ВЕСТНИК ТОГУ. 2010. № 1 (16)

УДК 624.074.1:681.3

О РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Бегун И. А – асп. инженер, e-mail: sm-Begunia@yandex.ru (НПО «СПЕЦМОСТ»); *Яцура В. Г.* – инженер кафедры «Мосты, основания и фундаменты», e-mail: most@dvadi.khstu.ru (ТОГУ)

Приводится описание программного комплекса «КАКТУС», предназначенного для выполнения расчетов плоских стержневых систем произвольной структуры. Дается краткое описание таблиц исходных данных, обсуждаются вопросы разработки комплекса. Помимо расчета обычных стержневых систем, программа позволяет рассчитывать системы при наличии односторонних связей. Программный комплекс разработан как открытая система.

The “CACTUS" program complex designed for estimation of flat rod systems of arbitrary structures is described. A brief description of tables for initial data is given. Besides the calculation of ordinary rod systems, the program can compute systems with unilateral constraints. The program complex has been developed as an open system.

Ключевые слова: автоматизированный расчет, стержневые системы, матричный алгоритм, односторонние связи, программный комплекс, вопросы разработки.

«Применение вычислительных машин для расчета привело к возникновению совершенно новой взаимосвязи теории и моделей: теория, записанная в виде программы ЭВМ, представляет собой и теорию, и, при реализации ее на ЭВМ, некоторую модель, к которой эта теория применяется [1].» Эта мысль Дж. Вейценбаума, ставшая сегодня почти тривиальной, продолжает заставлять заниматься разработкой программ для ЭВМ. Вопросы разработки программ расчета стержневых систем остаются актуальными, несмотря на то, что существует множество готовых программ для расчета конструкций; например: ЛИРА, СКАД, СТАРК и др. Это обосновано тем, что разработчик готовой программы не может в одной разработке охватить все возможные случаи расчетных схем, могущих встретиться в практике проектирования. Кроме того, все промышленные программные комплексы недоступны для модификации – отсутствуют исходные тексты программ. Пользователь, работающий с программой, если он лишен доступа к тексту на исходном языке, взаимодействует лишь с интерфейсом, оставленным для него создателем программы. «КАКТУС» разрабатывается как открытая система.

Важным является вопрос о выборе метода, подлежащего реализации. Уместно здесь упомянуть книгу А. П. Синицына [2], посвященную обсуждению МКЭ и традиционных методов строительной механики: метода сил, метода перемещений и смешанного метода. «Иногда считают, что метод конечных элементов в том виде, каким его применяют для решения плоской задачи, является каким-то самостоятельно новым методом, открытым совсем недавно. Согласиться с таким мнением нельзя, так как основная идея этого метода полностью отвечает общим методам строительной механики, в которых взамен сложной рассчитывается другая, преобразованная система, которая получается из заданной одним из трех способов: путем отбрасывания связей (способ сил), добавлением связей (способ перемещений) или путем того и другого; тогда получается смешанный способ А. А. Гвоздева [2]». В книге [2] рассмотрено решение многих сложных интересных задач.

Начальный период автоматизации расчетов часто сводился к переложению на ЭВМ, хорошо разработанных до машинной эпохи, приемов решения статических задач строительной механики, что отражено в известной литературе [3, 4]. Здесь важно было правильно выбрать основную систему так, чтобы можно было отобразить, возможно, больше вариантов расчетных схем. Такую возможность предоставляет основная система смешанного метода, в которой во всех жестких узлах устраняются линейные и угловые смещения, а стержни освобождаются от жестких заделок по концам (если они имеются) и на одном из концов от продольной связи. В стержне в общем случае при устранении связей возникают три неизвестных усилия: два концевых момента и концевая продольная сила. Аналогичный вариант выбора основной системы приводит Р. А. Резников [4] на основе предложенного им условно-экстремального принципа. Хорошей особенностью работы П. М. Сосиса [3] является то, что в ней, наряду с описанием обычной математической постановки задач, приводятся исходные данные для программ и их тексты на алгоритмическом языке. Использован АЛГОЛ-60. Действенные, работоспособные программы, созданные на PL-1, для решения стержневых и континуальных систем приведены в работе [5], составлены В. И. Мяченковым.

Становление метода конечных элементов можно проследить по источникам [6, 7]. Очень интересные примеры решения задач на FORTRAN даются в [7]. ЭВМ были столь маломощные, что промежуточные результаты выводились на перфокарты для дальнейшего использования, так как не помещались в оперативной памяти.

Рассмотрим раму рис. 1. При описании общей схемы постановки и решения задачи будем следовать работе А. Р. Ржаницына [8] и ее последующего развития [9]. В соответствии с принятым в работе [8] подходом, решая статически неопределимую задачу, рассмотрим три стороны задачи: статическую, геометрическую и физическую.

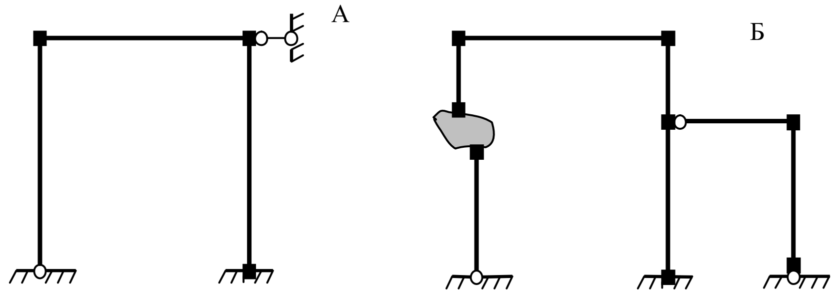

Рис. 1. Расчетные схемы рам: А – рама с обычными узлами;
Б – рама с узлом конечных размеров

Обозначим:

$\bar{\sigma}$ – вектор неизвестных концевых усилий стержней, компонентами которых для k-го стержня являются два момента концевых $\sigma^k{}_1$, $\sigma^k{}_2$ и продольная сила $\sigma^k{}_3$;

$\bar{u}$ – вектор узловых неизвестных, компонентами которых для каждого узла являются два линейных перемещения u_x, u_y и одно угловое u_φ;

$\bar{\varepsilon}$ – вектор деформаций стержней, составленный из компонентов $-\varepsilon^k{}_1$, $\varepsilon^k{}_2$, $\varepsilon^k{}_3$, соответствующих принятым концевым усилиям $\sigma^k{}_1$, $\sigma^k{}_2$, $\sigma^k{}_3$ для каждого из стержней;

$L_{u\sigma}$ – матрица реакций, компонентами которой являются реакции в узлах по направлениям перемещений узлов i и j, соответствующих началу стержня – $r^i{}_x$, $r^i{}_y$, $r^i{}_\varphi$, и его концу $r^j{}_x$, $r^j{}_y$, $r^j{}_\varphi$ от единичных значений концевых усилий стержней;

$L_{\varepsilon u}$ – матрица деформаций, компонентами которой являются перемещения по направлениям концевых деформаций $\varepsilon^k{}_1$, $\varepsilon^k{}_2$, $\varepsilon^k{}_3$ стержней, вызванные единичными значениями перемещений узлов $u^i{}_x$, $u^i{}_y$, $u^i{}_\varphi$ – в начале стержня и в его конце $u^j{}_x$, $u^j{}_y$, $u^j{}_\varphi$;

F – матрица податливости, компонентами которой являются единичные деформации стержней в направлении деформаций $\varepsilon^k{}_1$, $\varepsilon^k{}_2$, $\varepsilon^k{}_3$, соответствующие принятым концевым неизвестным $\sigma^k{}_1$, $\sigma^k{}_2$, $\sigma^k{}_3$;

$\bar{P}$ – вектор, компоненты которого узловые внешние силы;

$\bar{\Delta}_P$ – вектор местных деформаций элементов от внешней нагрузки.

В соответствии с принятыми обозначениями запишем, как в [8, 9], разрешающие уравнения для всей системы в целом.

Уравнения равновесия

$$L_{u\sigma}\,\bar{\sigma}+\bar{P}=0. \tag{1}$$

Геометрические уравнения

$$L_{\varepsilon u}\,\bar{u}+\bar{\varepsilon}=0. \tag{2}$$

Физические уравнения

$$\bar{\varepsilon}+F\,\bar{\sigma}+\bar{\Delta}_P=0. \tag{3}$$

Физические уравнения имеют блочно-диагональную структуру, включающие блоки f^k размером (3×3), соответствующие стержням рассчитываемой системы. Уравнения равновесия имеют также блочную структуру: включает блоки размером (6×3), соответствующие стержням рассчитываемой системы. Физические уравнения тоже блочной структуры: включает блоки размером (6×3), соответствующие стержням рассчитываемой системы.

Замечательным свойством матриц $L_{u\sigma}$ и $L_{\varepsilon u}$ является их взаимность

$$L_{\varepsilon u}=-L_{u\sigma}^{T}. \tag{4}$$

Это многомерный случай известной в строительной механике теоремы о взаимности реакций и перемещений. В работах [8,9] соотношение (4) А. Р. Ржаницын называет «принцип двойственности» статических и геометрических уравнений. Указанный принцип позволяет эффективно организовать вычисления в ЭВМ: вычисляется матрица $L_{u\sigma}^{T}$, а матрица $L_{\varepsilon u}$ строится на основании и соотношения (4). Это и формальный признак непротиворечивости разрешающих уравнений.

Уравнения (1)-(3) можно решать непосредственно. На практике ее решают блочно, получая систему уравнений смешанного метода, имеющую существенно меньшую размерность, чем исходная система. На первом блочном шаге с помощью физических соотношений из геометрических уравнений исключается вектор деформаций $\bar{\varepsilon}$. При этом получим систему уравнений смешанного метода

$$\bar{\Delta}=F\,\bar{\sigma}+L_{\varepsilon u}\,\bar{u}+\bar{\Delta}_P=0; \tag{5}$$

$$\bar{R}=L_{u\sigma}\,\bar{\sigma}+0\bar{u}+\bar{P}=0. \tag{6}$$

Умножив (5) слева на F^{-1} – матрицу, обратную к матрице податливости F, найдем вектор $\bar{\sigma}$:

$$\bar{\sigma}+F^{-1}L_{\varepsilon u}\,\bar{u}+F^{-1}\bar{\Delta}_P=0. \tag{7}$$

Подставив выражение $\bar{\sigma}$ в (6), получим канонические уравнения метода перемещений относительно неизвестных перемещений $\bar{u}$:

$$-L_{u\sigma}F^{-1}L_{\varepsilon u}\,\bar{u}-L_{u\sigma}F^{-1}\bar{\Delta}_P+\bar{P}=0. \tag{8}$$

Решая (8), получаем окончательно первые неизвестные – вектор перемещений узлов $\bar{u}$. Вектор концевых усилий $\bar{\sigma}$ получим, подставив найденный вектор $\bar{u}$ в (7).

С появлением полной системы (1)–(3) разрешающих уравнений теория расчета статически неопределимых систем приобрела теоретическую завершенность. В канонических формах основных методов расчета скрытыми оказываются три стороны задачи: статическая, геометрическая и физическая.

Так как матрица податливости F – блочно-диагональная, нет необходимости всю ее хранить в памяти ЭВМ; обращение осуществляется блоками с квадратными матрицами f^k размером (3×3), соответствующим стержням конструкции по мере формирования матриц. Матрица $L_{u\sigma}$ также не хранится целиком в памяти ЭВМ. Формируется и хранится только блок размером (6×3), относящийся к одному стержню. Матрицу $L_{\varepsilon u}$ вообще не нужно формировать отдельно. Она получается на основе соотношения двойственности (4). Полностью хранится матрица $L_{u\sigma}\,F^{-1}\,L_{\varepsilon u}$. Она формируется из блоков с накоплением результатов по мере обработки информации о стержнях конструкции и получении матрицы жесткости стержня. В описываемом алгоритме легко учитываются шарнирные условия закрепления стержней. В этих случаях размерность матрицы податливости стержня f^k и матрицы равновесия стержня $L^k{}_{u\sigma}$ уменьшается.

Составим матрицу равновесия и матрицу податливости для жестко защемленного с обоих концов k-го стержня.

Матрица $L^k{}_{u\sigma}$ равновесия стержня:

$$L^k{}_{u\sigma}=\begin{bmatrix} Sin\alpha/l & Sin\alpha/l & -Cos\alpha \\ -Cos\alpha/l & -Cos\alpha/l & -Sin\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ -Sin\alpha/l & -Sin\alpha/l & Cos\alpha \\ Cos\alpha/l & Cos\alpha/l & Sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Матрица f^k податливости стержня:

$$f^k=\begin{bmatrix} l/3EJ & -l/6EJ & 0 \\ -l/6EJ & l/3EJ & 0 \\ 0 & 0 & l/EA \end{bmatrix} \qquad (10)$$

В программной реализации легко учитываются наличие шарнирных узлов и шарнирные условия примыкания стержней. Для шарнирного узла в матрице $L^k{}_{u\sigma}$ стержня должны быть вычеркнуты один или два столбца, соответствующие переменным $\sigma^k{}_1$ и (или) $\sigma^k{}_2$, Для шарнирных узлов i, j также вычеркиваются и строки (третья, шестая) соответствующие неизвестным $u^i{}_\varphi$ и (или) $u^j{}_\varphi$. В матрице податливости стержня f^k также вычеркиваются столбцы и строки, соответствующие переменным $\sigma^k{}_1$, $\varepsilon^k{}_1$, и (или) $\sigma^k{}_2$, $\varepsilon^k{}_2$, при шарнирном прикреплении стержня к узлу.

В расчетной схеме могут присутствовать так называемые узлы конечных размеров (рис. 2). Здесь стержни прикрепляются по концам с эксцентриситетами ΔX^i, ΔY^i, ΔX^j, ΔY^j. По рис. 2 легко записать необходимые выражения для матрицы $L^k{}_{u\sigma}$:

$$L^k{}_{u\sigma}=\begin{bmatrix} Sin\alpha / l & Sin\alpha / l & -Cos\alpha \\ -Cos\alpha / l & -Cos\alpha / l & -Sin\alpha \\ 1+\Delta Y^i \dfrac{Sin\alpha}{l}+\Delta X^i \dfrac{Cos\alpha}{l} & \Delta Y^i \dfrac{Sin\alpha}{l}+\Delta X^i \dfrac{Cos\alpha}{l} & -\Delta Y^i Cos\alpha+\Delta X^i Sin\alpha \\ -Sin\alpha / l & -Sin\alpha / l & Cos\alpha \\ Cos\alpha / l & Cos\alpha / l & Sin\alpha \\ -\Delta Y^j \dfrac{Sin\alpha}{l}-\Delta X^j \dfrac{Cos\alpha}{l} & 1-\Delta Y^j \dfrac{Sin\alpha}{l}-\Delta X^j \dfrac{Cos\alpha}{l} & \Delta Y^j Cos\alpha-\Delta X^j Sin\alpha \end{bmatrix}$$

Если эксцентриситеты ΔX, ΔY равны нулю, то последние формулы для вычисления $L^k{}_{u\sigma}$ переходят в формулы (9).

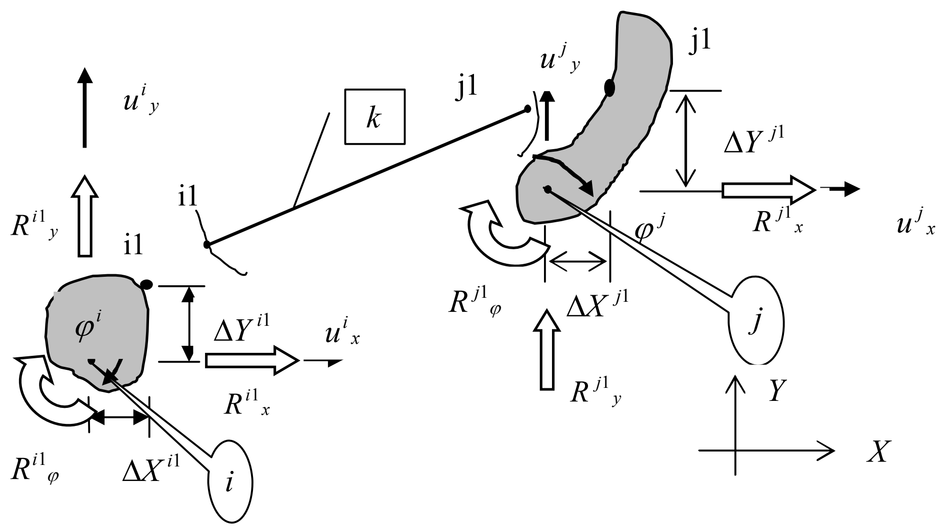

Рис. 2. К вычислению матрицы равновесия стержня, примыкающего к узлам конечных размеров

Базовый уровень программной реализации характеризуется минимальными сервисными возможностями. Табличные исходные данные представлены четырьмя таблицами. УЗЛЫ – задаются координаты узлов, матрица индексов, указывающая нумерации неизвестных, тип узла – жесткий или шарнирный. ЭЛЕМЕНТЫ – задаются номера строк в таблице УЗЛЫ, указывающие узлы, относящиеся к стержню, жесткость на растяжение и жесткость на изгиб. ОПОРЫ – перечисляются номера узлов (строк таблицы УЗЛЫ), имеющие закрепления от перемещений (возможные типы опор отображены на рис. 3). УЗЛОВЫЕ НАГРУЗКИ – перечисляются силы, приложенные вдоль координатных осей, и моменты, приложенные к узлам.

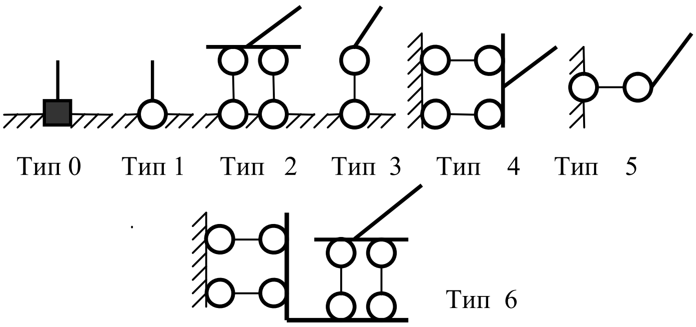

Рис. 3. Схемы и типы опор

В таком варианте программный код, реализующий вычислительную часть, содержит около 180 строк на языке FORTRAN (используется система Fortran 90 (Developer Studio)). В таком простейшем виде программа требует особого внимания при подготовке исходных данных. Особенно трудоемка операция по подготовке матрицы индексов, которая реально является основой автоматизации сложных расчетов [7, 10]. Матрица индексов имеет количество строк по числу узлов системы и три столбца и содержит номера неизвестных в узлах соответственно: неизвестное вдоль оси X, неизвестное вдоль оси Y и неизвестное соответствующее повороту узла. Если неизвестное отсутствует, то в соответствующем столбце проставляется ноль. Со всеми подробностями использования матрицы индексов можно познакомиться по источнику [10]. В качестве иллюстрации отобразим матрицу индексов к расчетной схеме, представленной на рис. 4.

«Имя» узла	Вдоль оси X	Вдоль оси Y	Поворот
100	0	0	0
-80	0	0	0
20	15	13	14
50	12	10	11
40	3	1	2
-30	6	4	5
60	15	13	0
7	9	7	8
9	0	0	16

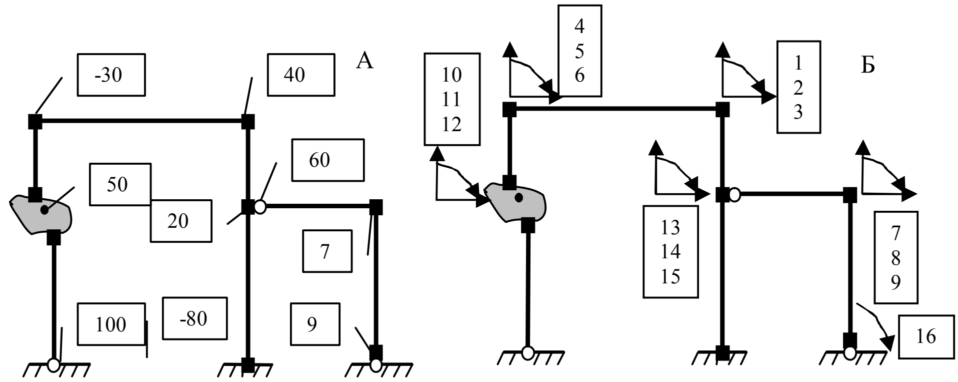

Рис. 4. К описанию матрицы индексов: А – обозначения узлов; Б – нумерация неизвестных в узлах

Следующий уровень автоматизации связан с развитием исходных данных и созданием процедур (модулей) переработки исходных данных во внутреннее представление и контроля данных на формальную непротиворечивость. Для узлов вводится понятие «имя узла» – произвольное уникальное для каждого узла целое число, матрица индексов исключается из исходных данных и формируется в программе автоматически на основе данных о типе узлов и типе опорных узлов (типы опор, используемые в программе, показаны на рис. 3). По рис. 2 можно понять, какие перемещения связанных узлов одинаковы, а какие – происходят независимо. Для элементов конструкции также вводится «имя» – уникальное целое число. Вводится дополнительная таблица – «КАТАЛОГ СЕЧЕНИЙ». В таблице «ЭЛЕМЕНТЫ» вместо непосредственного указания характеристик поперечных сечений задается имя соответствующего сечения из таблицы «КАТАЛОГ СЕЧЕНИЙ». В процессе контроля и переработки исходных данных названия узлов, стержней, типов сечений, номеров загружений заменяются указателями на номера строк соответствующих таблиц.

Широкие возможности для отображения расчетных схем предоставляет таблица «СВЯЗАННЫЕ УЗЛЫ», с помощью которой отображаются случаи совместных и независимых перемещений узлов. Схемы связанных узлов и их типы представлены на рис. 5.

Вводится таблица «УЗЛЫ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ», в которой дополнительно перечисляются узлы, обладающие свойствами узлов, изображенных на рис. 2. Узлы конечных размеров – тела бесконечно большой жесткости. Для них матрица равновесия вычисляется по формулам (11).

При составлении матрицы индексов вручную особенности расчетных схем, отражаемых с помощью таблицы «СВЯЗАННЫЕ УЗЛЫ», учитываются элементарно. Программная реализация создания в памяти ЭВМ матрицы индексов при наличии связанных узлов – нетривиальна.

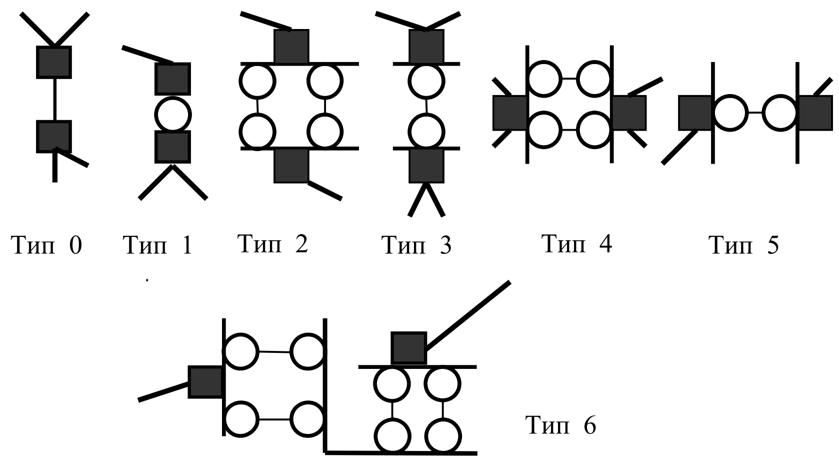

Рис. 5. Схемы и типы связанных узлов

Описание нагрузок расширено за счет таблицы «ПРОЛЕТНЫЕ НАГРУЗКИ». Это позволяет при наличии нагрузки на стержне между концевыми узлами не вводить в табличное описание расчетной схемы дополнительные узлы.

Наконец, возможно описание односторонних опор и односторонних стержней. Введены таблицы «ОДНОСТОРОННИЕ ОПОРЫ» и «ОДНОСТОРОННИЕ СТЕРЖНИ». Это позволяет описывать и рассчитывать системы с односторонними связями. Для выявления «рабочей схемы» – схемы включения связей – применяется метод решения задачи о дополнительности.

На следующем уровне программное обеспечение расширено за счет предпроцессорных средств – графического отображения исходных данных и постпроцессорных средств отображения результатов расчета. В рассмотренной версии программы «КАКТУС» ее графические возможности реализованы в системе Visual Basic 6. Однако некоторые соображения приводят к мысли использовать в дальнейшей работе над программой для этих целей возможности AutoCad.

Библиографические ссылки

1. *Вейценбаум Дж.* Возможности вычислительных машин и человеческий разум. От суждений к вычислениям. М., 1982.

2. *Синицын А. П.* Метод конечных элементов в динамике сооружений. М., 1978.

3. *Сосис П. М.* Статически неопределимые системы. Киев, 1968.

4. *Резников Р. А.* Решение задач строительной механики на ЭЦМ. 2-е изд., перераб. и доп. М., 1971.

5. *Расчет* машиностроительных конструкций на прочность и жесткость / Н. Н. Шапошников, Н. Д. Тарабасов, В. В. Петров, В. И. Мяченков. М., 1981.

6. *Расчет* строительных конструкций с применением электронных машин // Сборник статей по материалам трех конференций, проведенных в США в 1958–1963 гг. М., 1967.

7. *Современные* методы расчета сложных статически неопределимых систем / под ред. А. П. Филина. Л., 1961.

8. *Ржаницын А. Р.* Двойственность статических и геометрических уравнений // Известия вузов. Строительство и архитектура, 1974. № 11.

9. *Ржаницын А. Р.* Расчет стержневых систем с применением принципа двойственности. М., 1980. Вып. 24.

10. *Постнов В. А., Хархурим И. Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л., 1974.