



УДК 624.074.415.624.072.2

© В. А. Кравчук, 2007

## ЖЕСТКОСТЬ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ КОЛОНН

*Кравчук В. А.* – д-р техн. наук, проф. кафедры «Строительные конструкции» (ТОГУ)

Жесткость предварительно напряженных конструкций следует рассматривать как некоторую усредненную характеристику упругих свойств не материала, а конструкции, жесткость которой повышается за счет предварительного напряжения ее элементов, продлевающего упругую работу материала и тем самым косвенно повышающего жесткость изделия.

Rigidity of preliminary intense designs should be considered as some average characteristic of elastic properties not a material, and designs which rigidity raises due to a preliminary pressure of its elements, prolonging elastic work of a material and by that product indirectly raising rigidity.

Изгибная  $EI_x$  и продольная  $EA$  жесткости во многом зависят от упругих свойств материала сечения, характеризующихся его модулем упругости. При работе некоторой части материала в области упругопластических деформаций его модуль упругости меняется. Это свойство материала было замечено в середине XIX в. при испытании коротких стоек. Оказалось, что устойчивость таких стоек не может быть описана формулой Л. Эйлера. Первые попытки объяснить физический смысл несоответствия принадлежат Энгессеру [1], который предложил заменить модуль упругости в формуле Эйлера на касательный модуль, равный тангенсу угла наклона касательной к криволинейной части графика  $\sigma - \varepsilon$ . На несовершенство уже этого модуля упругости обратил внимание Ф. С. Ясинский [2]. Суть его в том, что касательный модуль не учитывает тот факт, что материал сжато-изогнутого стержня, находящийся в зоне разгрузки, работает упруго и, следовательно, находится в двух состояниях – упругого и пластического деформирования. Экспериментальные и теоретические исследования Т. Кармана [3] подтвердили выводы Ф. С. Ясинского о неполном соответствии

касательного модуля действительным упругим свойствам материала, и им была предложена своя характеристика материала – приведенный модуль упругости:

$$T = \frac{2E_k E}{(E_k + E)}, \quad (1)$$

где  $E_k$  – касательный модуль упругости;  $E$  – модуль Юнга, включающий в себя и касательный модуль Ф. Энгессера.

Приведенный модуль более полно описывает действительное состояние материала, но определение его численных значений связано с необходимостью определения касательного модуля из диаграммы  $\sigma - \varepsilon$ , построенной на основе экспериментального исследования сжато-изогнутых стержней, материал которых работает в области упругопластических деформаций. Над совершенствованием приведенного модуля упругости работали Ф. Шенли, Ю. Н. Работнов [4].

В настоящем исследовании предлагается новый подход к определению модуля упругости, основанный на идее об обобщенном модуле деформаций, известной из работ С. В. Бондаренко и Р. С. Санжаровского [5]. Модуль упругости материала стержня, поперечное сечение, которого находится в зоне максимальных напряжений, подверженного упругопластическому деформированию, предлагается находить по формуле приведенного модуля  $T$ , известной из работ А. С. Вольмира, с уточнением ее за счет введения вместо касательного модуля  $E_t$  нового параметра, характеризующего упругопластические свойства материала предварительно напряженных конструкций – эквивалентного модуля  $E_{\mathcal{O}}$ :

$$E = (EI_1 + E_{\mathcal{O}}I_2) / I_x. \quad (2)$$

Полагая, что характеристикой жесткости любой конструкции является ее кривизна, сопоставляя между собой кривизну двух предварительно напряженных элементов, материал одного из которых работает в области упругих, а другого – в области упругопластических деформаций, можно найти характеристику упругих свойств конструкции из зависимости  $1/\rho = M / EI_x = M_{нл} / I_x$ . Откуда

$$E_{\mathcal{O}} = EM_{нл} / M, \quad (3)$$

где  $M_{нл}$  – максимальный момент внутренних усилий предварительно напряженной колонны (ПНК), материал которой частично работает в области пластических деформаций;  $M$  – то же, ПНК с упруго работающим материалом.

С учетом зависимости [6]



$$T = (EI_1M_x + EI_2M_{пл}) / I_xM_x. \quad (4)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга;  $I_1$  – момент инерции относительно нейтральной оси материала, находящегося в упругом состоянии;  $I_2$  – то же, в пластическом состоянии;  $I_x$  – то же, всего сечения.

Ранее [4] установлено, что  $M_{пл} = 0,3Ah\sigma_{wv}(K+1)$ , где  $K$  – коэффициент асимметрии поперечного сечения предварительно напряженных колонн;  $K=1,0$ ;  $A, h$  – площадь и высота сечения ПНК;  $\sigma_{wv}$  – нормальные напряжения в «верхней» зоне стенки в период ее предварительного напряжения,  $\sigma_{wv} = R_y \cdot 4\gamma_o / (4\gamma_o + 1) = 0,58333R_y$ ;  $\gamma_o = A_{fv} / A_w$  ( $A_{fv}, A_w$  – площадь «верхнего» пояса и стенки),  $\gamma_o = 0,35$ . Там же [5] установлено, что  $\sigma_{wn} = -2\gamma_o R_y / (4\gamma_o + 1)$ .

Момент внутренних усилий в поперечном сечении ПНК, материал сечения которой работает в области упругих деформаций, определим, рассмотрев нагружение колонны по схеме приведенной на рисунке. Согласно нагружению нормальные максимальные сжимающие напряжения в «нижней» зоне стенки должны быть равными

$$\sigma_{wn}^c = -\sigma_{wn} - \sigma_1 + \sigma_2 = -R_y. \quad (5)$$

В таком случае суммарные напряжения в «нижнем» поясе

$$\sigma_{fn}^c = -\sigma_1 + \sigma_2. \quad (6)$$

Суммарные напряжения в «верхнем» поясе определяются зависимостью

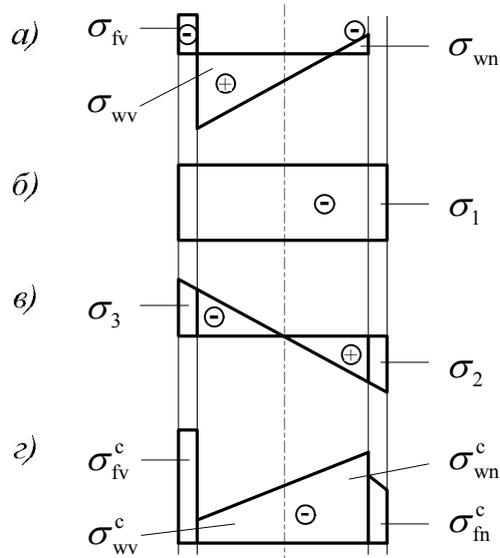
$$\sigma_{fv}^c = -\sigma_{fv} - \sigma_1 - \sigma_3, \quad (7)$$

а в «верхней» зоне стенки

$$\sigma_{wv}^c = \sigma_{wv} - \sigma_1 - \sigma_3. \quad (8)$$

Из равенства (5) найдем

$$\begin{aligned} -\sigma_1 + \sigma_2 &= -R_y + \sigma_{wn} = -R_y + 2R_y\gamma_o / (4\gamma_o + 1) = \\ &= -R_y(2\gamma_o + 1) / (4\gamma_o + 1). \end{aligned} \quad (9)$$



Эпюры напряжений при упругой работе стержня:  
*a* – предварительные; *b* – сжимающие; *v* – изгибные; *z* – суммарные

Следовательно,

$$\sigma_{fn}^c = -R_y(2\gamma_o + 1)/(4\gamma_o + 1). \quad (10)$$

Поскольку сопоставляются два сечения одинаковой площади и геометрических параметров, то коэффициент асимметрии  $K$  упруго работающего сечения равен  $K$  сечению с материалом, находящимся в состоянии упругопластической работы, т. е.  $K = 1,0$ . Учитывая изложенное, можно утверждать, что суммарные напряжения в «верхнем» поясе равны сумме напряжений в «нижнем» поясе и предварительных напряжений в «верхнем» поясе:

$$\sigma_{fv}^c = \sigma_{fn}^c + \sigma_{fn} = -2R_y(2\gamma_o + 1)/(4\gamma_o + 1), \quad (11)$$

а в «верхней» зоне стенки

$$\sigma_{wv}^c = \sigma_{fv}^c - \sigma_{wv} = 2R_y(\gamma_o + 1)/(4\gamma_o + 1). \quad (12)$$

Напряженное состояние, описанное зависимостями (5)–(8), возможно при условии

$$-\frac{S}{A} - \frac{Se}{0,3Ah} = -2R_y(\gamma_o + 1)/(4\gamma_o + 1); \quad (13)$$

$$-\frac{S}{A} + \frac{Se}{0,3Ah} = R_y(2\gamma_o + 1)/(4\gamma_o + 1). \quad (14)$$



Исключая сжимающее напряжение из  $\sigma_1 = S/A$  зависимостей (13) и (14), найдем эксцентриситет  $e$ :

$$e = 0,3h/(4\gamma_o + 3). \quad (15)$$

Тогда сжимающее усилие  $S$  может быть определено одним из двух выражений:

$$-S = -AR_y \frac{2(\gamma_o + 1)0,3h}{(4\gamma_o + 1)(0,3h + e)} = 0,91666AR_y; \quad (16)$$

$$-S = -AR_y \frac{(2\gamma_o + 1)0,3h}{(4\gamma_o + 1)(0,3h - e)} = 0,91666AR_y. \quad (17)$$

На основании выражений (16) и (17) сжимающее напряжение окажется равным

$$\sigma_1 = -R_y \frac{2(\gamma_o + 1)0,3h}{(4\gamma_o + 1)(0,3h + e)} = 0,91666R_y. \quad (18)$$

С учетом коэффициента асимметрии  $K$ , сжимающего усилия  $S$  и эксцентриситета  $e$  изгибные напряжения равны

$$\sigma_1 = \sigma_2 = Se/0,3Ah = \frac{2(\gamma_o + 1)(0,3h)^2}{(4\gamma_o + 1)^2(0,3h + e)} = 0,2R_y. \quad (19)$$

Момент сжимающего усилия

$$M_S = Se = AR_y \frac{2(\gamma_o + 1)(0,3h)^2}{(4\gamma_o + 1)^2(0,3h + e)} = 0,0625R_y Ah. \quad (20)$$

Эквивалентный модуль упругости находится на основании зависимости (3):

$$E_s = E \frac{M_{nl}}{M} = \frac{0,0889R_y Ah}{0,0625R_y Ah} = 1,425E. \quad (21)$$

В предварительно напряженных колоннах (ПНК) оптимального поперечного сечения  $I_1 = 0,1035Ah^2$ ;  $I_2 = 0,048833Ah^2$ ;  $I_x = 0,125Ah^2$  [4]. Отношение  $I_1/I_2 = 2,119$ . Подстановка указанных значений, а также  $M_x = 0,0625R_y Ah$  и  $M_{nl} = 0,0889R_y Ah$  в зависимость (4) позволяет установить, что приведенный модуль упругости предварительно напряженных колонн

$$T = 1,1379E. \quad (22)$$

Полученное значение модуля упругости принципиально отличается от аналогичного параметра, известного из работ Кармана [3] и детально описанного в трудах Ф. Блейха [7], А. С. Вольмира [6] и др. Суть отличия в том, что модуль  $T$  по зависимости (22) характеризует одновременно свойства высокопрочного материала «верхнего» пояса и мате-



риала остальной части двутавра, имеющих различные физико-механические характеристики – предел текучести, временное сопротивление, относительное удлинение и т. д. Его следует рассматривать как некоторую усредненную характеристику упругих свойств не материала, а конструкции, жесткость которой повышается за счет предварительного напряжения элементов, продлевающего упругую работу материала и тем самым косвенно повышающего жесткость изделия.

### Библиографические ссылки

1. *Engesser F.* Zeitschrift fur Arch. u. Jng. Wesen, 1889.
2. *Ясинский Ф. С.* О сопротивлении продольному изгибу // Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. М., 1952.
3. *Karman Th.*, Untersuchungen uber Knickfestigktit. // Mitteilngtn uber Forschungsarbeiten. 1910. Н. 81.
4. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М., 1979.
5. *Бондаренко С. В., Санжаровский Р. С.* Усиление железобетонных конструкций. М., 1990.
6. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., 1967.
7. *Блейх Ф.* Устойчивость металлических конструкций. М., 1959.
8. *Кравчук В. А.* Металлические строительные конструкции, предварительно напряженные продольной деформацией стенки: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. СПб., 1998.