigma_1 > 0$) разрушение происходит путем отрыва по площадке с максимальным нормальным напряжением.
- При состоянии неравномерного сжатия ($\sigma_{экр} \geq \sigma_F$ и $\sigma_1 \leq 0$) разрушение происходит путем сдвига, при этом максимальные касательные напряжения действуют на двух взаимно перпендикулярных площадках (площадках сдвига). Полагается, что обе эти ориентации равновероятны, поэтому при зарождении новой трещины случайным образом выбирается одна из них, а при дальнейшем росте трещины принимается та ориентация, которая ближе к направлению имеющейся трещины.

На рис. 6 проиллюстрирован процесс появления и продвижения



трещины в дискретной области. Показан пошаговый процесс локальной перестройки сетки при росте трещины (направление ее распространения обозначено стрелкой, раздвоенные узлы – кружками).

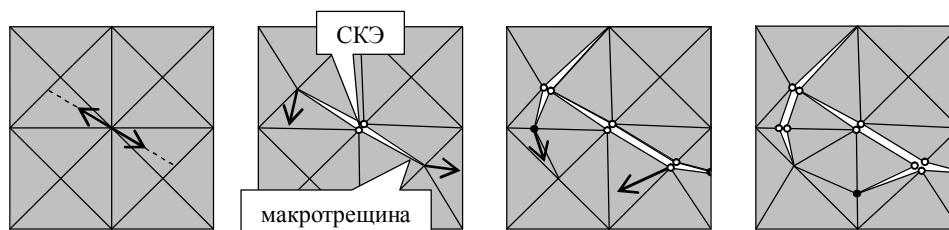


Рис. 6. Схема локальной перестройки сетки при росте трещины

После локального перестроения сетки требуется пересчитать соответствующие узловые и элементные параметры, характеризующие НДС обновленной дискретной области. При этом используются интерполяционные схемы, учитывающие весовые характеристики КЭ. Необходимо также отслеживать текущее состояние расчетной области.

Таким образом, для описания поведения трещин и моделирования процесса разрушения применяется следующий алгоритм расчета.

- На каждом шаге процесса нелинейного или динамического расчета проверяется критерий разрушения в узлах рассматриваемой области.
- При срабатывании критерия разрушения в каком-либо узле определяется плоскость образовавшейся микротрещины, совпадающая с площадкой максимальных растягивающих напряжений (главной площадкой) либо с площадкой сдвига.
- Данный узел разделяется на два узла – распространение трещины происходит по узлам и сторонам сетки, образуется макротрещина.
- Корректируются главные напряжения и для раздвоенных узлов пересчитываются значения компонент напряжений в основной системе координат (посредством обратного преобразования).
- Вводится СКЭ, соединяющий пару раздвоенных узлов и моделирующий контактное взаимодействие берегов макротрещины.
- С целью корректировки текущего положения и моделирования распространения макротрещины выполняется локальная перестройка сетки в ее окрестности (устанавливается положение вершин трещины в конечных элементах, через которые она проходит, данные элементы делятся на пары элементов, лежащих по разным берегам трещины).
- Проверяется текущее состояние расчетной области: объем разрушений, условия сплошности (при необходимости сетка корректируется).
- Пересчитываются соответствующие узловые и элементные параметры, характеризующие состояние обновленной дискретной схемы, а

также оптимизируется нумерация узлов обновленной сетки.

Описанный выше алгоритм численного моделирования разрушения сплошных сред вполне неплохо работает на регулярных сетках, однако если в процессе расчета произошло сильное деформирование конечных элементов, взаимное проникновение, «перехлест» элементов и другие некорректные эффекты, то это может привести к значительным погрешностям вычислений. Эти отклонения можно оперативно исправить, если вести постоянный мониторинг процесса расчета.

Результаты численных расчетов. Приведенные модели и алгоритмы решения задачи контактного взаимодействия и разрушения упруго-деформируемых твердых тел реализованы в созданном автором *программно-вычислительном комплексе* [10], предназначенном для численного анализа деформирования и разрушения сплошных сред при статическом и динамическом контактом воздействии.

Для проверки работоспособности, а также оценки достоверности и точности предлагаемых численных моделей с помощью программы [10] решен ряд тестовых и прикладных задач. Полученные результаты сравнивались с известными решениями и результатами экспериментов.

В настоящей работе приведен численный анализ разрушения кости при проникающем действии жесткого индентора (данная задача моделирует рубленую травму трубчатой кости острым предметом). Жесткостные и прочностные характеристики костной ткани, а также результаты натуральных испытаний представлены С. В. Леоновым (*Бюро судмедэкспертизы (СМЭ) Хабаровского края, кафедра СМЭ ДВГМУ*).

Ниже приведены физико-механические характеристики материалов, заданные в расчетах. Индентор – легированная сталь типа 20Х: модуль упругости $E = 207$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$. Костная ткань моделируется упруго-хрупкой ортотропной средой с использованием критерия разрушения Ву. Ее характеристики – в продольном направлении: $E = 9,45$ ГПа, $\sigma_F = 100$ МПа, $\sigma_F^{сж} = 250$ МПа; в поперечном: $E = 5,76$ ГПа, $\sigma_F = 17$ МПа, $\sigma_F^{сж} = 50$ МПа; $\nu = 0,328$. Упругие и прочностные характеристики (E , σ_F) заполнителя трубчатой кости принимались на порядок меньше, чем для основного материала. Коэффициент трения между контактирующими поверхностями проникающего индентора и материала кости $K_{тр} = 0,05$. Закрепление трубчатой кости выполнялось с помощью упругих связей, наложенных в узлах по ее верхней и нижней поверхности. Упругие опоры моделируют двухсторонний контакт кости (при условиях полного сцепления) с упруго-податливой подложкой со стороны окружающих кость мышечных тканей (упругое винклеровское основание). Построение дискретной модели системы «индентор–кость» соответствовало реальным геометрическим размерам. Для моделирования контактного взаимо-



действия здесь использовались рамные КСЭ типа «поверхность–узел».

На рис. 7 представлены результаты численного анализа разрушения кости рубящим острым (угол лезвия 30°) предметом при поперечном ударе. В виде изополей показано распределение первых главных напряжений. Задача решалась в динамической двумерной (плоская деформация) постановке. Динамическое нагружение моделировалось заданием импульса узловых сил, приложенных к индентору в направлении удара. Показано соответствие экспериментальных и расчетных результатов: прогнозируемых и оригинальных зон разрыва, формирования сколов, зарождения и развития опережающих трещин, перелома.

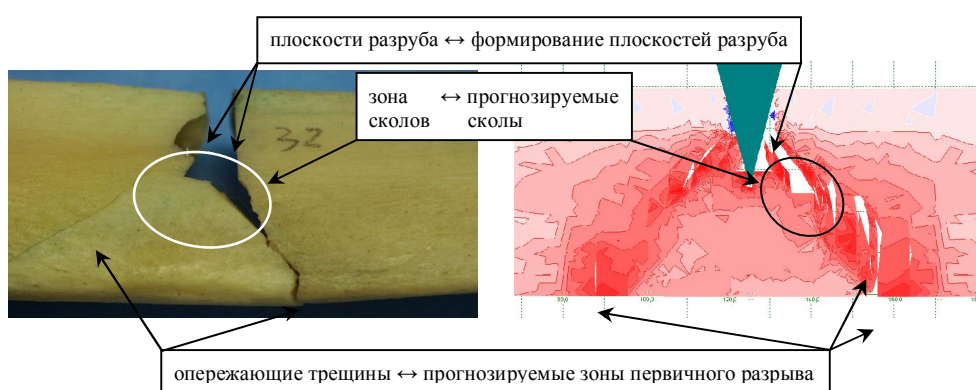


Рис. 7. Контактное разрушение трубчатой кости при поперечном ударе

На рис. 8 показано оригинальное рубленое повреждение трубчатой кости топором (угол лезвия 15°) под углом 45° . На рис. 9 представлены результаты численных расчетов, иллюстрирующих характер разрушения кости при внедрении острого индентора на разных этапах пошаговой процедуры (отображается только сплошная область, без зон фрагментации, а также изополя главных напряжений). Данная задача решалась в квазистатической двумерной физически нелинейной постановке. Для моделирования статического нагружения к индентору по шагам прикладывалась нагрузка в направлении воздействия.



Рис. 8. Оригинальное рубленое повреждение трубчатой кости топором

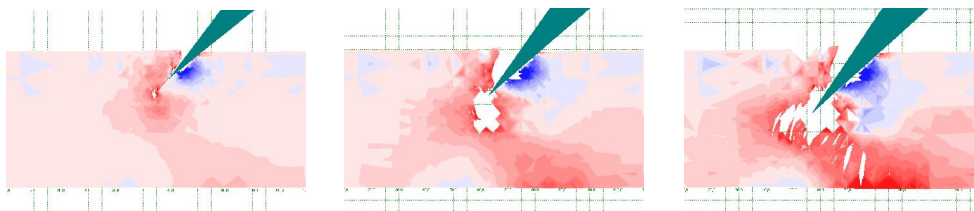


Рис. 9. Внедрение индентора под углом 45° (30, 70, 100 % нагружения)

Проведенные численные исследования показали хорошее соответствие расчетных и экспериментальных результатов, несмотря на существенную приближенность расчетных моделей (плоская деформация для ортотропного материала) к реальному объекту (трубчатая кость, имеющая сложные физико-механические свойства костной ткани). Как видно по рис. 7, 8 и 9, конфигурация и форма трещин, соответствие прогнозируемых и оригинальных зон – разруба, формирования сколов, зарождения и развития перелома (магистральных и встречных трещин), полученных при проведении натурных испытаний, в общем совпадают с полученными численными решениями.

Библиографические ссылки

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., 1974.
2. Черных К. Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М., 1996.
3. Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. М., 1980.
4. Бате Л., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., 1982.
5. Лукашевич А. А. Современные численные методы строительной механики. Хабаровск, 2003.
6. Розин Л. А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. СПб., 1998.
7. Морозов Е. М., Зернин М. В. Контактные задачи механики разрушения. М., 1999.
8. Механика контактных взаимодействий / Под ред. В. М. Александрова, И. И. Воровича. М., 2001.
9. Ву Э. М. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред // Механика композиционных материалов. М., 1985.
10. Программно-вычислительный комплекс для решения задач механики деформируемого твердого тела / А. А. Лукашевич. – Программа для ЭВМ. Зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ № 2005610090, 2005.